EJERCICIOS TEMA 3
ECUACIONES DIFERENCIALES

ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

Ecuaciones diferenciales de primer orden integrables por cuadraturas.

Ejercicio 1 *Resolver las ecuaciones diferenciales de variables separadas o separables*

$$\begin{array}{ll} a) & x' = e^t - \frac{2t}{t^2-1} \\ b) & (x^2+9)y' + xy = 0 \\ c) & y' = 2xe^{-y} \\ d) & x' = \frac{1+t}{t^2x^2} \\ e) & x' = e^{t+x} \end{array}$$

Solución: a) $x = e^t - \ln(t^2-1) + C$. b) $y\sqrt{x^2+9} = C$. c) $y = \ln(x^2+C)$. d) $x = \left[3(\ln t - \frac{1}{t}) + C\right]^{1/3}$. e) $x = -\ln(C - e^t)$.

Ejercicio 2 *Calcular las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales buscando factores integrantes de la forma que se indica:*

$$\begin{array}{ll} a) & \left(1-t^2y\right)dt + t^2(y-t)dy = 0;\ \textit{con } \mu(t,x) = \mu(t) \\ b) & (x^2+y^2+x)dx + xydy = 0;\ \textit{con } \mu(x,y) = \mu(x) \\ c) & \left(2x^2+y\right)dx + (x^2y-x)dy = 0;\ \textit{con } \mu(x,y) = \mu(x) \\ d) & \left(y+xy^2\right)dx + (x-x^2y)dy = 0;\ \textit{con } \mu(x,y) = \mu(x\cdot y) \end{array}$$

Solución: a) $\frac{y^2}{2} - \frac{1}{t} - yt = C$. b) $6x^2y^2 + 3x^4 + 4x^3 = C$. c) $4x^2 - 2y + xy^2 = Cx$. d) $-\frac{1}{xy} + \ln|x| - \ln|y| = C$.

Ejercicio 3 *Calcular las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales buscando factores integrantes de la forma que se indica:*

$$\begin{array}{ll} a) & 1 - t^2x + (x-t)t^2x' = 0;\ \textit{con } \mu(t,x) = \mu(t) \\ b) & 3x^2 - t + (2x^3 - 6tx)x' = 0;\ \textit{con } \mu(t,x) = \mu(t+x^2) \end{array}$$

Solución: a) $-\frac{1}{t} - tx + \frac{x^2}{2} = C$. b) $t - x^2 = C(t+x^2)^2$.

Ejercicio 4 *Calcular las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales buscando factores integrantes de la forma que se indica:*

$$\begin{array}{ll} a) & xy'(y-1) - y = 0;\ \textit{con } \mu(x,y) = \mu(y) \\ b) & (t+1)^2 + (1+t^2)x' = 0;\ \textit{con } \mu(t,x) = \mu(t+x) \\ c) & (1+xy+y^2) + (1+xy+x^2)y' = 0;\ \textit{con } \mu(x,y) = \mu(x\cdot y) \end{array}$$

Solución: a) $xye^{-y} = C$. b) $(1+t^2)e^{t+x} = C$. c) $(x+y)e^{xy} = C$.

Ejercicio 5 *Determinar a qué tipo pertenecen las siguientes ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{array}{llll} a) & 3e^t\tan(x) + (2-e^t)\sec(x)^2x' = 0 & h) & x' = \frac{1}{x+t} \\ b) & (3t^2x + x^3)x' + 2t^3 = 0 & i) & y' = \frac{y}{2y\ln(y)+y-x} \\ c) & xy' + y = y^2\ln(x) & j) & y' = 1 + e^{2x} \\ d) & t\cos(t+x) + \operatorname{sen}(t+x) + t\cos(t+x)x' = 0 & k) & y' = \frac{y}{x}(\ln y - \ln x) \\ e) & (3tx + x^2) + (3tx + t^2)x' = 0 & l) & xy' + y = 2x \\ f) & tx\cos(tx) + \operatorname{sen}(tx) + (t^2\cos(tx) + e^x)x' = 0 & m) & y' = \ln(x^y) \\ g) & 3x + 3e^tx^{\frac{2}{3}} + tx' = 0 & & \end{array}$$

Solución: a) Separadas. b) Homogénea. c) Bernoulli. d) Exacta. e) Homogénea. f) Exacta. g) Bernoulli. h) Separables. i) Exacta. j) Separadas. k) Homogénea. l) Lineal. m) Separadas.

Ejercicio 6 *Resolver las ecuaciones diferenciales:*

a)	$(2xy+1)dx+(x^2-1)dy=0$	*d)*	$y'^2-(2x+y)y'+(x^2+xy)=0$
b)	$(x+2y+3)\,dx+(2x+4y-1)dy=0$	*e)*	$\frac{dy}{dx}+\frac{2x+1}{x}y=e^{-2x}$
c)	$\left(y^2+xy^2\right)y'+x^2-yx^2=0$		

Solución: a) $x^2y+x-y=C$. b) $x^2+4xy+4y^2+6x-2y=C$. c) $(x+y)(x-y-2)+2\ln\left|\frac{x+1}{y-1}\right|=C$. d) $y(x)=\frac{1}{2}x^2+C \wedge y(x)=Ce^x-(x+1)$. e) $y=\frac{x^2+C}{2xe^{2x}}$.

Ejercicio 7 *Resolver las ecuaciones diferenciales:*

a)	$y'=\frac{x+2y-3}{x-1}$	*d)*	$\frac{dy}{dx}+y=xy^3$
b)	$xy'=x^2y^2+(1-2x^3)y+x^4$	*e)*	$x\left(y^2+1\right)dx-y\left(x^2-1\right)dy=0$
c)	$\operatorname{sen}xy+xy\cos xy+x^2\cos xyy'=0$		

Solución: a) $x+y-2=C(x-1)^2$. b) $\frac{x}{y-x}=-\frac{x^3}{3}+C$. c) $x\operatorname{sen}xy=C$. d) $\frac{1}{y^2}=x+\frac{1}{2}+Ce^{2x}$. e) $x^2-1=C\left(y^2+1\right)$.

Ejercicio 8 *Resolver las ecuaciones diferenciales:*

a)	$y'=(1-x)y^2+(2x-1)y-x$	*d)*	$(2y-2x)dx+(x-y+1)dy=0$
b)	$t(2t^2+y^2)dt+y(t^2+2y^2)dy=0$	*e)*	$x\frac{dy}{dx}+2y=xe^{x^3}$
c)	$\left(x^2-3y^2\right)dx+2xydy=0$		

Solución: a) $\frac{1}{y-1}=x-2+Ce^{-x}$. b) $\frac{t^4}{2}+\frac{y^2t^2}{2}+\frac{y^4}{2}=C$. c) $y^2-x^2=Cx^3$. d) $2x-y+\ln(x-y-1)^2=C$. e) $y=\frac{e^{x^3}+C}{3x^2}$.

Ejercicio 9 *Resolver las ecuaciones diferenciales:*

a)	$x'\left(3t^2-x^2\right)=2tx$	*c)*	$t^2+x^2+2t+(2tx+3x^2)x'=0$
b)	$(3x-7t+7)-(3t-7x-3)x'=0$	*d)*	$x'=\frac{x}{t}-x^2$

Solución: a) $(x^2-t^2)=Cx^3$. b) $(x+t-1)^{5/7}(x-t+1)^{2/7}=C$. c) $\frac{t^3}{3}+tx^2+t^2+x^3=C$. d) $x(t^2+C)=2t$.

Ejercicio 10 *Resolver las ecuaciones diferenciales:*

a)	$3x+y-2+y'(x-1)=0$	*d)*	$\operatorname{sen}(tx)+tx\cos(tx)+t^2\cos(tx)x'=0$
b)	$x+(x-t)x'=0$	*e)*	$\frac{\operatorname{sen}2x}{y}+x+(y-\frac{\operatorname{sen}^2x}{y^2})y'=0$
c)	$2t+3x+(x+2)x'=0$		

Solución: a) $y(x)=3(x-1)\ln|x-1|+C(x-1)-1$. b) $x\ln|x|+t+Cx=0$. c) $(x+2t-4)^2=C(t-3)^2(x+t-1)$. d) $t\operatorname{sen}(tx)=C$. e) $y^2+x^2+\frac{1}{y}(1-\cos 2x)=C$.

Ejercicio 11 *Resolver las ecuaciones diferenciales:*

a)	$x'-tx=3t$	*d)*	$3tx'-2x=\frac{t^3}{x^2}$
b)	$y'=5y+\cos(x)$	*e)*	$x'=e^tx^7+2x$
c)	$x'-2x=4e^{2t}$	*f)*	$y'+\frac{y}{x}=\frac{\ln x}{x}y^2$

Solución: a) $x=Ce^{t^2/2}-3$. b) $y=\frac{1}{26}(\operatorname{sen}(x)-5\cos(x))+Ce^{5x}$. c) $x=(4t+C)e^{2t}$. d) $x=(t^3+Ct^2)^{1/3}$. e) $x=(Ce^{-12t}-\frac{6}{13}e^t)^{-1/6}$. f) $y=(1+\ln x-Cx)^{-1}$.

Ejercicio 12 *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Riccati usando la solución particular proporcionada:*

a) $y'=y^2-xy+1$; *con* $y_p=x$

b) $y'=x^{-4}-y^2$; *con* $y_p=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$

Solución: a) $y = x + e^{\frac{x^2}{2}} \left(C - \int e^{\frac{x^2}{2}} dx \right)^{-1}$. b) $y = \frac{1}{x^2} \left(x - 1 + \frac{1}{Ce^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{2}} \right)$.

Algunas Aplicaciones Prácticas

Ejercicio 13 *Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura* T *del cuerpo y la temperatura* T_0 *del aire. Si la temperatura del aire es de* $20°C$ *y el cuerpo se enfría en* 20 *minutos desde* $100°C$ *hasta* $60°C$ *, ¿dentro de cuánto tiempo su temperatura descenderá hasta* $30°C$ *?.*

Solución: $t = 60$ minutos.

Ejercicio 14 *Calcular la velocidad límite que alcanza un paracaidista en su caída, si se sabe que la resistencia del paracaídas es proporcional a su velocidad.*

Solución: $v_{\text{lím}} = \frac{mg}{K}$.

Ejercicio 15 *Se sabe que la velocidad de la desintegración radiactiva es proporcional a la cantidad* x *de la sustancia que queda aún no desintegrada. Determínese cómo* x *depende del tiempo* t*, si en el instante incial* t_0 *se tenía* $x = x_0$ *de sustancia.*

Solución: $x(t) = x_0 e^{-k(t-t_0)}$.

Ejercicio 16 *Un punto material de masa 1 gramo se mueve en línea recta debido a la acción de una fuerza proporcional al tiempo e inversamente proporcional a la velocidad del punto. En el instante* $t = 10$ *segundos la velocidad era igual a* 50 *cm/s y la fuerza igual a* 4 *dinas. ¿Qué velocidad tendrá el punto al cabo de un minuto del comienzo del movimiento?.*

Solución: $v \simeq 269{,}26$ cm/s.

Ejercicio 17 *Un tanque de* 400 *litros de capacidad contiene inicialmente una solución salina de* 150 *litros de agua y* 25 *g de sal. Una solución salina de* 2 *g/l de sal entra en el tamque a* 10 *litros por minuto, mientras que la mezcla resultante sale por un sumidero a* 5 *l/min. ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque en el momento en que éste empieza a rebosarse?.*

Solución: $Q(50) = 696{,}875$ g.

Ejercicio 18 *Consideremos un circuito eléctrico RL. Supongamos que en el circuito la resistencia es de* 12Ω *y la inductancia es de* $4H$*. Si la batería proporciona un voltaje constante de* $60V$ *y el interruptor se cierra cuando* $t = 0$ *de manera que la corriente empieza con el valor* $I(0) = 0$*, calcular: a)* $I(t)$*. b) La corriente al cabo de* 1 *segundo. c) El valor límite de la corriente.*

Solución: a) $I(t) = 5(1 - e^{-3t})$. b) $I(1) \simeq 4{,}75A$. c) $5A$.

Ejercicio 19 *Se sabe que un cierto material radiactivo decae a una velocidad proporcional a la cantidad de material presente. Un bloque de este material tiene originalmente una masa de* m_0 *gramos. Al ser observado después de* 24 *horas, ha experimentado una reducción de masa del* 10 %*. a) Encuentrar una expresión para la masa del cuerpo a un tiempo cualquiera. b) Calcular el intervalo de tiempo que debe transcurrir para que el bloque decaiga a la mitad de su masa original (esto es, su vida media).*

Solución: a) $m(t) = m_0 e^{-0{,}00439t}$. b) $158h$.

Ejercicio 20 *La población* $P(t)$ *de un suburbio de una gran ciudad en un instante cualquiera se rige por* $\frac{dP}{dt} = P(10^{-1} - 10^{-7}P)$; $P(0) = 5000$*, en donde* t *se mide en meses. a) ¿Cuál es el valor límite de la población? b) ¿En qué momento será la población igual a la mitad de su valor límite?*

Solución: a) 10^6. b) 4,41 años.

Ejercicio 21 *Un reactor transforma plutonio* 239 *en uranio* 238 *que es relativamente estable para uso industrial. Después de* 15 *años se determina que el* 0,0043 *por ciento de la cantidad inicial* A_0 *de plutonio se ha desintegrado. Determinar la semivida de este isótopo (el tiempo necesario para que la cantidad inicial de átomos se reduzca a la mitad) si la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad restante.*

Solución: 241790 años.

ECUACIONES DE ORDEN n

Ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes constantes

Ejercicio 22 *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{array}{llll} a) & 4y''+y'=0 & e) & y''+9y=0 \\ b) & y''-y'-6y=0 & f) & y''-4y'+5y=0 \\ c) & y''+8y'+16y=0 & g) & 3y''+2y'+y=0 \\ d) & 12y''-5y'-2y=0 & & \end{array}$$

Solución: a) $y=c_1+c_2e^{-1/4}x$. b) $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}$. c) $y=c_1e^{-4x}+c_2xe^{-4x}$. d) $y=c_1e^{2/3x}+c_2e^{-1/4x}$. e) $y=c_1\cos 3x+c_2\operatorname{sen}3x$. f) $y=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x)$. g) $y=e^{x/3}(c_1\cos\frac{\sqrt{2}}{3}x+c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{3}x)$.

Ejercicio 23 *Resolver los problemas de condiciones de contorno:*

$$\begin{array}{llll} a) & y''-10y'+25y=0, & y(0)=1, & y(1)=0 \\ b) & y''+y=0, & y'(0)=0, & y'(\frac{\pi}{2})=2 \end{array}$$

Solución: a) $y=e^{5x}(1-x)$. b) $y=-2\cos x$.

Ejercicio 24 *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{array}{llll} a) & y'''-4y''-5y'=0 & e) & y^{(4)}+y'''+y'''=0 \\ b) & y'''-5y''+3y'+9y=0 & f) & 16\frac{d^4y}{dx^4}+24\frac{d^2y}{dx^2}+9y=0 \\ c) & \frac{d^3u}{dt^3}+\frac{d^2u}{dt^2}-2u=0 & g) & \frac{d^5u}{dr^5}+5\frac{d^4u}{dr^4}-2\frac{d^3u}{dr^3}-10\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{du}{dr}+5u=0 \\ d) & y'''+3y''+3y'+y=0 & & \end{array}$$

Solución: a) $y=c_1+c_2e^{5x}+c_3e^{-x}$. b) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}+c_3xe^{3x}$. c) $y=c_1e^{t}+e^{-t}(c_2\cos t+c_3\operatorname{sen}t)$. d) $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3x^2e^{-x}$. e) $y=c_1+c_2x+e^{-1/2x}(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_4\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x)$. f) $y=c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2x\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_4x\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$. g) $y=c_1e^{r}+c_2re^{r}+c_3e^{-r}+c_4re^{-r}+c_5e^{-5r}$.

Ejercicio 25 *Resolver los problemas de valor inicial:*

$$\begin{array}{lllll} a) & y''+16y=0, & y(0)=2, & y'(0)=-2 & \\ b) & y''-4y'-5y=0, & y(1)=0, & y'(1)=2 & \\ c) & y''+y'+2y=0, & y(0)=0, & y''(0)=0 & \\ d) & y'''+12y''+36y'=0, & y(0)=0, & y'(0)=1, & y''(0)=-7 \end{array}$$

Solución: a) $y=2\cos 4x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}4x$. b) $y=\frac{1}{3}e^{5(t-1)}-\frac{1}{3}e^{-(t-1)}$. c) $y=0$. d) $y=\frac{5}{36}-\frac{5}{36}e^{-6x}+\frac{1}{6}xe^{-6x}$.

Ecuaciones lineales no homogéneas

Ejercicio 26 *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{array}{llll} a) & y''+y=\sec x & e) & y''+3y'+2y=\operatorname{sen}(e^x) \\ b) & y''+y=\cos^2 x & f) & y''+2y'+y=e^{-t}\ln t \\ c) & y''-y=\cosh x & g) & 3y''-6y'+6y=e^x\sec x \\ d) & y''+3y'+2y=\frac{1}{1+e^x} & & \end{array}$$

Solución: a) $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+\cos x\ln|\cos x|+x\operatorname{sen}x$. b) $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cos 2x$. c) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{1}{2}x\sinh x-\frac{1}{4}\cosh x$. d) $y=e^{-x}(c_1-1)+c_2e^{-2x}+(e^x+e^{-2x})\ln(e^x+1)$. e) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}-e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)$. f) $y=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}+e^{-t}\left(\frac{t^2}{2}\ln t-\frac{3}{4}t^2\right)$. g) $y=c_1e^x\cos x+c_2e^x\operatorname{sen}x+\frac{1}{3}e^x\cos x\ln(\cos x)+\frac{1}{3}xe^x\operatorname{sen}x$.

Ejercicio 27 *Resolver de nuevo (pues ya las vimos en la sección anterior) las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, pero ahora por el método de variación de constantes*

$$\begin{array}{ll} a) & x' - tx = 3t \\ b) & y' = 5y + \cos(x) \\ c) & x' - 2x = 4e^{2t} \end{array}$$

Solución: a) $x = Ce^{t^2/2} - 3$. b) $y = \frac{1}{26}(\operatorname{sen}(x) - 5\cos(x)) + Ce^{5x}$. c) $x = (4t + C)e^{2t}$.

Ejercicio 28 *Resolver los siguientes problemas de valores iniciales mediante el método de variación de las constantes:*

$$\begin{array}{ll} a) & x' + 3x = e^{-3t},\ x(1) = 5 \\ b) & x' - \frac{x}{t} = \frac{1}{1+t^2},\ x(2) = 0 \end{array}$$

Solución: a) $x(t) = (t + 5e^3 - 1)e^{-3t}$. b) $x(t) = t\ln\left(\frac{\sqrt{5}t}{2\sqrt{1+t^2}}\right)$.

Ejercicio 29 *Resolver, mediante el método CI, las siguientes ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{array}{llll} a) & y''' - 3y' + 2y = 6e^x & e) & y'' - 8y' + 16y = (1-x)e^{4x} \\ b) & y''' - y'' + y' - y = x^2 + x & f) & y'' + y = \operatorname{sen} t \\ c) & y'' + 2y' + 2y = 4\cos t + 2\operatorname{sen} t & g) & y''' + 3y'' + 2y' = x + 1 \\ d) & y''' - 2y'' - y' + 2y = -2e^x & & \end{array}$$

Solución: a) $y = (c_1 + c_2x)e^x + c_3e^{-2x} + x^2e^x$. b) $y = c_1e^x + c_2\cos x + c_3\operatorname{sen} x - x^2 - 3x - 1$. c) $y = e^{-t}(c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t) + 2\operatorname{sen} t$. d) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-x} + xe^x$. e) $y = (c_1 + c_2x)e^{4x} + e^{4x}(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6})$. f) $y = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}t\cos t$. g) $y = c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{-2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}$.

Ecuaciones de coeficientes variables

Ejercicio 30 *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Cauchy-Euler y de Legendre:*

$$\begin{array}{ll} a) & x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = \frac{x^4+1}{x};\ x > 0 \\ b) & x^2y''' + 2xy'' - 4y' + 4\frac{y}{x} = 2x;\ x > 0 \\ c) & x^2y''' + 5xy'' + 3y' = x;\ x > 0 \\ d) & (x+2)^2y'' - (x+2)y' + y = 3x + 4;\ x > -2 \\ e) & (2x+3)^3y''' - (16x+24)y' + 32y = 0;\ x > -3/2 \\ f) & (1-x)y'' - 2y' + \frac{2}{x-1}y = 1;\ x > 1 \end{array}$$

Solución: a) $y = c_1x + c_2x\ln x + c_3x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{12x}$. b) $y = c_1x + c_2x^2 + \frac{c_3}{x^2} + \frac{x^2}{2}\ln x$. c) $y = c_1 + c_2\ln x + \frac{c_3}{x^2} + \frac{1}{16}x^2$. d) $y = c_1(x+2) + c_2(x+2)\ln(x+2) + \frac{3}{2}(x+2)\ln^2(x+2) - 2$. e) $y = \frac{c_1}{2x+3} + c_2(2x+3)^2 + c_3(2x+3)^2\ln(2x+3)$. f) $y = c_1(x-1) + \frac{c_2}{(x-1)^2} - \frac{1}{3}(x-1)\ln(x-1)$.

Algunas Aplicaciones Prácticas

Ejercicio 31 *En el extremo inferior de un muelle sujeto al techo, de constante elástica $k = 100$, se fija un cuerpo de 4 Kilogramos de masa. En el instante $t = 0$, se lleva el cuerpo 20 centímetros por debajo de su posición de equilibrio y se le abandona en esa posición con una velocidad de 1 metro por segundo dirigida hacia abajo. Despreciando la resistencia del medio y suponiendo que no actúan fuerzas exteriores, calcular el desplazamiento en función del tiempo, calculando la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento.*

Solución: $x(t) = \frac{1}{5}\cos 5t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t = \frac{\sqrt{2}}{5}\cos(5t - \frac{\pi}{4})$ (mov. armónico simple).

Ejercicio 32 *Estúdiese el movimiento del cuerpo del problema anterior suponiendo que, además, actúa sobre el cuerpo una fuerza que (en Newtons) viene expresada como función del tiempo por $8\cos 5t$.*

Solución: $x(t) = \frac{1}{5}\cos 5t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t + \frac{1}{5}t\operatorname{sen} 5t = \frac{\sqrt{2}}{5}\cos(5t - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{5}t\operatorname{sen} 5t$ (resonancia).

Ejercicio 33 *Del extremo inferior de un muelle fijado al techo, de constante elástica $k = 320$, se suspende un objeto de 16 Kilogramos de masa. A continuación, se lleva el objeto 20 centímetros por debajo de la posición de equilibrio y se le abandona en esa posición con una velocidad de 1,2 metros por segundo dirigida hacia arriba. Estúdiese el desplazamiento del objeto, suponiendo que no existen fuerzas exteriores y que el medio opone una resistencia al movimiento que numéricamente (en newtons) vale $64v$, siendo v la velocidad (en metros por segundo).*

Solución: $x(t) = e^{-2t}(\frac{1}{5}\cos 4t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 4t) = \frac{\sqrt{2}}{5}e^{-2t}\cos(4t + \frac{\pi}{4})$ (mov. subamortiguado).

Ejercicio 34 *Resuélvase el problema anterior suponiendo que, además, actúa sobre el sistema una fuerza variable dada como función del tiempo (en Newtons) por $32\cos 2t$.*

Solución: $x(t) = e^{-2t}(\frac{1}{10}\cos 4t - \frac{11}{40}\operatorname{sen} 4t) + \frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{20}\operatorname{sen} 2t$ (rég. transitorio y rég. estacionario).

Ejercicio 35 *Un circuito RLC de corriente alterna está formado por los siguientes elementos: una resistencia de 4 Ω, un capacitor de 4 mF, un inductor de 25 mH y un fuente de voltaje $V = 110\cos 60t$ V. Determinar la carga $Q(t)$ en todo tiempo, si inicialmente la carga sobre el capacitor es cero y no fluye corriente por el circuito.*

Solución: $Q(t) = \frac{11}{52}\cos 60t + \frac{33}{104}\operatorname{sen} 60t - \frac{11}{52}e^{-80t}\cos 60t - \frac{187}{312}e^{-80t}\operatorname{sen} 60t.$

Ejercicio 36 *Un circuito RLC está formado por un resistor $R = 12\ \Omega$, un capacitor $C = 0{,}1$ F y un inductor $L = 2$ H. Se conecta una fuente de voltaje que suministra $20\cos 5t$ V. Si inicialmente el capacitor está descargado y no circula corriente alguna por el circuito, encuentre una expresión para la carga en todo tiempo t.*

Solución: $Q(t) = -\frac{2}{13}\cos 5t + \frac{3}{13}\operatorname{sen} 5t - \frac{5}{52}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-5t}.$

SISTEMAS DE ECUACIONES

Sistemas de Cramer

Ejercicio 37 *Resolver mediante el método de Cramer el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} y_1'' - y_2' = x + 1 \\ y_1' + y_2' - 3y_1 + y_2 = 2x - 1 \end{cases}$$

Solución: $y_1 = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-3x} - \frac{1}{6}x^2 - \frac{14}{9}x$; $y_2 = 3c_1 + c_2e^x - 3c_3e^{-3x} + \frac{17}{9} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x.$

Ejercicio 38 *Resolver mediante el método de Cramer el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} 2y_1' + y_2' + y_1 = 3x^2 \\ y_1' + y_2' - y_1 - y_2 = 3x^2 - x^3 \end{cases}$$

Solución: $y_1 = c_1e^x + c_2e^{-x}$; $y_2 = -3c_1e^x - c_2e^{-x} + x^3.$

Ejercicio 39 *Resolver mediante el método de Cramer el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} x''(t) - x(t) + y''(t) + y(t) = 0 \\ x'(t) + 2x(t) + y'(t) + 2y(t) = 0 \end{cases}$$

Solución: $x = Ae^{-2t}$; $y = -\frac{3}{5}Ae^{-2t}.$

Ejercicio 40 *Resolver mediante el método de Cramer el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) + y'(t) = -5e^{2t} \\ x''(t) - x(t) + y''(t) = -13e^{2t} \end{cases}$$

Solución: $x = Be^{-t} + e^{2t}$; $y = A - 4e^{2t}.$

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Propiedades de la transformada

Ejercicio 41 *Calcular, usando las propiedades adecuadas, la transformada de Laplace de las siguientes funciones:*

$$a)\ f(t) = A(t-\alpha)\ si\ t \geq \alpha\ y\ f(t) = 0\ si\ t < \alpha;\ b)\ f(t) = \operatorname{sen}^2 t$$

Solución: a) $\frac{A}{s^2}e^{-\alpha s}$. b) $\frac{2}{s(s^2+4)}$.

Ejercicio 42 *Calcular, usando las propiedades adecuadas, la transformada de Laplace de la siguiente función:*

$$f(t) = 0\ si\ t < 3\ y\ f(t) = t\ si\ t \geq 3$$

Solución: $e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}\right)$.

Ejercicio 43 *Calcular, usando las propiedades adecuadas, la transformada de Laplace de las siguientes funciones:*

$$a)\ \mathcal{L}\left[t \operatorname{sen} bt\right];\ b)\ \mathcal{L}\left[bt\cos bt - \operatorname{sen} bt\right]$$

Solución: a) $\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$. b) $\frac{2bs^2}{(s^2+b^2)^2}$.

Ejercicio 44 *Calcular, usando las propiedades adecuadas, la transformada de Laplace de las siguientes funciones:*

$$a)\ \mathcal{L}\left[\int_0^t \cos x dx\right];\ b)\ \mathcal{L}\left[\int_0^t e^t \operatorname{sen}(t-u)du\right]$$

Solución: a) $\frac{1}{s^2+1}$; b) $\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$.

Propiedades de la transformada inversa

Ejercicio 45 *Calcular las siguientes transformadas inversas, aplicando las propiedades necesarias*

$$a)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)}\right];\ b)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-2s+5}\right];\ \ c)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{\pi s}{3}}}{s^2+1}\right];\ \ d)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{4s^2+16}\right]$$

Solución: a) $t - \operatorname{sen} t$. b) $\frac{1}{2}e^t \operatorname{sen} 2t$. c) $\operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$ si $t > \frac{\pi}{3}$, y es 0 si $t < \frac{\pi}{3}$. d) $\frac{1}{2}\cos 2t$.

Ejercicio 46 *Calcular las siguientes transformadas inversas, aplicando las propiedades necesarias*

$$a)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}\right];\ \ b)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\left(s^2+4\right)}\right];\ c)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right]$$

Solución: a) $\frac{1}{2}t\operatorname{sen} t$. b) $\frac{1}{4}(1-\cos 2t)$. c) $e^{2t}(1-e^{-t})$.

Transformadas inversas de funciones racionales

Ejercicio 47 *Calcular las transformadas inversas*

$$a)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right];\ b)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right]$$

Solución: a) $-\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}$. b) $2e^t - 2\cos t + \operatorname{sen} t$.

Ejercicio 48 *Calcular las transformadas inversas*

$$a)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right];\ b)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right]$$

Solución: a) $\frac{1}{3}e^{-t}(\operatorname{sen} t+\operatorname{sen} 2t)$. b) $-\frac{1}{3}e^{-t}+\left(-\frac{7}{2}t^2+4t+\frac{1}{3}\right)e^{2t}$.

Ejercicio 49 *Calcular la transformada inversa*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s^3+s^2-1}{(s+1)(s^2+1)^2}\right]$$

Solución: $-\frac{1}{2}e^{-t}+\left(t+\frac{1}{2}\right)\cos t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t$.

Resolución de ecuaciones diferenciales

Ejercicio 50 *Resolver el problema de valores iniciales*

$$y'-3y(t)=e^{2t};\quad con\ y(0)=1$$

Solución: $y(t)=-e^{2t}+2e^{3t}$.

Ejercicio 51 *Resolver el problema de valores iniciales*

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x=e^{-t};\quad con\ x(0)=x'(0)=0$$

Solución: $y(t)=\frac{1}{4}e^{t}-\frac{5}{4}e^{-t}+e^{-t}t$.

Ejercicio 52 ♦ *Resolver el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} y''+a^2y=f(t) \\ y(0)=1;\quad y'(0)=-2 \end{cases}$$

Solución: $y(t)=\cos at-\frac{2}{a}\operatorname{sen} at+\frac{1}{a}\int_0^t f(\tau)\operatorname{sen} a(t-\tau)d\tau$.

Ejercicio 53 *Resolver el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} y'''-3y''+3y'-y=t^2e^t \\ y(0)=1; y'(0)=0; y''(0)=-2 \end{cases}$$

Solución: $y(t)=\left(\frac{1}{60}t^5-\frac{1}{2}t^2-t+1\right)e^t$.

Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales

Ejercicio 54 *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} 2x'(t)+y'(t)-y(t)=t \\ x'(t)+y'(t)=t^2 \end{cases}$$

con las condiciones: $x(0)=1$, $y(0)=0$.

Solución: $x(t)=-4+5t-2t^2+\frac{1}{3}t^3+5e^{-t};\ y(t)=5-5t+2t^2-5e^{-t}$.

Ejercicio 55 *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} x'(t)=2x-3y \\ y'(t)=-2x+y \end{cases}$$

con las condiciones: $x(0)=8$, $y(0)=3$.

Solución: $x(t)=5e^{-t}+3e^{4t};\ y(t)=5e^{-t}-2e^{4t}$.

Ejercicio 56 ♦ *Obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} 4x'(t)-y'(t)+3x=\operatorname{sen} t \\ x'(t)+y=\cos t \end{cases}$$

Solución: $x(t)=Ae^{-t}+Be^{-3t};\ y(t)=\cos t+Ae^{-t}+3Be^{-3t}$.