PRÁCTICA 8:

Transformada de Laplace
Series de Fourier.

La Transformada de Laplace

Podemos hallar la transformada de Laplace de funciones.

- Para ello *wxMaxima*, dispone de la instrucción **laplace**.

```
(%i11) laplace(sin(t),t,s);
```
(%o11) $\frac{1}{s^2+1}$

```
(%i12) laplace(cos(t),t,s);
```
(%o12) $\frac{s}{s^2+1}$

```
(%i13) laplace(%e^t,t,s);
```
(%o13) $\frac{1}{s-1}$

```
(%i14) laplace(sin(t)*%e^t,t,s);
```
(%o14) $\frac{1}{s^2-2\,s+2}$

```
(%i15) laplace(sin(t)*cos(t),t,s);
```
(%o15) $\frac{1}{s^2+4}$

- Para calcular transformadas inversas *wxMaxima*, dispone de la instrucción **ilt**.

```
(%i20) ilt(1/(s^2+1),s,t);
```
(%o20) $\sin(t)$

```
(%i21) ilt((s+1)/(s^2+2*s+3),s,t);
```
(%o21) $\%e^{-t}\cos(\sqrt{2}\,t)$

- La resolución de ecuaciones diferenciales se puede realizar, con *wxMaxima*, mediante la transformada de Laplace, con la orden **desolve.** Esta orden está en las paletas en el apartado **Ecuaciones,** ir a, **Resolver EDO con Laplace.**

- A diferencia de la resolución de una ecuación diferencial con la orden **ode2**, ahora se debe utilizar notación funcional dentro de la expresión **diff** .
- Para definir funciones utilizaremos la orden **define.**

Ejemplo 1

Resolver, mediante la transformada de Laplace, la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y(x)=0$$

Solución con wxMaxima:

-

```
Escribimos la ecuación diferencial

(%i1) ecu:diff(y(x),x,2)+2*diff(y(x),x,1)+y(x)=0;
```

$$\text{(\%o1)}\quad \frac{d^2}{d\,x^2}\,y(x)+2\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\right)+y(x)=0$$

```
Resolvemos la ecuación diferencial mediante la transformada de Laplace

(%i2) r:desolve([ecu],[y(x)]);
```

$$\text{(\%o2)}\quad y(x)=x\,\%e^{-x}\left(\left.\frac{d}{d\,x}\,y(x)\right|_{x=0}\right)+y(0)\,x\,\%e^{-x}+y(0)\,\%e^{-x}$$

-

Observamos que en la respuesta, que da *wxMaxima*, aparecen y(0) e y'(0). Eso es debido a que no hemos introducido las condiciones iniciales del sistema.

- Para introducir estas condiciones utilizaremos la orden **atvalue**. Esta orden está en las paletas en el apartado **Ecuaciones,** ir a, **Condición inicial.**

Ejemplo 2

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-y=e^x x^2$$

Con las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \\ y''(0)=-2 \end{cases}$$

Solución con wxMaxima:

•

Escribimos la ecuación diferencial

```
(%i3) ecu:diff(y(x),x,3)-3*diff(y(x),x,2)+3*diff(y(x),x,1)-y(x)=%e^x*x^2;
```

(%o3) $\frac{d^3}{d x^3} y(x)-3\left(\frac{d^2}{d x^2} y(x)\right)+3\left(\frac{d}{d x} y(x)\right)-y(x)=x^2 \%e^x$

Imponemos las condiciones iniciales

```
(%i4) atvalue(diff(y(x),x,2), x=0, -2);
(%o4) -2
```

```
(%i5) atvalue(diff(y(x),x,1), x=0, 0);
(%o5) 0
```

```
(%i6) atvalue(y(x), x=0, 1);
(%o6) 1
```

Resolvemos la ecuación dif. mediante la transformada de Laplace

```
(%i7) r:desolve([ecu],[y(x)]);
```

(%o7) $y(x)=\frac{x^5 \%e^x}{60}-\frac{x^2 \%e^x}{2}-x \%e^x+\%e^x$

Definimos la función solución

```
(%i8) h(x):=y(x),r;
```

(%o8) $h(x):=\frac{x^5 \%e^x}{60}-\frac{x^2 \%e^x}{2}-x \%e^x+\%e^x$

Hallamos lo que vale la solución en x=2

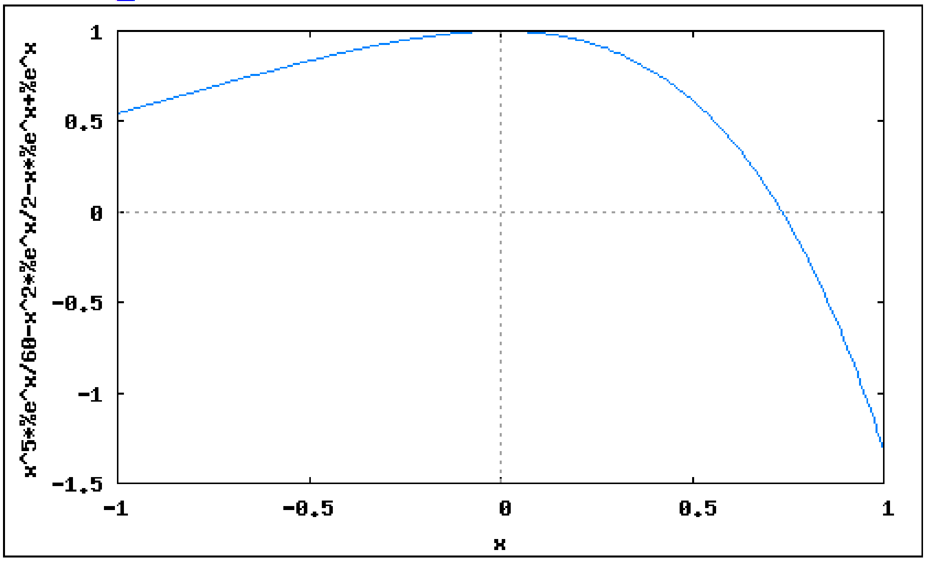
```
(%i9) h(2);
```

(%o9) $-\frac{37 \%e^2}{15}$

Representamos gráficamente la solución

```
(%i10) wxplot2d([h(x)], [x,-1,1],
        [plot_format, gnuplot])$
```

(%t10)



•

- La resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, mediante la transformada de Laplace, se realiza también con la orden **desolve**.

Ejemplo 3

Hallar la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

Solución con wxMaxima:

•

```
(%i1) ecu1:'diff(y1(x),x)=3*y1(x)-2*y2(x);
```

(%o1) $\frac{d}{dx}\,y1(x)=3\,y1(x)-2\,y2(x)$

```
(%i2) ecu2:'diff(y2(x),x)=2*y1(x)-2*y2(x);
```

(%o2) $\frac{d}{dx}\,y2(x)=2\,y1(x)-2\,y2(x)$

```
(%i3) desolve([ecu1,ecu2],[y1(x),y2(x)]);
```

(%o3) $[y1(x)=\frac{(2\,y2(0)-y1(0))\,\%e^{-x}}{3}-\frac{(2\,y2(0)-4\,y1(0))\,\%e^{2\,x}}{3}$

$, y2(x)=\frac{(4\,y2(0)-2\,y1(0))\,\%e^{-x}}{3}-\frac{(y2(0)-2\,y1(0))\,\%e^{2\,x}}{3}]$

•

Observamos que en la respuesta, que da *wxMaxima*, aparecen y1(0) e y2(0). Eso es debido a que no hemos introducido las condiciones iniciales del sistema.

- Para introducir estas condiciones utilizaremos la orden **atvalue**.

Ejemplo 4

Hallar la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + 3y_3 \\ y_2' = y_2 - 2y_3 \\ y_3' = y_1 + y_3 \end{cases}$$

Con las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y_1(0) = -1 \\ y_2(0) = 3 \\ y_3(0) = 1 \end{cases}$$

Solución con wxMaxima:

-

(%i4) ecu1:'diff(y1(x),x)=y1(x)+y2(x)+3*y3(x);

(%o4) $\frac{d}{dx}\,y1(x)=3\,y3(x)+y2(x)+y1(x)$

(%i5) ecu2:'diff(y2(x),x)=y2(x)-2*y3(x);

(%o5) $\frac{d}{dx}\,y2(x)=y2(x)-2\,y3(x)$

(%i6) ecu3:'diff(y3(x),x)=y1(x)+y3(x);

(%o6) $\frac{d}{dx}\,y3(x)=y3(x)+y1(x)$

(%i7) atvalue(y1(x),x=0,-1);

(%o7) -1

(%i8) atvalue(y2(x),x=0,3);

(%o8) 3

(%i9) atvalue(y3(x),x=0,1);

(%o9) 1

(%i10) desolve([ecu1,ecu2,ecu3],[y1(x),y2(x),y3(x)]);

(%o10) $[y1(x)=x\,\%e^{2x}+\%e^{2x}-2\,\%e^{-x},\ y2(x)=-2\,x\,\%e^{2x}+2\,\%e^{2x}+\%e^{-x}$

$,\ y3(x)=x\,\%e^{2x}+\%e^{-x}]$

Series de Fourier

Para hallar desarrollos de Fourier de funciones periódicas:

- En primer lugar cargaremos un paquete con la orden **load(fourie).**

- Utilizaremos la orden **fourier(f,x,p)** que devuelve una lista con los coeficientes de fourier de f(x) definida en el intervalo [-p,p].

- A continuación utilizaremos la orden **fourexpand(lista,x,p,n)** que nos devuelve la serie de fourier hasta el término n-ésimo.

Ejemplo 5
Calcular el desarrollo de la función periódica de periodo 2 definida en [-1,1] por f(x)=x.
Solución con wxMaxima:

•

```
(%i1) load (fourie);
(%o1) C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.0/share/maxima/5.24.0/share/calc
```

```
(%i2) lista:fourier(x,x,1);
```

(%t2) $a_0=0$

(%t3) $a_n=0$

(%t4) $b_n=2\left(\frac{\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2}-\frac{\cos(\pi n)}{\pi n}\right)$

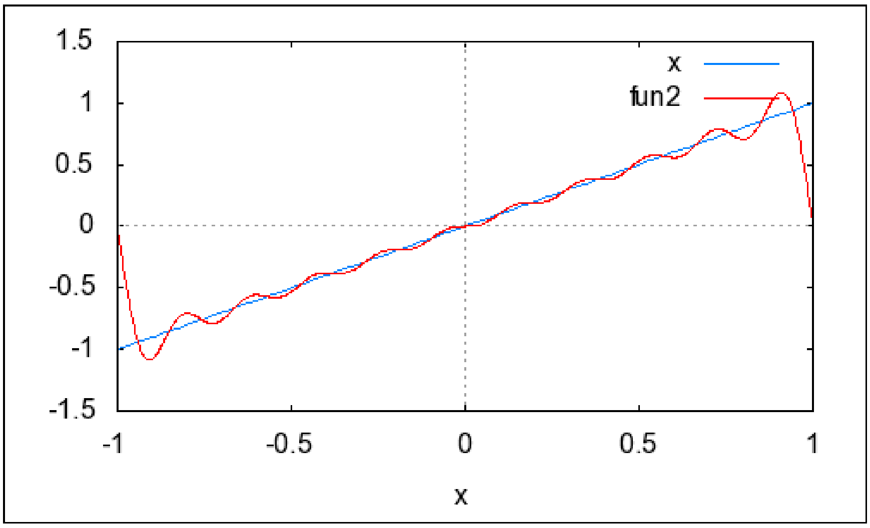
(%o4) [%t2, %t3, %t4]

```
(%i5) f10:fourexpand(lista,x,1,10);
```

(%o5) $-\frac{\sin(10\pi x)}{5\pi}+\frac{2\sin(9\pi x)}{9\pi}-\frac{\sin(8\pi x)}{4\pi}+\frac{2\sin(7\pi x)}{7\pi}-\frac{\sin(6\pi x)}{3\pi}+\frac{2\sin(5\pi x)}{5\pi}-\frac{\sin(4\pi x)}{2\pi}+\frac{2\sin(3\pi x)}{3\pi}-\frac{\sin(2\pi x)}{\pi}+\frac{2\sin(\pi x)}{\pi}$

(%i6) wxplot2d([x,f10],[x,-1,1]);

(%t6)



(%o6)

- También disponemos de las órdenes **fourcos(f,x,p)** y **foursin(f,x,p)** que nos devuelve los coeficientes de los desarrollos cosenoidal y senoidal respectivamente de la función f(x) definida en el intervalo [0,p].

Ejemplo 6
Calcular los desarrollos cosenoidal y senoidal de la función f(x)=x^2 en el intevalo [0,3].
Solución con wxMaxima:

Desarrollo cosenoidal

(%i2) list:fourcos(x^2,x,3);

(%t2) $a_0=3$

(%t3) $$a_n=\frac{2\left(\frac{27\sin(\pi n)}{\pi n}-\frac{54\sin(\pi n)}{\pi^3 n^3}+\frac{54\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}\right)}{3}$$

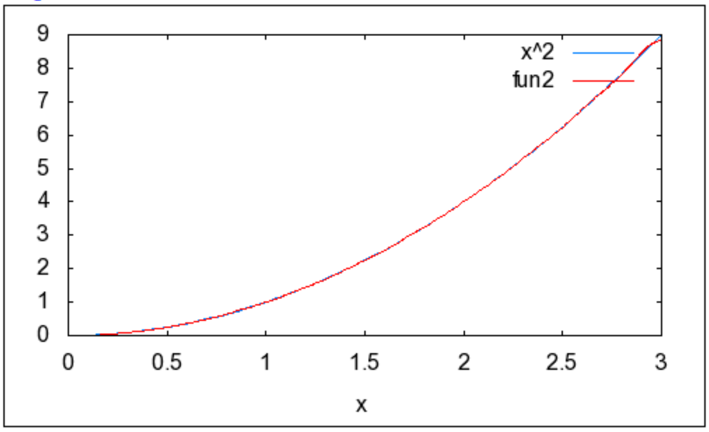
(%o3) [%t2,%t3]

(%i4) f20:fourexpand(list,x,3,20);

(%o4) $$\frac{9\cos\left(\frac{20\pi x}{3}\right)}{100\pi^2}-\frac{36\cos\left(\frac{19\pi x}{3}\right)}{361\pi^2}+\frac{\cos(6\pi x)}{9\pi^2}-\frac{36\cos\left(\frac{17\pi x}{3}\right)}{289\pi^2}+\frac{9\cos\left(\frac{16\pi x}{3}\right)}{64\pi^2}-4\ldots$$
$$\frac{9\cos\left(\frac{8\pi x}{3}\right)}{16\pi^2}-\frac{36\cos\left(\frac{7\pi x}{3}\right)}{49\pi^2}+\frac{\cos(2\pi x)}{\pi^2}-\frac{36\cos\left(\frac{5\pi x}{3}\right)}{25\pi^2}+\frac{9\cos\left(\frac{4\pi x}{3}\right)}{4\pi^2}-\frac{4\cos(\pi x)}{\pi^2}+9\,\mathrm{cc}\ldots$$

```
(%i5) wxplot2d([x^2,f20],[x,0,3]);
```

(%t5)



(%o5)

Desarrollo senoidal

```
(%i7) list1:foursin(x^2,x,3);
```

(%t7) $$b_n = \frac{2\left(\frac{54\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{27\cos(\pi n)}{\pi n} + \frac{54\cos(\pi n)}{\pi^3 n^3} - \frac{54}{\pi^3 n^3}\right)}{3}$$

(%o7) [%t7]

```
(%i9) fsin20:fourexpand(list1,x,3,20);
```

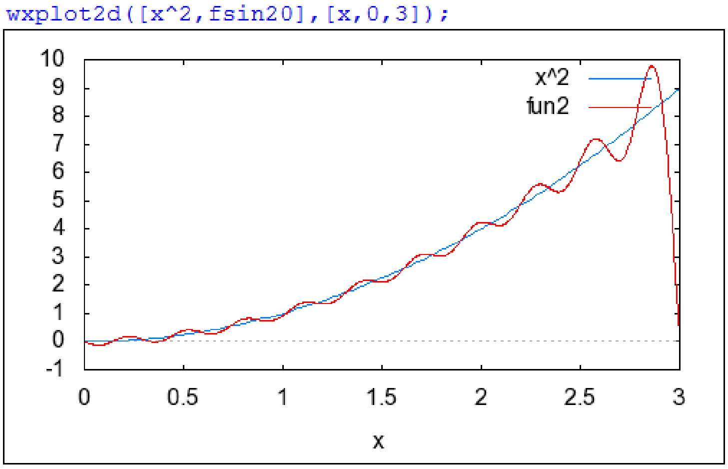
(%o9) $$-\frac{9\sin\left(\frac{20\pi x}{3}\right)}{10\pi} + \frac{2\left(\frac{27}{19\pi} - \frac{108}{6859\pi^3}\right)\sin\left(\frac{19\pi x}{3}\right)}{3} - \frac{\sin(6\pi x)}{\pi} + \frac{2\left(\frac{27}{17\pi} - \frac{108}{4913\pi^3}\right)\text{s.}}{3}$$

$$\frac{3\sin(4\pi x)}{2\pi} + \frac{2\left(\frac{27}{11\pi} - \frac{108}{1331\pi^3}\right)\sin\left(\frac{11\pi x}{3}\right)}{3} - \frac{9\sin\left(\frac{10\pi x}{3}\right)}{5\pi} + \frac{2\left(\frac{3}{\pi} - \frac{4}{27\pi^3}\right)\sin(3\pi x)}{3} - \frac{9\ \text{si}}{}$$

$$\frac{2\left(\frac{9}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}\right)\sin(\pi x)}{3} - \frac{9\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)}{\pi} + \frac{2\left(\frac{27}{\pi} - \frac{108}{\pi^3}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)}{3}$$

```
(%i10) wxplot2d([x^2,fsin20],[x,0,3]);
```

(%t10)



(%o10)

•

Para hallar desarrollos de Fourier de funciones definidas a trozos o que no estén definidas en un intervalo centrado en el origen, aplicaremos las fórmulas que vimos en clases de teoría.

- Calcularemos los coeficientes mediante la orden **integrate**.

Si la función es periódica de periodo 2l, sabemos que:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\tfrac{\pi}{l}xdx \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{sen}\, n\tfrac{\pi}{l}xdx \end{aligned}\right\}$$

Una vez calculados los coeficientes, hallamos la serie de Fourier:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x\right)$$

- Para ello *wxMaxima*, dispone de la instrucción **sum**. Esta orden está en las paletas en el apartado **Análisis,** ir a, **Calcular suma.**

Ejemplo 7

Sea la función $f(x)$, periódica de periodo 2, definida en $[-1,1]$ por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad -1 \le x \le 0 \\ 1-x & si \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

a) Hallar el desarrollo de Fourier de orden 3.
b) Hallar el desarrollo de Fourier de orden 7.
c) Hallar el desarrollo de Fourier de orden 14.
d) Representar en una misma gráfica, en el intervalo $[-1,1]$, la función $f(x)$ y los desarrollos de Fourier hallados.

Solución con wxMaxima:

•

```
Función integrando

(%i1) f1(x):=1;
(%o1) f1(x):=1

(%i2) f2(x):=1-x;
(%o2) f2(x):=1-x

Función definida a trozos

(%i9) f(x):=if x<0 then 1
      else
      if x<=1 then 1-x;
(%o9) f(x):=if x<0 then 1 else if x≤1 then 1-x
```

Cálculo de los coeficientes

```
(%i3) a0:integrate(f1(x), x, -1, 0)+integrate(f2(x), x, 0, 1);
```

(%o3) $\frac{3}{2}$

```
(%i4) a(n):=integrate(f1(x)*cos(n*%pi*x), x, -1, 0)
      +integrate(f2(x)*cos(n*%pi*x), x, 0, 1);
```

(%o4) $a(n):=\int_{-1}^{0} \mathrm{f1}(x)\cos(n\,\pi\,x)dx+\int_{0}^{1}\mathrm{f2}(x)\cos(n\,\pi\,x)dx$

```
(%i5) b(n):=integrate(f1(x)*sin(n*%pi*x), x, -1, 0)
      +integrate(f2(x)*sin(n*%pi*x), x, 0, 1);
```

(%o5) $b(n):=\int_{-1}^{0} \mathrm{f1}(x)\sin(n\,\pi\,x)dx+\int_{0}^{1}\mathrm{f2}(x)\sin(n\,\pi\,x)dx$

Desarrollos de Fourier

```
(%i6) s3:a0/2+sum(a(n)*cos(n*%pi*x)+b(n)*sin(n*%pi*x), n, 1, 3), simpsum;
```

(%o6) $-\frac{\sin(3\pi x)}{3\pi}+\frac{2\cos(3\pi x)}{9\pi^2}+\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}-\frac{\sin(\pi x)}{\pi}+\frac{2\cos(\pi x)}{\pi^2}+\frac{3}{4}$

```
(%i7) s7:a0/2+sum(a(n)*cos(n*%pi*x)+b(n)*sin(n*%pi*x), n, 1, 7), simpsum;
```

(%o7) $-\frac{\sin(7\pi x)}{7\pi}+\frac{2\cos(7\pi x)}{49\pi^2}+\frac{\sin(6\pi x)}{6\pi}-\frac{\sin(5\pi x)}{5\pi}+\frac{2\cos(5\pi x)}{25\pi^2}+\frac{\sin(4\pi x)}{4\pi}-\frac{\sin(3\pi x)}{3\pi}+$ 2 co

```
(%i8) s14:a0/2+sum(a(n)*cos(n*%pi*x)+b(n)*sin(n*%pi*x), n, 1, 14), simpsum;
```

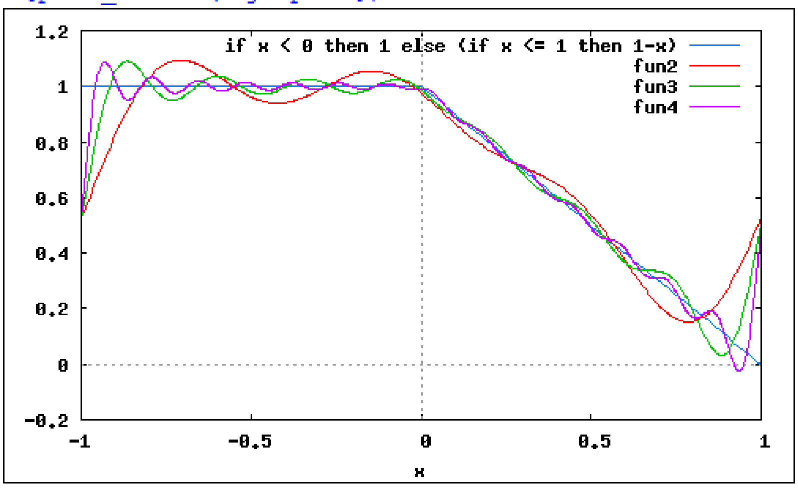
(%o8) $\frac{\sin(14\pi x)}{14\pi}-\frac{\sin(13\pi x)}{13\pi}+\frac{2\cos(13\pi x)}{169\pi^2}+\frac{\sin(12\pi x)}{12\pi}-\frac{\sin(11\pi x)}{11\pi}+\frac{2\cos(11\pi x)}{121\pi^2}+\frac{\sin(10\pi x)}{10\pi}$

$\frac{\sin(5\pi x)}{5\pi}+\frac{2\cos(5\pi x)}{25\pi^2}+\frac{\sin(4\pi x)}{4\pi}-\frac{\sin(3\pi x)}{3\pi}+\frac{2\cos(3\pi x)}{9\pi^2}+\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}-\frac{\sin(\pi x)}{\pi}+\frac{2\cos(\pi x)}{\pi^2}+\frac{3}{4}$

Gráficas

```
(%i10) wxplot2d([f(x),s3,s7,s14], [x,-1,1],
        [plot_format, gnuplot])$
```

(%t10)



•

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.

Dos tanques X e Y contienen 50 litros de agua en la que se han disuelto 3 kilogramos de sal en el tanque X, y 5 kilogramos de sal en el tanque Y. A partir del instante t=0, se empieza a introducir en ambos tanques, a razón de 2 litros por minuto, una mezcla que contiene 100 gramos de sal por litro. Simultáneamente, de cada tanque se bombean 8 litros por minuto, de los que 6 van al otro tanque, y el resto se expulsan al exterior.

Calcúlense las cantidades de sal en función del tiempo, x(t) e y(t), presentes en los tanques X e Y respectivamente y represéntense gráficamente. ¿cuánta sal hay en los tanques al cabo de cinco minutos?

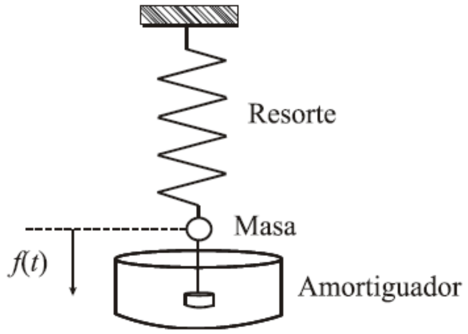
Solución: $\boldsymbol{x(5) = 3.934672282980412,\ y(5) = 4.427866210863625}$

2.

Tres tanques Y_1, Y_2 e Y_3 contienen 25 litros de agua cada uno en los que hay disueltos 1kg, 2kg y 3kg de sal respectivamente. A partir del instante t=0, se empieza a introducir en todos los tanques, a razón de 2 litros por minuto, una mezcla que contiene 100 gramos de sal por litro. Simultáneamente, de cada tanque se bombea 1 litro por minuto, a uno de los otros dos tanques y otro litro por minuto al otro tanque. A su vez de cada tanque se bombean 2 litros por minuto al exterior. Calcúlense las cantidades de sal en función del tiempo, $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y_3(t)$, presentes en los tanques Y_1, Y_2 e Y_3 respectivamente y represéntense gráficamente. ¿cuánta sal hay en los tanques al cabo de cinco minutos?

Solución: $\boldsymbol{y1(5) = 1.796960535,\ y2(5) = 2.16483997, y3(5) = 2.532719418}$

3.



En un resorte sujeto al techo se fija un cuerpo y en el instante $t = 0$ se lleva el cuerpo 20 centímetros por debajo de su posición de equilibrio y se le abandona en esa posición con una velocidad de 1 metro por segundo.

Sabiendo que la ecuación que rige el movimiento del resorte es $ma + kx = f$, siendo $m = 4kg$ la masa, a la aceleración, x el desplazamiento, $k = 100$ la constante elástica del resorte y $f(t) = 8\cos(5t)$ la fuerza externa.

a) Determínese el desplazamiento en función del tiempo y represéntese gráficamente hasta el instante $t = 10seg$.

b) Hállese el desplazamiento y la velocidad al cabo de $5seg$.

(Resuélvase la ecuación diferencial correspondiente mediante la transformada de Laplace)

Solución: $\boldsymbol{x(5) = 0.039418462255367,\ v(5) = 6.05309827125906}$

4.

Sea la función $f(x)$, periódica de periodo 2π, definida en $[-\pi, \pi]$ por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -\pi \leq x \leq 0 \\ x^2 & si \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

a) Hallar los desarrollos de Fourier de orden 5, 12 y 23..
b) Representar en una misma gráfica, en el intervalo $[-\pi, \pi]$, la función $f(x)$ y los desarrollos de Fourier hallados.

5.

Hallar los desarrollos cosenoidal y senoidal, en el intervalo $[0, 1]$, de la función $f(x) = 1 - x^2$.
a) Hallar los desarrollos de Fourier de orden 6, 13 y 20.
b) Representar en una misma gráfica, en el intervalo $[0, 1]$, la función $f(x)$ y los desarrollos de Fourier hallados.