# EJERCICIOS TEMA 2
# INTEGRALES DE LÍNEA Y DE SUPERFICIE
# TEORÍA VECTORIAL DE CAMPOS

## INTEGRALES DE LÍNEA

### Parametrizaciones de curvas

**Ejercicio 1** *Hallar unas ecuaciones paramétricas de la curva intersección del cilindro* $x^2 + y^2 = a^2$, *y el plano* $z = 0$.

*Solución*: $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = 0$ para $0 \leq t < 2\pi$.

**Ejercicio 2** *Sea la curva* $x = t^2 - 1, y = t^3 - t, z = \operatorname{sen} \pi t$ *con* $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. *Comprobar que el punto* $(0,0,0)$ *es múltiple con* $\overline{\sigma}(t_1) = \overline{\sigma}(t_2)$ *para* $t_1 = -1$, $t_2 = 1$. *Hallar las dos rectas tangentes a la curva en* $(0,0,0)$.

*Solución*: La rectas tangentes son $\frac{x}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-\pi}$ y $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-\pi}$.

**Ejercicio 3** *Sea la curva* $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, z = \operatorname{tg} t$ *para* $0 < t < \frac{\pi}{2}$. *Hallar las nuevas ecuaciones paramétricas de la curva si se efectúa una reparametrización haciendo* $\operatorname{tg} t = s$.

*Solución*: $x = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}; y = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}; z = s$; $s \in (0, \infty)$.

### Integrales de línea de funciones escalares

**Ejercicio 4** *Calcular la longitud de una espira de la hélice circular* $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$, *para* $t \in [0, 2\pi]$.

*Solución*: $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

**Ejercicio 5** *Calcular la longitud de la curva dada por la parametrización* $\overline{\sigma}(t) = (t,\ \frac{4}{3}t^{3/2},\ \frac{1}{2}t)$, $t \in [0, 2]$.

*Solución*: $\frac{1}{48}\left(37\sqrt{37} - 5\sqrt{5}\right)$.

**Ejercicio 6** *Calcular* $\int_C z ds$ *donde* $C$ *es la curva dada por la parametrización* $\overline{\sigma}(t) = (t\cos t, t \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

*Solución*: $\frac{1}{3}\left(\sqrt{(2 + 4\pi^2)^3} - 2\sqrt{2}\right)$.

**Ejercicio 7** *Demostrar que* $\int_C y^2 ds = 216 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^5 \frac{t}{2} dt$ *donde* $C$ *es la curva dada por la parametrización* $\overline{\sigma}(t) = 3(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

**Ejercicio 8** *Calcular* $\int_C (x + y) ds$ *siendo* $C$ *un triángulo de vértices* $(0,0)$, $(1,0)$ *y* $(0,1)$: *(a) tomando en los tres lados* $x$ *como parámetro; (b) considerando en la hipotenusa* $y$ *como parámetro y considerando en el lado vertical la parametrización* $\overline{\sigma}(t) = (0, 1 - t)$.

*Solución*: $1 + \sqrt{2}$.

**Ejercicio 9** *Calcular* $\int_C (|x| + |y|) ds$ *siendo* $C$ *una circunferencia de radio* $a$ *centrada en el origen.*

*Solución*: $8a^2$.

**Ejercicio 10** ♦ *La ecuación de una curva es* $y^2 = x^3$. *Calcular la longitud del arco que une* $(1, -1)$ *a* $(1, 1)$.

*Solución*: $\frac{1}{27}\left(26\sqrt{13} - 16\right)$ .

**Ejercicio 11** *Hallar la longitud de la curva dada por la intersección de las superficies:* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $y + z = 2$.

*Solución*: $2\sqrt{2}\pi$.

## Integrales de línea de funciones vectoriales

**Ejercicio 12** *Calcular la integral de línea del campo vectorial* $\overline{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ *a lo largo de la curva* $C : \overline{\sigma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

*Solución*: $2\pi^2$.

**Ejercicio 13** *Calcular la integral de línea del campo vectorial* $\overline{F}(x, y, z) = (-y, x, z^2)$ *a lo largo de la curva C: la parábola* $y = x^2, z = 3$ *desde* $x = 1$ *hasta* $x = 2$.

*Solución*: $\frac{7}{3}$.

**Ejercicio 14** *Sea* $\overline{F}(x, y) = (x^2, y^2)$ *y* $C$ *la mitad superior de la elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Calcular* $\int_C \overline{F} \cdot \overline{ds}$, *en donde* $C$ *se recorre desde* $(-a, 0)$ *a* $(a, 0)$.

*Solución*: $\frac{2}{3}a^3$.

**Ejercicio 15** *Calcular la integral de línea* $\int_\sigma xdx + ydy + zdz$ *a lo largo del arco de hélice* $\overline{\sigma}$ *de ecuaciones paramétricas* $x = 4\cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$, $z = 3t$, *para* $0 \leq t \leq 2\pi$.

*Solución*: $18\pi^2$.

**Ejercicio 16** *Hallar la integral de línea del campo* $\overline{F}(x, y, z) = \left(x^2 + x, zy^2, xz^2\right)$, *a lo largo de la curva intersección de las superficies:* $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6, 3z = x^2 + 2y^2$.

*Solución*: 0.

**Ejercicio 17** ♦ *Calcular la integral de línea* $\int_C 2yz^2dx + xz^2dy + 3xyzdz$ *siendo* $C$ *la curva formada por los siguientes arcos de curva:*

$$\begin{aligned} C_1 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y = 0, x \geq 0, z \geq 0\right\} \\ C_2 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 - ax = 0, y \geq 0, x \geq 0, z \geq 0\right\} \end{aligned}$$

*orientada positivamente.*

*Solución*: $\frac{a^4\pi}{32}$.

**Ejercicio 18** *Calcular la integral* $I = \int_{(1,0)}^{(-1,0)} (x^3 - y^3)dy$ *a lo largo del semicírculo:* $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Solución: $\frac{3\pi}{8}$.

**Ejercicio 19** *Calcular* $I = \oint_{C^+} y^2dx + x^2dy$ *donde* $C$ *es el triángulo de vértices* $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

Solución: $\frac{1}{3}$.

**Ejercicio 20** *Calcular la integral* $I = \int_{(2,0)}^{(0,3)} (x - 2y)dx + y^2dy$ *a lo largo: a) De un cuadrante de la elipse* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. *b) De la poligonal de vértices* $(2, 0)$ , $(0, 0)$ , $(0, 3)$ . *c) El segmento rectilíneo que une ambos puntos.*

Solución: a) $7 + 3\pi$. b) 7. c) 13.

**Ejercicio 21** *Calcular la integral de línea* $I = \oint_{C^+} xy^2 dy - yx^2 dx$ *siendo* $C : x^2 + y^2 = a^2$.

Solución: $\frac{\pi a^4}{2}$.

**Ejercicio 22** *Calcular el trabajo efectuado por la fuerza* $\overline{F}$ *de componentes* $(y, a)$ *que actúa sobre una masa m que se mueve sobre el contorno formado por los semiejes coordenados y el primer cuadrante de la elipse* $x = a\cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$.

Solución: $\pm\frac{1}{4}\pi ab$ (según el sentido de recorrido).

**Ejercicio 23** *Sea C la intersección de la superficie esférica de centro* 0 *y radio R con el plano* $y + z = R$. *Calcular la integral de línea a lo largo de* $C : \int_C ydx + zdy + xdz$ *recorrida en sentido horario visto desde el origen de coordenadas.*

Solución: $-\frac{\pi R^2}{\sqrt{2}}$.

**Ejercicio 24** *Calcular la circulación del vector* $\overline{F} = y\overline{i} - z\overline{j} + x\overline{k}$ *a lo largo de la elipse C, intersección del elipsoide* $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + z^2 = a^2$ *con el plano* $y = x$ *(sentido de recorrido: subiendo por el primer octante).*

Solución: $2\pi a^2$.

**Ejercicio 25** *Calcular* $\oint_C ydx + zdy + xdz$ *siendo C la circunferencia* $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y = 1\}$ *(sentido antihorario visto desde el origen de coordenadas).*

Solución: $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

**Ejercicio 26** *Calcular la integral de línea* $\int_C \overline{F}.\overline{ds}$ *siendo* $\overline{F} = (0, x, 0)$ *y siendo C la curva intersección de* $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$; $y + z = 2$ *recorrida de forma que se suba por el primer octante.*

Solución: $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

**Ejercicio 27** *Calcular la integral de línea* $\int_C xdx + ydy + xdz$ *siendo C la curva de* $\mathbb{R}^3$ *dada por la intersección de las superficies* $z = 1 - (x^2 + y^2)$; $y + z = 1$ *recorriendo C de forma que "subamos"por el primer octante.*

Solución: $\frac{\pi}{4}$.

**Ejercicio 28** ♦ *Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas* $\overline{F}(x, y, z) = y^2\overline{i} + z^2\overline{j} + x^2\overline{k}$ *a lo largo de la curva intersección de la esfera:* $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ *y el cilindro* $x^2 + y^2 = \sqrt{3}x$, *siendo* $z \geq 0$.

Solución: $\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi$ (según el sentido en el que se recorre la curva).

**Ejercicio 29** ♦ *Calcular la integral de línea* $\int_C (y^2 + z^2)\, dx + (z^2 + x^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz$ *siendo C la intersección de* $x^2 + y^2 + z^2 = 4ax$ *con* $x^2 + y^2 = 2ax$ $(a > 0)$ *por encima del plano Oxy, recorrida en sentido de las agujas del reloj, mirando desde el eje* $(2a, 0, 0)$.

Solución: $-4\pi a^3$.

# INTEGRALES DE SUPERFICIE

### Parametrizaciones de superficies

**Ejercicio 30** *Hallar la ecuación implícita de la superficie de ecuaciones paramétricas* $x = au\cos v$, $y = au \operatorname{sen} v$, $z = bu$, *para* $-\infty < u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$.

*Solución*: $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$, o sea un cono de base circular y vértice en el origen.

**Ejercicio 31** *Hallar la ecuación explícita de la superficie de ecuaciones paramétricas* $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u^2 - v^2$, *para* $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$.

*Solución*: $z = xy$.

**Ejercicio 32** *Hallar el plano tangente a la superficie* $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u^2 - v^2$ *en el punto* $(2, 0, 0)$.

*Solución:* $2y - z = 0$.

**Ejercicio 33** *Hallar el plano tangente al paraboloide* $z = x^2 + y^2$ *en el origen de coordenadas.*

*Solución:* $z = 0$.

**Ejercicio 34** *Consideremos la parametrización de superficie dada por* $\overline{T} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*:* $\overline{T}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ *con* $D = \left\{(u, v) / u^2 + v^2 \leq 1\right\}$*. Estudiar hacia qué lado apunta la normal.*

*Solución:* hacia dentro.

## Integrales de superficie de funciones escalares

**Ejercicio 35** *Sea* $S$ *la semiesfera* $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, $z \geq 0$*. Hallar* $\iint_S \left(x^2 + y^2\right) dS$.

*Solución*: $\frac{4}{3}\pi a^4$.

**Ejercicio 36** *Hallar el área de la superficie* $S$ *del paraboloide* $z = x^2 + y^2$ *determinada por* $0 \leq z \leq 4$.

*Solución*: $\frac{\pi}{6}\left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right)$.

**Ejercicio 37** *Hallar el área de la superficie del tronco de paraboloide* $S$, $y = x^2 + z^2 - 1$*, con* $0 \leq y \leq 3$.

*Solución*: $\frac{\pi}{6}\left(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}\right)$.

**Ejercicio 38** *Hallar el área de una semiesfera de radio* $a$*. Solución:* $2\pi a^2$.

**Ejercicio 39** *Hallar el área de la superficie* $S$ *de ecuaciones paramétricas* $x = \cos u \cos v$, $y = \cos u \operatorname{sen} v$, $z = \operatorname{sen} u$ *para* $0 \leq u \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq v \leq u$.

*Solución*: $\frac{\pi + 4 - 4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$.

**Ejercicio 40** *Se sabe que el toro circular obtenido al girar una circunferencia de radio* $R$*, centrada en el punto* $(0, a, 0)$*, alrededor del eje* $OZ$ *(con* $a > R$*) admite la parametrización dada por* $\overline{T}(u, v) = ((a + R\cos u)\cos v, (a + R\cos u)\operatorname{sen} v, R\operatorname{sen} u)$, $D = \{(u, v)/0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi\}$*. Calcular su área.*

*Solución:* $4\pi^2 aR$.

**Ejercicio 41** *Calcular el área de la superficie esférica* $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ *limitada por el cilindro* $x^2 + 4y^2 = 9$.

*Solución*: $12\pi$.

**Ejercicio 42** *Sea* $S$ *la superficie dada por la parametrización:* $\bar{T}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, v)$ *con* $(u, v) \in D = \{(u, v) \ / \ 0 \leq u \leq \sqrt{3}, 0 \leq v \leq \pi/2\}$*. Calcular la integral* $\iint_S x dS$.

*Solución*: $\frac{7}{3}$.

**Ejercicio 43** *Calcular el área de la superficie* $S$ *de ecuaciones paramétricas:* $x = \cos u \cos v$; $y = \cos u \operatorname{sen} v$; $z = \operatorname{sen} u$ *para* $0 \leq u \leq \frac{\pi}{4}$; $0 \leq v \leq u$.

*Solución*: $\frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$.

**Ejercicio 44** *Calcular el área de la parte del plano:* $x - z = 0$ *intersecada por la superficie cilíndrica* $x^2 + y^2 = 1$.

*Solución*: $\pi\sqrt{2}$.

**Ejercicio 45** *Calcular el área de la superficie esférica* $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ *limitada por el cilindro* $x^2 + y^2 = 9$*, en el primer octante.*

*Solución*: $2\pi(4-\sqrt{7})$.

**Ejercicio 46** *Calcular el área de la superficie del tronco de paraboloide* $S$, $y = x^2 + z^2 - 1$, *con* $0 \leq y \leq 3$.

*Solución*: $\frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 5^{3/2})$.

**Ejercicio 47** *La porción de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *cortada por el cilindro* $x^2 + y^2 - y = 0$ *(con* $z \geq 0$*) se llama bóveda de Viviani. Denotemos por* $S$ *dicha superficie y por* $C$ *su contorno. (a) Calcular la integral de línea* $\int_C xdx + ydy + z.xdz$ *indicando claramente en la figura el sentido de recorrido. (b) Calcular la integral de superficie* $\iint_S z.ydS$. *Nota: En el apartado (b) se recomienda parametrizar la superficie a cartesianas.*

*Solución*: (a) $\pm\frac{\pi}{8}$. (b) $\frac{\pi}{8}$.

**Ejercicio 48** *Calcular, mediante integración, el área de la superficie esférica de radio* $R$.

*Solución*: $4\pi R^2$.

**Ejercicio 49** *La parte de la superficie esférica* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, *interior al cilindro* $x^2 + y^2 = ay$, $z \geq 0$, *se llama bóveda de Viviani. Calcular su área.*

*Solución*: $2a^2(\frac{\pi}{2} - 1)$.

**Ejercicio 50** *Hallar el área de la parte del cilindro* $x^2 + y^2 = ay$; $z \geq 0$, *que queda dentro de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

*Solución*: $2a^2$.

**Ejercicio 51** *Calcular el área de la parte de la superficie del cono* $x^2 + y^2 = z^2$, *cortada por el cilindro* $x^2 + y^2 = 2ax$.

*Solución*: $2\sqrt{2}\pi a^2$.

**Ejercicio 52** *A una esfera de radio* $a$ *se le practica un orificio circular de diámetro* $a$, *cuyo eje coincide con un diámetro de la esfera. Calcular el área de la superficie exterior.*

*Solución*: $4\sqrt{3}\pi a^2$.

### Integrales de superficie de funciones vectoriales

**Ejercicio 53** *Sea* $S$ *la superficie dada por la parametrización:* $\bar{T}(u,v) = (u, v, 1-u-v)$ *con* $(u,v) \in D = \{(u,v)/0 \leq u^2 + v^2 \leq 2\}$. *Calcular: (a) Su área; (b)* $\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS}$ *siendo* $\overline{F} = (0, 0, x^2 + y^2)$ *y considerando en* $S$ *la normal inferior.*

Solución: (a) $2\sqrt{3}\pi$. (b) $-2\pi$.

**Ejercicio 54** *Calcular la integral* $I = \iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS}$ *siendo* $\overline{F} = (-x, -y, 0)$ *y siendo* $S$ *la superficie* $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$; $1 \leq z \leq 2$ *orientada con la normal interior.*

Solución: $\frac{14\pi}{3}$.

**Ejercicio 55** *Sea* $S$ *la porción de la superficie* $z = 2 - (x^2 + y^2)$ *que queda por encima del plano* $xy$. *(a) Calcular su área. (b) Calcular, aplicando la definición,* $\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS}$ *siendo* $\overline{F} = (0, -x, z)$ *y considerando en* $S$ *la normal interior.*

Solución: (a) $\frac{13\pi}{3}$. (b) $-2\pi$.

**Ejercicio 56** *Sea* $\overline{F} = (-x, -y, 0)$ *y sea* $S$ *la superficie del cono* $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ *que queda por encima del plano* $z = 1$, *orientada con la normal interior. (a) Calcular la integral de superficie:* $I = \iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS}$. *(b) Calcular la integral de superficie:* $I = \iint_S (z-3)^2 x^2 \cdot dS$.

Solución: (a) $\frac{16}{3}\pi$. (b) $\frac{32}{3}\pi\sqrt{2}$.

**Ejercicio 57** *Calcular el flujo total del campo* $\overline{F} = (-y, x, z)$ *a través de la superficie cerrada* $S = S_1 \cup S_2$ *con* $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 100$, $z \geq 0$, $S_2 : z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 100$, *en dirección de la normal exterior de S.*

Solución: $\frac{2000\pi}{3}$.

**Ejercicio 58** *Sea S la superficie de un helicoide dada por* $\bar{T}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, v)$ *con* $(u, v) \in D = \{(u, v) \ / \ 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi\}$. *Si el desplazamiento de un fluido viene dado por* $\overline{F} = (1, 1, x^2 + y^2)$ *hallar el flujo total de* $\overline{F}$ *a través de S, orientada hacia el exterior (componente* $\overline{k}$ *positiva).*

Solución: $\frac{\pi}{2}$.

**Ejercicio 59** *Sea S la porción de la superficie cónica* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *interior al cilindro* $z^2 + y^2 = 1$. *Sea* $\overline{F}$ *el campo vectorial* $\overline{F} = (2x, 2y, 2z + 1)$. *Calcular* $\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS}$ *tomando la normal inferior (componente* $\overline{k}$ *negativa).*

Solución: $-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

**Ejercicio 60** *Sea S una lata cilindrica, sin tapa ni fondo, con superficie lateral* $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 8$. *Sea* $\overline{F} = (x, x, z^3)$ *el campo de velocidades de un fluido. Calcular el flujo hacia afuera de la lata.*

Solución: $32\pi$.

# TEORÍA DE CAMPOS

### Campos vectoriales y escalares

**Ejercicio 61** *Supongamos que f es un campo escalar y* $\overline{F}$ *es un campo vectorial. Demostrar que* $\operatorname{div}(f\overline{F}) = \overline{\nabla} f \cdot \overline{F} + f \operatorname{div} \overline{F}$.

**Ejercicio 62** *Sea* $\overline{a}$ *un vector constante y* $\overline{R}$ *el vector de posición. Se considera el vector* $\overline{v} = \overline{a} \times \overline{R}$. *Demostrar que* $\operatorname{div} \overline{v} = 0$.

**Ejercicio 63** *Supongamos que* $\overline{F}$ *es un campo vectorial de clase* $C^2$. *Demostrar que* $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \overline{F}) = 0$.

**Ejercicio 64** *Supongamos que f es un campo escalar. Demostrar que* $\operatorname{div}\left(\overline{\nabla} f\right) = \triangle f$.

**Ejercicio 65** ⧫ *Demostrar que si un vector tiene dirección constante, entonces su rotacional es perpendicular a esa dirección.*

### Teorema de Green

**Ejercicio 66** *Calcular, mediante el teorema de Green, el área de la región encerrada por la curva* $x = t(t-1)$, $y = t(t^3 - 1)$, $t \in [0, 1]$.

*Solución*: $\frac{1}{30}$.

**Ejercicio 67** *Calcular, aplicando el teorema de Green, el trabajo realizado por una partícula sometida al campo de fuerzas* $\overline{F}(x, y) = \left(e^x - y^3\right) \overline{i} + (\cos y + x^3) \overline{j}$ *que recorre la circunferencia unitaria C en sentido contrario a las agujas del reloj.*

*Solución*: $\frac{3\pi}{2}$.

**Ejercicio 68** *Empleando la Fórmula de Green, calcular* $I = \oint_{C^+} (x + y)^2 dx - \left(x^2 + y^2\right) dy$ *a lo largo de la curva C : el triángulo de vértices* $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$.

*Solución*: $-1$.

**Ejercicio 69** *Calcular la integral de línea* $I = \oint_{C^+} \left[y^2dx + \left(x + y^2\right) dy\right]$ *extendida al contorno situado en el primer cuadrante y formado por las líneas* $y = 0$, $x = z$, $y^2 = 2x$ *(a) empleando el teorema de Green; (b) directamente.*

*Solución*: $-2$.

**Ejercicio 70** *Aplicar el Teorema de Green para calcular* $I = \oint_C (x + y)dx + (y - x)dy$, *siendo* $C$ *la circunferencia* $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. *Comprobar el resultado calculando directamente la integral.*

*Solución*: $-2\pi a^2$.

**Ejercicio 71** *Calcular la integral de línea* $\oint_{C^+} \left[\left(2x^2 + 3y^2\right) dx + 4xydy\right]$, *directamente y transformándola en una integral doble, extendida al contorno* $C$ *situado en el primer cuadrante formado por las líneas* $y = 0$; $x^2 + y^2 = 2x$; $y^2 = x$.

*Solución*: $-\frac{7}{6}$.

**Ejercicio 72** *Aplicar el Teorema de Green para calcular* $I = \oint_{L^+} y^2dx - xdy$ *siendo* $L : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

*Solución*: $\pi ab$.

**Ejercicio 73** *Calcular el área de la elipse:* $x = a\cos t$, $y = b\operatorname{sen} t$; $t \in [0, 2\pi]$.

*Solución*: $\pi ab$.

**Ejercicio 74** *Sean* $P(x, y) = Q(x, y) = \frac{1}{2}L\left(x^2 + y^2\right)$. *Calcular, transformándola en una integral doble* $\int_C Pdx + Qdy$, *siendo* $C$ *el contorno formado en el primer cuadrante por* $C_1, C_2$ *y* $C_3$, *recorrido en sentido positivo.* $C_1 : y = 0; C_2 : x^2 + y^2 - 2x = 0; C_3 : x = 1$, *(con* $x \geq 1$*).*

*Solución*: $\ln\sqrt{2}$.

**Ejercicio 75** ♦ *Calcular la integral de línea* $\int_{\overline{AMO}} (e^x \operatorname{sen} y - my)\, dx + (e^x \cos y - m)\, dy$, *usando la fórmula de Green, donde* $\overline{AMO}$ *es la circunferencia superior* $x^2 + y^2 = ax$, *recorrida desde el punto* $A(a, 0)$ *hasta el punto* $O(0, 0)$.

*Solución*: $\frac{m\pi a^2}{8}$.

## Teorema de Stokes

**Ejercicio 76** *Sea* $\overline{F} = ye^z\overline{i} + xe^z\overline{j} + xye^z\overline{k}$. *Probar que la integral de* $\overline{F}$ *alrededor de una curva cerrada simple orientada* $C$ *que es la frontera de una superficie* $S$ *es* $0$.

**Ejercicio 77** *Probar que vale* $0$ *la integral de línea* $I = \int_C \overline{F} \cdot \overline{ds}$ *siendo* $C$ *cualquier curva cerrada simple y* $\overline{F} = (y, x, z)$.

**Ejercicio 78** *Calcular, aplicando el Teorema de Stokes, la integral* $I = \int_C \overline{F} \cdot \overline{ds}$ *siendo* $\overline{F} = (yz, x^2, xy)$ *y siendo* $C$ *la intersección de las superficies:* $x^2 + y^2 + z^2 = 3$; $x^2 + y^2 = 2z$. *La curva* $C$ *se supone recorrida en el sentido antihorario al considerar su proyección sobre el plano* $xy$. *Nota: Para hallar* $C$ *se sugiere eliminar* $x^2 + y^2$ *entre las superficies.*

*Solución*: $-2\pi$.

**Ejercicio 79** *Verificar el teorema de Stokes, siendo* $\overline{F} = (0, x, 0)$ *y siendo* $C$ *la curva intersección de:* $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; $y + z = 2$. *La curva* $C$ *se supone recorrida en el sentido horario al considerar su proyección sobre el plano* $xy$.

*Solución*: $-\pi$.

**Ejercicio 80** *Sea* $\overline{F}$ *el campo vectorial* $\overline{F}(x, y, z) = xe^z\overline{i} + (x + xz)\overline{j} + 3e^z\overline{k}$. *Consideremos* $S$ *la mitad superior de la superficie esférica:* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *y sea* $C$ *su contorno. Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial* $\overline{F}$ *y la curva* $C$.

*Solución*: $\pi$.

**Ejercicio 81** *Verificar el teorema de Stokes, siendo* $\overline{F}$ *el campo vectorial* $\overline{F} = (-y^3, 0, z)$ *y siendo* $S$ *la porción de la superficie* $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ *que queda por encima del plano* $z = 1/2$*, y* $C$ *el borde de dicha superficie. Considerar en* $S$ *la cara interior.*

*Solución*: $-\frac{3\pi}{64}$.

**Ejercicio 82** *Sea* $S$ *la porción de la esfera* $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ *que queda por encima del plano* $z = 3$*, y* $C$ *el borde de* $S$*. Verificar el teorema de Stokes, siendo* $\overline{F} = (y^2, 0, e^z)$ *y considerando en* $S$ *la cara inferior.*

*Solución*: 0.

**Ejercicio 83** *Verificar el Teorema de Stokes, siendo* $\overline{F} = (yz, x^2, xy)$ *y siendo* $C$ *la intersección de las superficies:* $x^2 + y^2 + z^2 = 2$*;* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$*. La curva* $C$ *se supone recorrida en el sentido antihorario al considerar su proyección sobre el plano* $xy$*.*

*Solución*: $-\pi$.

**Ejercicio 84** *Aplicar el teorema de Stokes para hallar la integral de línea* $\int_C \left(y^2 - z^2\right) dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$ *en donde* $C$ *es la intersección de la semiesfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 4x, z > 0$ *y el cilindro* $x^2 + y^2 = 2x$*. Se recomienda parametrizar la esfera a cartesianas.*

*Solución*: 0.

**Ejercicio 85** *La porción de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ *cortada por el cilindro* $x^2 + y^2 - ay = 0$ *(con* $z \geq 0$*) se llama bóveda de Viviani. Denotemos por* $S$ *dicha superficie y por* $C$ *su contorno. (a) Calcular directamente la integral de línea* $\int_C xdx + ydy + z.xdz$ *teniendo en cuenta que el sentido de recorrido debe ser: subiendo por el primer octante. (b) Verificar el resultado del apartado anterior aplicando el teorema de Stokes. Nota: En este apartado se recomienda parametrizar la superficie* $S$ *a cartesianas.*

*Solución*: $\frac{\pi a^3}{8}$.

## Teorema de Gauss

**Ejercicio 86** *Utilizar el teorema de Gauss para calcular* $\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS}$ *siendo* $\overline{F}(x, y, z) = xy^2\overline{i} + x^2y\overline{j} + y\overline{k}$ *y* $S$ *la superficie del cilindro* $x^2 + y^2 = 1$*, acotado por los planos* $z = 1$ *y* $z = -1$ *e incluyendo las porciones* $x^2 + y^2 \leq 1$ *cuando* $z = \pm 1$*.*

*Solución*: $\pi$.

**Ejercicio 87** *Supongamos que* $V$ *es un sólido de volumen* 13 *unidades limitado por la superficie cerrada* $S$*, y que* $\overline{F}$ *es el campo vectorial definido por el vector de posición, o sea,* $\overline{F}(x, y, z) = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$*. Utilizar el teorema de la divergencia para calcular* $\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS}$*.*

*Solución*: 39.

**Ejercicio 88** *Verificar el teorema de Gauss, siendo* $\overline{F}$ *el campo vectorial* $\overline{F} = (2x, 2y, z)$ *y siendo* $S = S_1 \cup S_2$ *la superficie cerrada formada por:* $S_1$ *: la porción del paraboloide* $z = x^2 + y^2$ *que queda por debajo del plano* $z = 3$*.* $S_2$ *: la porción de dicho plano que actúa como tapa.*

Solución: $45\frac{\pi}{2}$.

**Ejercicio 89** *Calcular, aplicando el teorema de Gauss, la integral de superficie* $\iint_S \overline{F}.\overline{dS}$ *siendo* $\overline{F}(x, y, z) = (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$ *y* $S$ *la superficie cerrada limitada por la semiesfera* $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ *y el plano* $z = 0$*, con la orientación de la normal exterior.*

Solución: $\frac{2\pi a^5}{5}$.

**Ejercicio 90** *Sea* $S$ *la superficie esféríca, de centro el origen y radio unidad, dada por la parametrización:* $\overline{T}(\theta, \phi) = (\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\phi)$ *con* $0 \leq \theta \leq 2\pi$*,* $0 \leq \phi \leq \pi$*. Sea* $\Omega$ *la región de* $\mathbb{R}^3$ *limitada por* $S$*, y* $\overline{F}$ *el campo vectorial dado por* $\overline{F}(x, y, z) = (0, 0, z^3)$*. Verificar el Teorema de Gauss.*

Solución: $\frac{4}{5}\pi$.

**Ejercicio 91** *Verificar el teorema de Gauss, siendo* $\overline{F}$ *el campo vectorial* $\overline{F} = (x, 0, z)$ *y siendo* $S = S_1 \cup S_2$ *la superficie cerrada formada por:* $S_1 : z = x^2 + y^2$; $S_2 : z = 4 - (x^2 + y^2)$.

Solución: $8\pi$.

**Ejercicio 92** ♦ *Utilizar el teorema de Gauss para calcular* $\iint_{\partial\Omega}(x^2+y+z)dS$ *donde* $\Omega$ *es la bola* $x^2+y^2+z^2 \leq 1$. *Solución:* $\frac{4}{3}\pi$.

### Campos Conservativos en $\mathbb{R}^3$

**Ejercicio 93** *Calcular el trabajo realizado por el campo* $\overline{F} = (4xy - 3x^2z^2 + 1,\ 2(x^2 + 1),\ -2x^3z - 3z^2)$ *para mover una partícula de masa* $m$ *desde el punto* $(1, -1, 1)$ *al punto* $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ *a lo largo de la curva* $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$, $z + x + 2y = 0$.

*Solución*: $-\frac{10}{9\sqrt{3}} + 5$.

**Ejercicio 94** *Calcular el trabajo de la fuerza de gravedad* $\overline{F}$ *en el desplazamiento de la masa* $m$*, desde el punto* $M_1(a_1, b_1, c_1)$ *al punto* $M_2(a_2, b_2, c_2)$ *a lo largo de una trayectoria arbitraria* $L$.

*Solución*: $mg(c_1 - c_2)$.

**Ejercicio 95** *Comprobar que la integral de línea* $\int_{(A)}^{(B)} yzdx + zxdy + xydz$ *no depende del camino de Integración, y calcularla entre los puntos:* $A(1, 1, 1)$ *y* $B(a, b, c)$.

*Solución*: $abc - 1$.

**Ejercicio 96** *Calcular el trabajo realizado por el campo:* $\overline{F}(x, y, z) = (4xy-3x^2z^2+1, 2(x^2+1), -2x^3z-3z^2)$ *para mover una partícula de masa unidad desde el punto* $(1, -1, 1)$ *al punto* $(\frac{-2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{2}{\sqrt{3}})$ *a lo largo de la curva de ecuación:* $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$; $z + x + 2y = 0$.

*Solución*: $5 - \frac{10}{9\sqrt{3}}$.

**Ejercicio 97** *Calcular la integral de línea* $\int_C ydx+xdy+zdz$ *siendo* $C$ *el arco de curva, situado en el primer octante, definido por la intersección de las superficies* $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 2ax$.

*Solución*: $\pm 2a^2$ (según el sentido de recorrido).

### Campos Conservativos en $\mathbb{R}^2$

**Ejercicio 98** *Sean* $D$ *un dominio simplemente conexo de* $\mathbb{R}^2$ *y* $f(x, y)$ *una función de clase* $C^2$ *en* $D$. *Probar que una condición suficiente para que la integral* $\oint_\sigma \frac{\partial f}{\partial x}dy - \frac{\partial f}{\partial y}dx$ *sea nula a lo largo de toda curva simple y cerrada* $C$ *contenida en* $D$*, es que* $f$ *sea una función armónica, es decir que se cumpla* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

**Ejercicio 99** *Calcular la integral extendida al arco* $C$, $\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ *donde* $C$ *es una curva cerrada que no pasa por el origen de coordenadas, recorrida en el sentido positivo, en los siguientes casos: a) El* $(0, 0)$ *está fuera de* $C$. *b)* $C$ *encierra al* $(0, 0)$.

*Solución*: a) 0. b) $2\pi$.

**Ejercicio 100** *Calcular la integral de línea* $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+4y^2}$ *tomada a lo largo de la circunferencia, de centro el origen de coordenadas y radio 1, en sentido positivo.*

*Solución*: $\pi$.

**Ejercicio 101** *Calcular* $\oint \frac{xdx+ydy}{(x^2+y^2)^2}$ *alrededor de la elipse* $x^2+3y^2=1$.

*Solución*: 0.

**Ejercicio 102** *Calcular la integral* $I=\int_{C_1}(\operatorname{sen}^3 x+xy)dx+(\cos^2 y+\frac{1}{2}x^2)dy$ *siendo* $C_1$ *la curva abierta dada por la parametrización* $\overline{\sigma}(t)=(t,\pi\cos t);\ \ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

*Solución*: $\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}$.

**Ejercicio 103** *Se define le campo vectorial* $\overline{F}(x,y,z)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$. *Calcular* $\int_C \overline{F}\cdot\overline{ds}$ *donde* $C$ *es la elipse* $\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=1$ *recorrida en sentido antihorario.*

*Solución*: 0.

**Ejercicio 104** *Calcular la integral de línea* $\int_C \frac{y}{(x/2)^2+y^2}dx-\frac{x}{(x/2)^2+y^2}dy$ *siendo* $C$ *la circunferencia* $x^2+y^2=4$ *recorrida en sentido negativo (sentido agujas reloj).*

*Solución*: $4\pi$.

**Ejercicio 105** *Calcular la integral de línea* $\int_C \frac{(1-y)dx+xdy}{x^2+(y-1)^2}$ *siendo* $C$ *la curva* $C: x^2+y^2=4$ *recorrida en el sentido de las agujas del reloj.*

*Solución*: $-2\pi$.

**Ejercicio 106** *Calcular la integral de línea* $\int_C \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}dx-\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}dy$*siendo* $C$ *la circunferencia* $(x-1)^2+(y-1)^2=9$*, de centro el punto* $(1,1)$ *y radio* $3$*, recorrida en sentido positivo.*

*Solución*: $-\pi$.

**Ejercicio 107** *Calcular la integral* $I=\int_C \frac{ydx+(1-x)dy}{x^2-2x+1+y^2}$ *(a) a lo largo de la curva* $C_1:(x+1)^2+y^2=1$*, en sentido positivo. (b) a lo largo de la curva* $C_2:(\frac{x}{2})^2+y^2=1$*, en sentido negativo.*

*Solución*: (a) 0. (b) $2\pi$.

**Ejercicio 108** *Sean:* $C_1: y=x^2-1; -2\le x\le 2$; $C_2: y=3; -2\le x\le 2$; $C_3: x^2+(y-1)^2=1$ *en sentido antihorario y sea la integral de línea* $\int_C \frac{(1-y)dx+xdy}{x^2+(y-1)^2}$. *Justificar la relación que existe entre* $\int_{C_1}, \int_{C_2}$ *y* $\oint_{C_3}$ *y calcular* $\int_{C_1}$.

*Solución*: $\frac{3\pi}{2}$.

**Ejercicio 109** *En cada punto* $P$ *de la elipse* $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ *se aplica una fuerza* $\overline{F}$ *cuyo módulo es igual a la distancia entre* $P$ *y el centro de la curva, y dirigida hacia el centro de ésta. Calcular: a) Trabajo sobre el primer cuadrante. b) Trabajo sobre toda la curva.*

*Solución*: a) $\frac{a^2-b^2}{2}$. b) 0.

**Ejercicio 110** *Calcular* $I=\int_L \frac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ *siendo* $L$ *la porción de la elipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *situada en el primer cuadrante y recorrida en sentido horario.*

*Solución*: $\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}$.

**Ejercicio 111** *Calcular la integral* $\int_L (e^x\operatorname{sen} y-my)\,dx+(e^x\cos y-mx)\,dy$ *donde* $L$ *es la semicircunferencia superior* $x^2+y^2=a^2$ *recorrida desde el punto* $(a,0)$ *hasta el* $(-a,0)$.

*Solución*: 0.

**Ejercicio 112** *a) Hallar el valor de* $\alpha$ *que hace que la integral* $\int_L \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ *no depende del camino* $L$*. b) Calcular después la integral referida a cualquier curva* $L$ *entre los puntos* $(1,0)$ *y* $\left(1,\sqrt{3}\right)$.

*Solución*: a) $\alpha=1$. b) $\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\ln 4$.

**Ejercicio 113** *Calcular* $\int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$.

*Solución*: $\ln\frac{13}{5}$.

**Ejercicio 114** ♦ *Calcular* $\int_L \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2y}dx + \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)}{xy^2}dy$ *siendo* $L: x = t+\cos^2 t,\ y = 1+\operatorname{sen}^2 t;$ $t \in [0, \pi/2]$ .

*Solución*: $\frac{\pi^3}{16} + \frac{16}{\pi} + 2\pi - 4$.

**Ejercicio 115** ♦ *a) Sea la integral* $\oint \frac{(y^2+2xy+ax^2)dx-(x^2+2xy+by^2)dy}{(x^2+y^2)^2}$. *Hallar los valores de* $a$ *y* $b$ *para quevalga cero, a lo largo de cualquier camino cerrado, perteneciente a un dominio simplemente conexo que no contenga el* $(0,0)$. *b) Con dichos valores calcular la integral curvilínea desde el punto* $(1,1)$ *hasta el punto* $(2,2)$ *a lo largo de una curva cualquiera que los contenga.*

*Solución*: a) $a = -1, b = -1$. b) 0.

# APLICACIONES

**Ejercicio 116** *Calcular, aplicando el teorema de Green, el área de la superficie limitada por las parábolas* $y^2 = x;\ x^2 = y$.

*Solución*: $\frac{1}{3}$.

**Ejercicio 117** *Calcular, aplicando el teorema de Green, el área de la superficie limitada por la cardiode:* $x = 2a\cos t - a\cos 2t,\ y = 2a\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen} 2t;\ t \in [0, 2\pi]$ .

*Solución*: $6\pi a^2$.

**Ejercicio 118** ♦ *Hallar, aplicando el teorema de Green, el área encerrada por el lazo de la curva:* $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$.

*Solución*: $\frac{8}{5}\sqrt{3}$.

**Ejercicio 119** *Calcular la masa del arco de circunferencia:* $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t;\ 0 \le t \le \pi,$ *cuya densidad es* $\mu = y$.

*Solución*: 2.

**Ejercicio 120** *Calcular el c.d.g del arco:* $y = \operatorname{ch} x,\ 0 \le x \le \ln 2,$ *suponiendo la densidad* $\mu = 1$.

*Solución*: $x_c = \frac{3/4\ln 2 - 1/4}{3/4}; y_c = \frac{1/2\ln 2 + 15/32}{3/4}$.

**Ejercicio 121** ♦ *Calcular la masa de la primera espira de la hélice:* $x = \cos t;\ y = \operatorname{sen} t;\ z = t$ *si la densidad en cada punto es proporcional al radio vector del mismo.*

*Solución*: $k\sqrt{2}[\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})]$.

**Ejercicio 122** *Calcular los momentos de inercia de la 1ª espira de la hélice:* $x = a\cos t,\ y = a\operatorname{sen} t,$ $z = \mathrm{ht}/2\pi,$ *con respecto a los ejes de coordenadas, suponiendo la densidad* $\mu = 1$.

*Solución*: $I_x = I_y = (\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3})\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2};\ I_z = a^2\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}$.