EJERCICIOS TEMA 1
INTEGRALES MÚLTIPLES

INTEGRALES DOBLES

Integrales dobles sobre Rectángulos

Ejercicio 1 *Sea* $R = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. *Demostrar que* $0 \leq \displaystyle\iint_R \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x+y} dxdy \leq \frac{1}{4}$.

Ejercicio 2 *Sea* A *un subconjunto finito de puntos de* R *y sea* $f(x,y)$ *la función* $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$. *Definimos la función* $g : R \to \mathbb{R}$ *como* $g(x,y) = f(x,y)$ *si* $(x,y) \in R - A$ *y* $g(x,y) = K$ *si* $(x,y) \in A$ *donde* K *es un número real dado. Estudiar su integrabilidad.*

Solución: $g(x,y)$ es integrable en R y su integral es la misma que la de la función $f(x,y)$.

Ejercicio 3 *(a) Demostrar que* $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dy\right) dx = \frac{1}{2}$. *(b) Demostrar que, sin embargo,* $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dx\right) dy = -\frac{1}{2}$. *¿Hay alguna contradicción entre estos dos resultados?.*

Solución: No hay contradicción, ya que $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$ es una función no acotada en $(0,1] \times (0,1]$ y por tanto no se puede aplicar el teorema de Fubini.

Ejercicio 4 *Calcular la integral doble* $\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dxdy$ *sobre el rectángulo* $R = [0,2] \times [1,2]$.

Solución: $\frac{22}{3}$.

Ejercicio 5 *(a) Calcular* $\iint_R \cos x \operatorname{sen} y dxdy$, *donde* R *es el cuadrado* $[0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$. *(b) Sea* $R = [0,2] \times [0,3]$. *Calcular* $\iint_R \left(x^2 + 4y\right) dxdy$.

Solución: (a) 1. (b) 44.

Ejercicio 6 *(a) Calcular* $\iint_R \left(x^2 + y\right) dxdy$, *donde* R *es el cuadrado* $[0,1] \times [0,1]$. *(b) Sea* R *el rectángulo* $[-2,1] \times [0,1]$ *y sea* f *definida por* $f(x,y) = y\left(x^3 - 12x\right)$. *Calcular la integral* $\iint_R f(x,y) dxdy$.

Solución: (a) $\frac{5}{6}$. (b) $\frac{57}{8}$.

Ejercicio 7 *(a) Calcular* $\iint_R (2-y) dxdy$ *donde* R *es el rectángulo del plano* xy *cuyos vértices son* $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,2)$ *y* $(0,2)$. *(b) Calcular* $\iint_R x^2 y^5 dxdy$ *donde* R *es el rectángulo* $1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ *por integración iterada, integrando primero respecto de* y, *e integrando primero respecto de* x.

Solución: (a) 6. (b) $\frac{7}{18}$.

Ejercicio 8 *(a) Hallar* $A = \iint_R x^y dxdy$ *siendo* $R = [0,1] \times [0,1]$. *(b) Demostrar que* $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx = \ln 2$.

Solución: (a) $\ln 2$.

Integrales dobles sobre regiones más generales

Ejercicio 9 *Estudiar de qué tipo es la región de integración* D *limitada por el trapecio cuyos vértices son* $A = (1,1)$, $B = (4,1)$, $C = (2,4)$ *y* $D = (3,4)$.

Solución: tipo (II).

Ejercicio 10 *Estudiar de qué tipo es la región de integración D limitada por la circunferencia $x^2+y^2=1$.*

Solución: tipo (III).

Ejercicio 11 *Calcular la integral de la función $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$ en la región acotada por las rectas $x=0, y=3\pi, y=x$.*

Solución: 0.

Ejercicio 12 *Calcular $\iint_D (x^2-y)\,dxdy$ siendo D la región comprendida entre las gráficas de las curvas $y=x^2, y=-x^2$ y las rectas $x=-1$ y $x=1$.*

Solución: $\frac{4}{5}$.

Ejercicio 13 *Hallar $\iint_D xydxdy$ siendo D la región del primer cuadrante encerrada entre las parábolas $y^2=x$ e $y=x^2$.*

Solución: $\frac{1}{12}$.

Ejercicio 14 *Hallar $\iint_D (x^3y+\cos x)\,dxdy$, donde D es el triángulo que consta de los puntos (x,y) tales que $0 \le x \le \pi/2, 0 \le y \le x$.*

Solución: $\frac{\pi^6}{768}+\frac{\pi}{2}-1$.

Ejercicio 15 *Calcular la integral doble de la función $f(x,y)=1+x+y$ extendida al dominio D limitado por las curvas: $y=-x$; $x=\sqrt{y}$; $y=2$.*

Solución: $\frac{44}{15}\sqrt{2}+\frac{5}{3}$.

Inversión del orden de integración en una integral doble

Ejercicio 16 *En la siguiente integral iterada: $\int_0^1 \left(\int_{\frac{y^2}{3}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx\right) dy$, invertir el orden de integración.*

Ejercicio 17 *En la siguiente integral iterada: $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{e^x} f(x,y)dy\right) dx$, invertir el orden de integración.*

Ejercicio 18 *Hallar, invirtiendo el orden de integración, $\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 \frac{dy}{(x+y^2)^{1/2}}\right) dx$.*

Solución: $4(\sqrt{2}-1)$.

Ejercicio 19 *Dibujar la región D del plano que da lugar a las integraciones sucesivas que aparecen en el enunciado y cambiar el orden de integración en cada una de las integrales siguientes: a) $\int_0^1 \left(\int_{x^4}^{x^2} f(x,y)dy\right) dx$; b) $\int_0^1 \left(\int_{-y}^{y} f(x,y)dx\right) dy$; c) $\int_1^4 \left(\int_x^{2x} f(x,y)dy\right) dx$.*

Cambio de variables en integrales dobles

Ejercicio 20 *Calcular la integral $\iint_D \frac{1}{x^3}dxdy$ siendo $D \subset \mathbb{R}^2$ la región del primer cuadrante limitada por las parábolas: $y=x^2$; $y=2x^2$; $y^2=x$; $y^2=2x$.*

Solución: $\frac{1}{3}\ln 2$.

Ejercicio 21 *Calcular $\iint_D xdxdy$ siendo $D \subset \mathbb{R}^2$ el dominio limitado por las rectas: $x+y=2$; $x+y=3$; $y=x$; $y=2x$.*

Solución: $\frac{95}{216}$.

Ejercicio 22 *Calcular* $\iint_D \sqrt{1-(x+y)^2}\cdot(x+y)\,dxdy$ *siendo* $D\subset\mathbb{R}^2$ *el dominio limitado por:* $x+y=1$; $x+y=0$; $x-y=1$; $x-y=0$.

Solución: $\frac{1}{6}$.

Ejercicio 23 *Calcular la integral* $\iint_D x^3ydxdy$ *siendo* $D\subset\mathbb{R}^2$ *el dominio del 1^er^ cuadrante limitado por las curvas:* $y=x^2$; $y=x^2+1$; $y=2-x^2$; $y=3-x^2$.

Solución: $\frac{3}{8}$.

Ejercicio 24 *Calcular* $\iint_D \frac{(x-y)}{[2-(x+y)]^2}dxdy$ *siendo* D *el dominio limitado por:* $x-y=0$; $x+y=0$; $x=1$.

Solución: $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 25 *Sea* D *el paralelogramo limitado por las rectas* $y=-x$; $y=-x+1$; $y=2x$; $y=2x-3$. *Hallar* $\iint_D (x+y)^2\,dxdy$.

Solución: $\frac{1}{3}$.

Ejercicio 26 *Calcular* $\iint_D \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^4 dydx$*, donde* D *es la región triangular del plano limitada por la recta* $x+y=1$ *y los ejes coordenados.*

Solución: $\frac{1}{10}$.

Ejercicio 27 ♦ *Integrar la función constante* $f(x,y)=1$ *extendida a la región limitada por la curva* $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$ *en el primer cuadrante* (a,b,h,k *son números reales positivos). Nota: se sugiere el cambio de variables:* $x=ar\cos^2\theta$, $y=br\,\mathrm{sen}^2\,\theta$.

Solución: $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$.

El cambio a coordenadas polares

Ejercicio 28 *Sea la integral* $\iint_D xdxdy$ *siendo* $D\subset\mathbb{R}^2$ *el dominio del 1^er^ cuadrante limitado por las curvas:* $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=4$. *(a) Plantearla en cartesianas integrando primero la y. (b) Plantearla en cartesianas integrando primero la x. (c) Calcular sólo una de ellas. (d) Comprobar el resultado mediante el cambio a coordenadas polares.*

Solución: $\frac{7}{3}$.

Ejercicio 29 *Calcular la integral de la función* $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$ *sobre la región limitada por la circunferencia unitaria* $x^2+y^2=1$.

Solución: $\pi(2\ln 2-1)$.

Ejercicio 30 *Calcular* $\iint_D \left(x^2+y^2+1\right)dxdy$*, donde* D *es la región interior a la circunferencia* $x^2+y^2=4$.

Solución: 12π.

Ejercicio 31 *Calcular la integral doble extendida a la región* D, $I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ *siendo* D *la región del plano limitada por las curvas:* $x^2+y^2=4; x^2+y^2=9$.

Solución: $\frac{38}{3}\pi$.

Ejercicio 32 *Dada la integral* $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$*, siendo* $D\subset\mathbb{R}^2$ *el dominio del 1^er^ cuadrante limitado por las curvas:* $y=x$; $y=x^2$*, (a) Plantearla en cartesianas. (b) Calcularla mediante el cambio a coordenadas polares.*

Solución: $\sqrt{2}-1$.

Ejercicio 33 *Calcular la integral doble* $\iint_D xdxdy$ *donde* D *es la región limitada por las rectas* $y = x$; $x = 0$ *y por la circunferencia* $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Solución: $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 34 *Calcular la integral* $\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ *siendo* $D \subset \mathbb{R}^2$ *el dominio limitado por las curvas* $y = x$; $x^2 - x + y^2 = 0$. *Nota: De los dos posibles dominios debe tomarse el más pequeño.*

Solución: $\frac{1}{160\sqrt{2}}$.

Ejercicio 35 *Calcular* $\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$ *siendo* $D \subset \mathbb{R}^2$ *el dominio del* 1^{er} *cuadrante limitado por la circunferencia* $x^2 + y^2 = 2x$ *y las rectas* $y = x$; $x = 2$.

Solución: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Ejercicio 36 *Calcular* $\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}dxdy$ *siendo* $D \subset \mathbb{R}^2$ *el dominio limitado en el* 1^{er} *cuadrante por las tres curvas siguientes:* $x^2 + y^2 = 2$; $x = 1$; $y = 0$.

Solución: $\frac{1}{4}$.

Ejercicio 37 *Calcular la integral doble* $\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$ *siendo* D *el segmento circular limitado en el primer cuadrante por* $x^2 + y^2 = 4$; $x + y = 2$.

Solución: $4 - \pi$.

Ejercicio 38 *Hallar* $\iint_D \left(1 + x^2 + y^2\right)^{-\frac{3}{2}} dxdy$ *donde* D *es el triángulo de vértices* $(0, 0)$, $(1, 0)$ *y* $(1, 1)$.

Solución: $\frac{\pi}{12}$.

Ejercicio 39 *Calcular la integral de la función* $f(x, y) = 1$ *sobre el anillo elíptico limitado por las elipses* $x^2 + 4y^2 = 4, x^2 + 4y^2 = 16$.

Solución: (a) $\frac{\pi}{12}$. (b) 6π.

Ejercicio 40 *Plantear la integral* $\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^2}$, *(a) en coordenadas cartesianas y (b) en coordenadas polares, siendo* D *el triángulo de vértices* $(0, 0)$; $\left(1, \sqrt{3}\right)$; $(2, 0)$.

Las simetrías del recinto y la paridad de la función

Ejercicio 41 *Calcular, teniendo en cuenta las simetrías,* $\iint_D \frac{x^3 \operatorname{sen}^2 y}{x^2+1+tg^2 y}dxdy$ *siendo* $D = \{(x, y)/ |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

Solución: 0.

Ejercicio 42 *Calcular, teniendo en cuenta las simetrías,* $\iint_D x^2dxdy$ *siendo* D *el recinto limitado por las rectas* $y = x, y = -x$ *y* $x = 1$.

Solución: $\frac{1}{2}$.

INTEGRALES TRIPLES

La integral triple sobre un paralelepípedo

Ejercicio 43 *Demostrar que* $0 \leq \iiint_B \left(x^2 + y^2 + z\right) dxdydz \leq 48$ *siendo* $B = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3] \subset \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 44 *Calcular la integral triple* $\iiint_B \frac{z^2y-zx^2-zx^4}{1+x^2}dxdydz$ *siendo* $B = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Solución: $\frac{\pi-4}{24}$.

La integral triple sobre regiones más generales

Ejercicio 45 *En la integral iterada* $\int_0^1 \left(\int_0^y \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \right) dx \right) dy$*, sin calcularla, describir el dominio de integración* Ω *, y plantearla en el nuevo orden* z, y, x*.*

Solución: $\int_0^1 \left(\int_x^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \right) dy \right) dx$.

Ejercicio 46 *En la integral iterada* $\int_0^4 \left(\int_0^{\frac{4-x}{2}} \left(\int_0^{\frac{12-3x-6y}{4}} dz \right) dy \right) dx$*, sin calcularla, describir el dominio de integración* Ω*, y plantearla en el nuevo orden* y, x, z*.*

Solución: $\int_0^3 \left(\int_0^{\frac{12-4z}{3}} \left(\int_0^{\frac{12-3x-4z}{6}} dy \right) dx \right) dz$.

Ejercicio 47 *Plantear (sin calcular) la integral triple que determina el volumen del sólido* S *limitado superiormente por la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *e inferiormente por el plano* $y + z = 2$*.*

Solución: $V = 2 \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4y-2y^2}} \left(\int_{2-y}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \right) dx \right) dy$.

Ejercicio 48 *Siendo* $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x + y \right\}$ *y siendo* $f(x, y, z) = xy + 2z$*, calcular* $\iiint_\Omega f(x, y, z) dxdydz$*.*

Solución: $\frac{44}{3}$.

Ejercicio 49 *Sea* $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^2$ *una función continua en* $\mathbb{R}^3$*. Calcular la integral triple de* f *en la región* Ω *de* $\mathbb{R}^3$ *limitada por los planos coordenados y el plano* $x + y + z = 1$*.*

Solución: $\frac{5}{12}$.

Ejercicio 50 *Hallar* $\iiint_\Omega yzdxdydz$ *donde* Ω *es el recinto limitado por los planos coordenados y los planos* $x + y = 1$ *y* $z = 4$*.*

Solución: $\frac{4}{3}$.

Ejercicio 51 *Calcular la integral triple extendida a* Ω*,* $I = \iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$ *siendo* Ω *el dominio limitado por los planos de coordenadas y el plano* $x + y + z = 1$*.*

Solución: $\frac{3}{16} - \ln \sqrt{2}$.

Ejercicio 52 *Calcular, mediante una integral triple, el volumen del cuerpo limitado por los planos:* $x + z = 1$*;* $x - z = -1$*;* $y = -1$*;* $y = 1$*;* $z = 0$*.*

Solución: 2.

Ejercicio 53 *Hallar el volumen del sólido limitado por arriba por el plano* $z = y$ *y por abajo por el plano* xy *sobre el cuadrante de círculo* $x^2 + y^2 \leq 1$ *con* $x \geq 0$ *e* $y \geq 0$*.*

Solución: $\frac{1}{3}$.

Cambio de variables a coordenadas cilíndricas

Ejercicio 54 *Calcular* $\iiint_\Omega xdxdydz$ *siendo* Ω *la región acotada por los planos:* $x = 0, y = 0, z = 2$ *y la superficie:* $z = x^2 + y^2, (x \geq 0, y \geq 0)$*.*

Solución: $\frac{\pi}{2} \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{5} \right)$.

Ejercicio 55 *Calcular la integral* $\iiint_\Omega y^2 dxdydz$ *siendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *la región limitada por las superficies:* $1 = x^2 + y^2$; $z = 2 - (x^2 + y^2)$; $z = (x^2 + y^2) - 1$.

Solución: $\frac{5\pi}{12}$.

Ejercicio 56 *Calcular* $\iiint_\Omega zdxdydz$ *siendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *la región del primer octante limitada por los cilindros:* $x^2 + y^2 = 2$; $x^2 + z^2 = 2$.

Solución: $\frac{3\pi}{8}$.

Ejercicio 57 *Calcular la integral* $\iiint_\Omega zdxdydz$ *siendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *la región del 1^er^ octante limitada por las superficies:* $2y + z = 4$; $x^2 + y^2 = 4$.

Solución: $6\pi - \frac{64}{3}$.

Ejercicio 58 *Calcular* $\iiint_\Omega y^2 dxdydz$ *siendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *el dominio limitado por las superficies:* $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 0$; $x^2 + y^2 = 2$.

Solución: $\pi\left(2 - \frac{4\sqrt{2}}{5}\right)$.

Ejercicio 59 *Calcular* $\iiint_\Omega x^2 dxdydz$ *siendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *el dominio limitado por las superficies:* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 6 - (x^2 + y^2)$.

Solución: $\frac{104}{15}\pi$.

Ejercicio 60 *Calcular* $\iiint_\Omega y^2 xdxdydz$ *siendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *la región limitada en el 1^er^ octante por las superficies:* $z = \frac{5}{4} - 2\sqrt{x^2 + y^2}$; $z = (x^2 + y^2)$.

Solución: $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{2^5} - \frac{1}{3}\frac{1}{2^6} - \frac{1}{7}\frac{1}{2^7}\right)$.

Ejercicio 61 *Calcular* $\iiint_\Omega x^2 zdxdydz$ *siendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *la región limitada por las superficies:* $x^2 + y^2 + z^2 = 3$; $2z = x^2 + y^2$.

Solución: $\frac{7}{12}\pi$.

Ejercicio 62 *Calcular la integral triple de la función* $f(x, y, z) = 1 + (x^2 + y^2)^2$ *sobre la región* Ω *limitada por el cono* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *y el plano* $z = 2$.

Solución: $\frac{92}{21}\pi$.

Ejercicio 63 *Calcular* $\iiint_\Omega zdxdydz$ *con* $\Omega = \left\{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; x^2 + y^2 \leq z\right\}$. *Solución:* $\pi(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2 - \frac{1}{3}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^3)$.

Ejercicio 64 ♦ *Calcular la integral triple de la función* $f(x, y, z) = 1$ *sobre la región* Ω *limitada por los paraboloides* $z = x^2 + y^2, z = 4x^2 + 4y^2$, *el cilindro* $y = x^2$ *y el plano* $y = 3x$.

Solución: $\frac{9477}{35}$.

Ejercicio 65 *Hallar* $\iiint_\Omega dxdydz$ *siendo el recinto* $\Omega = \left\{(x, y, z)/0 \leq z \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$.

Solución: 3π.

Ejercicio 66 *Calcular* $\iiint_\Omega (z^2 + 1)dxdydz$ *siendo* Ω *el sólido limitado por el paraboloide* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ *y el plano* $z = 4$.

Solución: $144\pi ab$.

Ejercicio 67 ♦ *Calcular la integral triple de la función* $f(x, y, z) = k\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + 1$ *sobre la región* Ω *de* $\mathbb{R}^3$ *limitada por la superficie:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1$.

Solución: $4\pi abc\left(\frac{8k+18}{45}\right)$.

Cambio de variables a coordenadas esféricas

Ejercicio 68 *Calcular* $I = \iiint_{\Omega} xyz dxdydz$ *siendo* Ω *la región de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ *contenida en el primer octante.*

Solución: $\frac{243}{16}$.

Ejercicio 69 *Siendo* $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}$, *calcular* $\iiint_{\Omega} z dxdydz$

Solución: $\frac{81}{16}\pi$.

Ejercicio 70 *Calcular* $I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$ *siendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *el cuerpo limitado en el primer octante por las superficies:* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Solución: $\frac{65}{32}\pi^2$.

Ejercicio 71 *Calcular* $\iiint_{\Omega} x dxdydz$ *siendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *la región del* 1^{er} *octante limitada por:* $x = 0$; $z = 0$; $y = x$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución: $\frac{(2-\sqrt{2})}{32}\pi$.

Ejercicio 72 *Calcular* $\iiint_{\Omega} \frac{x}{y} dxdydz$ *siendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *el dominio del* 1^{er} *octante limitado por las superficies:* $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; $x = 0$; $y = \sqrt{3}x$.

Solución: $-\frac{2\sqrt{2}}{3} \ln \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ejercicio 73 *Calcular* $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dxdydz$ *siendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *el dominio limitado por las superficies:* $x^2 + y^2 + z^2 = 3$; $y = x$; $y = -x$; $z = 0$ *considerando sólo la zona donde:* $y \geq 0, z \geq 0$.

Solución: $\frac{\pi}{6}\left(e^{3\sqrt{3}} - 1\right)$.

Ejercicio 74 *Calcular* $\iiint_{\Omega} z dxdydz$ *con* $z \geq 0$ *siendo* $\Omega = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; x^2 + y^2 \leq z^2\}$.

Solución: $\frac{\pi}{8}$.

Ejercicio 75 *Calcular* $\iiint_{\Omega} \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2} dxdydz$ *siendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *la región limitada por las superficies:* $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{2}\right)^2 = 1$; $z = 0$ *con* $z \geq 0$.

Solución: $3\pi^2$.

Ejercicio 76 *Calcular el volumen de la región* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *limitada por las superficies:* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución: $\frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ejercicio 77 ♦ *Dados los dos elipsoides* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ *y* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z-c)^2}{c^2} = 1$ *calcular el volumen limitado por ellos.*

Solución: $\frac{5}{12}\pi abc$.

Las simetrías del recinto y la paridad de la función

Ejercicio 78 *Hallar* $\iiint_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) xyz dxdydz$ *siendo* Ω *el interior de la superficie esférica* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solución: 0.

Ejercicio 79 ♦ *Calcular el volumen encerrado por la superficie* $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = x^2 + y^2 - z^2$.

Solución: $\frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}$.

APLICACIONES

Volúmenes de cuerpos en el espacio

Ejercicio 80 *Calcular el volumen de la parte del cilindro:* $x^2 + y^2 = b^2$ *comprendida entre los planos:* $y + z = a^2; z = 0$.

Solución: $\pi a^2 b^2$.

Ejercicio 81 *Calcular el volumen de la región limitada por* $z = x + y; z = 6; x = 0; y = 0; z = 0$.

Solución: 36.

Ejercicio 82 *Calcular el volumen acotado inferiormente por el plano* $z = 0$*, superiormente por el paraboloide* $z = 2 + (x^2 + y^2)$ *y lateralmente por los cilindros* $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9$.

Solución: 56π.

Ejercicio 83 *Calcular el volumen del sólido limitado por la superficie* $z = e^{x-y}\cos(x + y)$*, el plano xy y los 4 planos verticales* $y = \pm x \pm \frac{\pi}{2}$*. Fijarse que* $f(x, y) \geq 0$.

Solución: $e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}$.

Ejercicio 84 *Calcular el volumen de la parte de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ *exterior al cono* $z^2 = x^2 + y^2$.

Solución: $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.

Ejercicio 85 *Hallar el volumen, en el primer octante, de la región común a los cilindros* $x^2 + y^2 = a^2$ *y* $x^2 + z^2 = a^2$.

Solución: $\frac{2a^3}{3}$.

Ejercicio 86 ♦ *Calcular el volumen de la parte del cilindro* $x^2 + y^2 = 2ax$*, comprendido entre el paraboloide* $x^2 + y^2 = 2az$ *y el plano xy.*

Solución: $\frac{3\pi a^3}{4}$.

Ejercicio 87 *Calcular el volumen del cuerpo limitado por el cilindro* $z = 5 - 2x^2$*, los planos coordenados y el plano* $2x + y = 1$.

Solución: $\frac{59}{48}$.

Áreas de figuras planas

Ejercicio 88 *Calcular, mediante una integral doble, el área delimitada por las curvas:* $y = 2 - x^2$; $y = x$.

Solución: $\frac{27}{6}$.

Ejercicio 89 *Hallar, mediante una integral doble, el área de la región D entre las curvas* $y = \cos x$ *e* $y = \operatorname{sen} x$ *sobre el intervalo* $0 \leq x \leq \pi/4$.

Solución: $\sqrt{2} - 1$.

Ejercicio 90 *Calcular, mediante una integral doble, el área comprendida entre las circunferencias* $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 4y$ *y las rectas* $y = x$, $x = 0$.

Solución: $3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$.

Ejercicio 91 *Hallar, mediante una integral doble, el área limitada en el primer cuadrante por las circunferencias:* $x^2 - 2x + y^2 = 0$; $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Solución: $2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$.

Ejercicio 92 *Hallar, mediante una integral doble, el área del dominio* $D \subset \mathbb{R}^2$ *limitado por las curvas:* $y = x^2$; $y = 2x^2$; $xy = 1$; $xy = 3$.

Solución: $\frac{2}{3}\ln 2$.

Ejercicio 93 *Hallar, mediante una integral doble, el área del dominio* $D \subset \mathbb{R}^2$, *perteneciente al primer cuadrante, limitado por las circunferencias:* $x^2 + y^2 - 2y = 0$; $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

Solución: $\frac{3\pi}{2}$.

Masa, centro de masa y momentos de figuras planas

Ejercicio 94 *Determinar la masa de un disco circular de radio* a *si la densidad en cualquier punto es inversamente proporcional a la distancia entre ese punto y el centro.*

Solución: $2\pi ka$.

Ejercicio 95 *Obtener el centro de masa de un cuerpo homogéneo en forma de semicírculo de radio* r_0.

Solución: $\left(0, \frac{4r_0}{3\pi}\right)$.

Ejercicio 96 *Calcular el momento estático de un círculo homogéneo (de densidad* μ_0*) de radio* r_0 *respecto de una recta tangente a él.*

Solución: $\pi r_0^3 \mu_0$.

Ejercicio 97 *Hallar el centro de masa de un cuerpo en forma de semicírculo de radio* 1, *no homogéneo, cuya densidad en el punto* (x, y) *es proporcional al cuadrado de la distancia de este punto al punto* $(0, -1)$ *y en el origen vale* 1 gr/cm^2.

Solución: $x_c = 0; y_c = \frac{\frac{1}{4}\pi + \frac{16}{15}}{\frac{3}{4}\pi + \frac{4}{3}}$.

Ejercicio 98 *Una lámina está limitada por las curvas* $y^2 = x, y^2 = 2x, xy = 1, xy = 3$ *y su densidad en cada punto es proporcional al producto de sus coordenadas. Calcular su masa.*

Solución: $\frac{4}{3}\ln 2$.

Ejercicio 99 *Calcular el momento de inercia de un círculo, de radio* R, *con respecto a su centro, siendo* 1 *la densidad superficial.*

Solución: $\frac{\pi R^4}{2}$.

Ejercicio 100 *Hallar el momento de inercia respecto al origen de la región del plano* xy *limitado por* $x^2 + y^2 = 1, x^2 - y^2 = 9, xy = 2, xy = 4$, *suponiendo la densidad unitaria.*

Solución: 8.

Masa, centro de masa y momentos de cuerpos en el espacio

Ejercicio 101 *Hallar el momento de inercia alrededor del eje* z *del tetraedro sólido* S *de vértices* $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$ *y* $(0,0,1)$ *y densidad* $d(x,y,z) = x$.

Solución: $\frac{1}{90}$.

Ejercicio 102 *Calcular el momento de inercia de un cilindro circular recto de radio R y altura $2h$ respecto a un diámetro de su sección media. La densidad es constante e igual a γ_0.*

Solución: $\frac{\gamma_0 h\pi R^4}{2} + \frac{2}{3}\gamma_0 h^3 \pi R^2$.

Ejercicio 103 *Hallar el c.d.g del sólido $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ con $z \geq 0$, siendo la densidad en un punto su distancia al plano xy.*

Solución: $x_c = 0; y_c = 0; z_c = \frac{8}{15}c$.

Ejercicio 104 *Hallar la masa del cuerpo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado por las superficies: $z = \sqrt{x^2+y^2}$; $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ siendo su densidad en cada punto $\mu(x,y,z) = z$.*

Solución: $\frac{2\pi}{3}$.

Ejercicio 105 *Hallar el momento de inercia repecto al eje y del cuerpo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado por las superficies: $y = x^2 + z^2$; $y = 4$ siendo su densidad constante en cada punto $\mu(x,y,z) = k$.*

Solución: $\frac{32k\pi}{3}$.

Ejercicio 106 *Calcular el momento de inercia de un cubo homogéneo de densidad μ_0, de lado a, respecto de una de sus aristas.*

Solución: $\frac{2}{3}\mu_0 a^5$.

Ejercicio 107 *Consideremos el tetraedro sólido que tiene por vértices: $(0,0,0)\,,\,(1,0,0)\,,\,(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ (es decir, que está debajo del plano $x+y+z=1$) y densidad constante $\mu = 6$. Hallar su centro de gravedad.*

Solución: $x_G = y_G = z_G = \frac{1}{4}$.

Ejercicio 108 *Un sólido homogéneo Ω con $\mu = 1$ está acotado inferiormente por el plano xy, lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2, (a > 0)$ y superiormente por la superficie $z = x^2 + y^2$. Hallar su centro de gravedad.*

Solución: $x_G = y_G = 0$, $z_G = \frac{a^2}{3}$.

Valor medio de una función

Ejercicio 109 *La temperatura de una placa es proporcional a su distancia al origen. Dicha placa se encuentra situada en la región $D = \left\{(x,y)/x^2 + y^2 \leq 25\right\}$. Sabiendo que en el punto $(1,0)$ su temperatura es $100°C$, hallar la temperatura media de dicha placa.*

Solución: $T_M \simeq 333,3°C$.

Ejercicio 110 *Calcular el valor medio de la función $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ en el círculo $x^2+y^2 \leq a^2$, determinando los puntos en los que se alcanza.*

Solución: El valor medio $\frac{2a}{3}$ se alcanza en $x^2 + y^2 = \frac{5}{9}a^2$.

Ejercicio 111 ♦ *Consideremos un cuerpo en $\mathbb{R}^3$ que ocupa la región Ω limitada por la superficie $x^2 + y^2 = \left(x^2+y^2+z^2\right)^2$. Sea $\mu : \Omega \to \mathbb{R}, \mu(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}$ la densidad del cuerpo en el punto $(x,y,z) \in \Omega$. Calcular la densidad media del cuerpo.*

Solución: $\frac{128}{105\pi}$.

Ejercicio 112 *Calcular el valor medio del cuadrado de la distancia al origen de los puntos del círculo de centro (a,b) y de radio K.*

Solución: $\pi(a^2+b^2)k^2 + \frac{\pi}{2}k^4$.

Ejercicio 113 ♦ *Hallar el valor medio integral de la función $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$ en la esfera Ω delimitada por el conjunto $\left\{(x,y,z)/x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$.*

Solución: $\frac{2'13136\,\frac{\pi}{2}}{\frac{4}{3}\pi}$.