EJERCICIOS TEMA 4
SERIES DE FOURIER. APLICACIONES

SERIES DE FOURIER

Funciones periódicas

Ejercicio 1 *Hallar la serie de Fourier de la función* $f(x)$*, de periodo* 2π*, definida por:* $f(x) = -1$ *si* $-\pi \leq x \leq 0$; $f(x) = 1$ *si* $0 < x \leq \pi$.

Solución: $f(x) \sim S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen}(2n-1)x$.

Ejercicio 2 *Hallar la serie de Fourier de la función* $f(x)$*, de periodo* 2π*, definida por:* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *si* $x \in [0, \pi]$; $f(x) = 0$ *si* $x \in (\pi, 2\pi)$.

Solución: $f(x) \sim S(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)} \cos 2nx$.

Ejercicio 3 *Hallar la serie de Fourier de la función* $f(x)$*, de periodo* 2π*, definida por:* $f(x) = 0$ *si* $-\pi \leq x \leq 0$; $f(x) = x$ *si* $0 < x \leq \pi$.

Solución: $f(x) \sim S(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx \right)$.

Ejercicio 4 *Hallar la serie de Fourier de la función* $f(x)$*, de periodo* 2π*, definida por:* $f(x) = 0$ *si* $-\pi < x < 0$; $f(x) = \pi - x$ *si* $0 \leq x < \pi$.

Solución: $f(x) \sim S(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx \right)$.

Ejercicio 5 *Hallar la serie de Fourier de la función* $f(x)$*, de periodo* 2π*, definida por:* $f(x) = x$ *si* $0 \leq x \leq 2\pi$.

Solución: $f(x) \sim S(x) = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \operatorname{sen} nx$.

Ejercicio 6 *a) Dada la función de periodo* 2π, $f(x) = px$, *si* $-\pi \leq x \leq 0$; $f(x) = qx$, *si* $0 < x \leq \pi$, *desarrollarla en serie de Fourier (p y q son constantes positivas). b) Aplicar el desarrollo anterior para calcular la suma de la serie:* $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Solución: a) $f(x) \sim \frac{\pi}{4}(q-p) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2}(p-q)\cos(2n-1)x + (-1)^{n+1} \frac{p+q}{n} \operatorname{sen} nx \right)$. b) $S = \frac{\pi^2}{8}$.

Ejercicio 7 *Dada la función* 2π *periódica,* $f(x) = x$, *si* $-\pi \leq x \leq 0$; $f(x) = 0$, *si* $0 < x \leq \pi$, *y usando la igualdad de Parseval, calcular* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, *sabiendo que* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Solución: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15} \frac{\pi^4}{96}$.

Ejercicio 8 *a) Desarrollar en serie de Fourier la función* 2π *- periódica definida por:* $f(x) = 2\pi - x$; $0 \leq x \leq 2\pi$. *b) Eligiendo un valor adecuado para* x *en la serie resultante, calcular la suma de la serie numérica:* $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Solución: a) $f(x) \sim \pi + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \operatorname{sen} nx$. b) $S = \frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 9 *Desarrollar en serie de Fourier la función periódica $f(x)$ de periodo 2π, definida por: $f(x) = x$, $-\pi < x \leq \pi$.*

Solución: $f(x) \sim S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx$.

Ejercicio 10 *Desarrollar en serie de Fourier la función periódica $f(x)$ de periodo 2π definida por: $f(x) = -x$ si $-\pi \leq x \leq 0$; $f(x) = x$ si $0 < x \leq \pi$.*

Solución: $f(x) \sim S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$.

Ejercicio 11 *Desarrollar en serie de Fourier la función periódica $f(x)$ de periodo 2π definida por: $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.*

Solución: $f(x) \sim S(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$.

Ejercicio 12 *a) Sea la función de periodo 2π, $f(x) = 1$, si $|x| \leq 1$; $f(x) = 0$, si $1 < |x| \leq \pi$. Escribir la igualdad de Parseval. b) Calcular la suma de la serie numérica: $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^2}$.*

Solución: a) $\frac{1}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^2} = \frac{1}{\pi}$; b) $S = \frac{\pi - 1}{2}$.

Ejercicio 13 ♦ *a) Sea la función de periodo 2π, $f(x) = 1$, si $|x| \leq \alpha$; $f(x) = 0$, si $\alpha < |x| \leq \pi$. Escribir la igualdad de Parseval. b) Calcular después las sumas $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n\alpha}{n^2}$ y $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$ teniendo en cuenta que: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}$.*

Solución: a) $\frac{2\alpha}{\pi} = \frac{2\alpha^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n\alpha}{n^2}$; b) $S_1 = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}$; $S_2 = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}$.

Ejercicio 14 *Hallar la serie de Fourier de la función de periodo $T = 2l = 4$ definida por: $f(x) = 0$ si $-2 \leq x < -1$; $f(x) = k$ si $-1 \leq x \leq 1$; $f(x) = 0$ si $1 < x \leq 2$.*

Solución: $f(x) \sim \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\cos \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} x + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2} x - \ ...\right)$.

Ejercicio 15 *Desarrollar en serie de Fourier la función periódica $f(x)$ de periodo $2l$, definida en el intervalo $[-l, l]$ por: $f(x) = |x|$.*

Solución: $f(x) \sim \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi}{l} x$.

Ejercicio 16 *Hallar el desarrollo en serie de Fourier, de la función de periodo 1, definida por: $f(x) = x$; $x \in [1, 2]$.*

Solución: $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n\pi} \operatorname{sen} 2n\pi x$.

Ejercicio 17 *a) Hallar el desarrollo en serie de Fourier de la función periódica de periodo 1, definida por: $f(x) = x^2$; $1 \leq x < 2$. b) Como aplicación del apartado anterior, obtener la suma de la serie numérica: $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.*

Solución: a) $f(x) \sim \frac{7}{8} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(2n\pi x) - \frac{3}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi x)$. b) $S = \frac{\pi^2}{6}$.

Ejercicio 18 *a) Hallar el desarrollo en serie de Fourier, de la función de periodo 6, definida por: $f(x) = 0$, si $x \in [-3, 0]$; $f(x) = x - 3$, si $x \in (0, 3]$. b) Calcular la suma de la serie de Fourier en $x = 36$. c) ¿Qué serie numérica se obtiene para $x = 3$?. ¿Cúal es su suma?*

Solución: a) $f(x) \sim \frac{-3}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-6}{(2n-1)^2\pi^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{3} - \frac{3}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3}$. b) $S = \frac{-3}{2}$. c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Ejercicio 19 *a) Hallar el desarrollo en serie de Fourier, de la función de periodo 4, definida por: $f(x) = 0$, si $x \in [0, 2]$; $f(x) = 2x - 4$, si $x \in (2, 4]$. b) Calcular la suma de la serie de Fourier en $x = 40$. c) Calcular la suma de la serie numérica $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.*

Solución: a) $f(x) \sim 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} - \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}$. b) $S = 2$. c) $S = \frac{\pi^2}{8}$.

Ejercicio 20 *Hallar el desarrollo en serie de Fourier, de la función de periodo 2, definida por: $f(x) = x$, si $x \in [0,1]$; $f(x) = 1 - x$, si $x \in (1,2]$.*

Solución: $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) \cos n\pi x + \frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n) \operatorname{sen} n\pi x$.

Ejercicio 21 *a) Hallar el desarrollo en serie de Fourier, de la función de periodo 2, definida por: $f(x) = 4x - x^2$; $x \in [0,2]$. b) Como aplicación del apartado anterior calcular la suma de las series numéricas: $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$; $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. c) Plantear (sin simplificar) la fórmula de la desviación media cuadrática para $n = 1$.*

Solución: a) $f(x) \sim \frac{8}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n^2\pi^2} \cos n\pi x + \frac{-4}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x$. b) $S_1 = \frac{-\pi^2}{12}$, $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$.

Ejercicio 22 ⧫ *a) Desarrollar en serie de Fourier la función 2π-periódica $f(x) = \pi \cos ax$, $x \in [-\pi, \pi]$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. b) Hallar la suma de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2-n^2}$.*

Solución: a) $f(x) \sim \frac{\operatorname{sen} a\pi}{a} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2a(-1)^n}{a^2-n^2} \operatorname{sen} a\pi \cos nx$; b) $S = \frac{1}{2a \ \operatorname{sen} a\pi} \left[\pi \cos a\pi - \frac{\operatorname{sen} a\pi}{a}\right]$.

Ejercicio 23 ⧫ *Formar la serie de Fourier de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.*

Solución: $S(x) = \operatorname{sen} x$.

Desarrollos de medio rango

Ejercicio 24 *Hallar los desarrollos de medio rango de la función: $f(x) = \dfrac{2k}{l}x$ si $0 \le x < \frac{l}{2}$; $f(x) = \dfrac{2k}{l}(l-x)$ si $\frac{l}{2} < x \le l$.*

Solución: a) $f(x) \sim \frac{k}{2} - \frac{4k}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} \cos \frac{2\pi}{l}x + \frac{1}{3^2} \cos \frac{6\pi}{l}x + \ ...\right)$.
b) $f(x) \sim \frac{8k}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{l}x - \frac{1}{3^2} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{l}x + \frac{1}{5^2} \operatorname{sen} \frac{5\pi}{l}x - ...\right)$.

Ejercicio 25 *Desarrollar $f(x) = x^2$, definida en $0 \le x \le l$. a) En una serie de cosenos. b) En una serie de senos. c) En otra serie de Fourier.*

Solución: a) $f(x) \sim \frac{l^2}{3} + \frac{4l^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{l}x$. b) $f(x) \sim \frac{2l^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]\right\} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l}x$.
c) $f(x) \sim \frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2\pi} \cos \frac{2n\pi}{l}x - \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{l}x\right)$.

Ejercicio 26 *Desarrollar en serie cosenoidal y en serie senoidal de Fourier la función definida por: $f(x) = x - x^2$; $\quad 0 < x < 1$.*

Solución: a) $f(x) \sim \frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos 2\pi x}{4} + \frac{\cos 4\pi x}{16} + \frac{\cos 6\pi x}{36} + \frac{\cos 8\pi x}{64} + \ ...\right)$.
b) $f(x) \sim \frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\operatorname{sen} \pi x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3\pi x}{27} + \frac{\operatorname{sen} 5\pi x}{125} + \frac{\operatorname{sen} 7\pi x}{343} + \ ...\right)$

Ejercicio 27 *Dada la función $f(x) = 1$, si $x \in [0,1]$; $f(x) = 2 - x$, si $x \in (1,2]$, (a) Hallar un desarrollo en serie de Fourier senoidal de $f(x)$. (b) Hallar un desarrollo en serie de Fourier cosenoidal de $f(x)$. c) Calcular la suma de la serie numérica: $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\cos \frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right)$.*

Solución: a) $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} + \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}x$. b) $f(x) \sim \frac{3}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(\cos n\frac{\pi}{2} - (-1)^n\right)}{n^2\pi^2} \cos n\frac{\pi}{2}x$; c) $S = \frac{\pi^2}{16}$.

Ejercicio 28 *a) Hallar un desarrollo en serie de Fourier senoidal de la función $f(x) = \pi x - x^2$; $x \in [0,\pi]$. b) Como aplicación del apartado anterior calcular la suma de la serie numérica: $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$. c) Calcular la suma de la serie numérica: $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6}$.*

Solución: a) $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^3} \operatorname{sen}(2n-1)x$. b) $S_1 = \frac{\pi^3}{32}$. c) $S_2 = \frac{\pi^2}{64} \frac{(10\pi^3 - 9\pi^4)}{15}$.

Ejercicio 29 *Sea $f(x)$ la función definida por: $f(x) = x - x^2$; $x \in [0,1]$. (a) Hallar un desarrollo en serie de Fourier cosenoidal de $f(x)$. (b) Hallar un desarrollo en serie de Fourier senoidal de $f(x)$. (c) Calcular la suma de la serie numérica: $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.*

Solución: a) $f(x) \sim \frac{1}{6} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2\pi^2} \cos 2n\pi x$. b) $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^3\pi^3} \operatorname{sen}(2n-1)\pi x$. c) $S = \frac{\pi^4}{90}$.

PROBLEMAS DE CONTORNO DE STURM-LIOUVILLE

Problema homogéneo de contorno

Ejercicio 30 *Hallar los valores propios y las funciones propias asociadas al problema de Sturm-Liouville: $y'' + \lambda y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$, $y'(0) = y'(\pi) = 0$.*

Solución: $\lambda_n = n^2$, $y_n = k_n \cos nx$, $n = 0, 1, 2, ...$

Ejercicio 31 *Hallar los valores propios y las funciones propias asociadas al problema de Sturm-Liouville: $y'' + \lambda y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$, $y(0) = y(\pi) = 0$.*

Solución: $\lambda_n = n^2$, $y_n = k_n \operatorname{sen} nx$, $n = 1, 2, ...$

Ejercicio 32 *Hallar los valores propios y las funciones propias asociadas al problema de Sturm-Liouville: $y'' + \lambda y = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$, $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$.*

Solución: $\lambda_n = n^{2\cdot}$, $y_n(x) = a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$, $n = 0, 1, 2, ...$

Ejercicio 33 *Hallar los valores propios y las funciones propias asociadas al problema de Sturm-Liouville: $y'' + \lambda y = 0$, $y(-1) = y(1) = 0$.*

Solución: $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}$, $y_n = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi(x+1)}{2}$, $n = 1, 2, ...$

Ejercicio 34 *Hallar los valores propios y las funciones propias asociadas al problema de Sturm-Liouville: $y'' + \lambda y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$, $y'(0) = y(\pi) = 0$.*

Solución: $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4}$, $y_n = k_n \cos \frac{(2n-1)x}{2}$, $n = 1, 2, ...$

Ejercicio 35 *Hallar los valores propios y las funciones propias asociadas al problema de Sturm-Liouville: $y'' + \lambda y = 0$, $\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $y'(\frac{-\pi}{2}) = 0$, $y(\frac{-\pi}{2}) + y(\frac{\pi}{2}) = 0$.*

Solución: $\lambda_n = (2n-1)^2$, $y_n = k_n \operatorname{sen}(2n-1)x$, $n = 1, 2, ...$

Ejercicio 36 *Hallar los valores propios y las funciones propias asociadas al problema de Sturm-Liouville: $y'' + \lambda y = 0$, $0 \leq x \leq 1$, $y'(0) = y'(1) = 0$.*

Solución: $\lambda_n = n^2\pi^2$, $y_n(x) = k_n \cos n\pi x$, $n = 0, 1, 2, ...$

Problema no homogéneo de contorno

Ejercicio 37 *Hallar una solución formal del problema de contorno: $y'' + \lambda y = x$, $0 \leq x \leq \pi$, $y'(0) = y'(\pi) = 0$. (Suponemos que λ no es valor propio del problema homogéneo asociado).*

Solución: $y = \frac{\pi}{2\lambda} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2\left[\lambda-(2n-1)^2\right]} \cos(2n-1)x$.

Ejercicio 38 *Hallar una solución formal del problema de contorno: $y'' + \lambda y = \pi x - x^2$, $0 \leq x \leq \pi$, $y(0) = y(\pi) = 0$. (Suponemos que λ no es valor propio del problema homogéneo asociado).*

Solución: $y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2n-1)^3\left[\lambda-(2n-1)^2\right]}\operatorname{sen}(2n-1)\,x.$

Ejercicio 39 *Obtener la solución formal del problema no homogéneo:* $y''+\lambda y=f(x)$, $0\le x\le 2\pi$, $y(0)=y(2\pi)$; $y'(0)=y'(2\pi)$ *siendo* f *la función definida en* $[0,2\pi]$ *por:* $f(x)=x$ *si* $0\le x\le \pi/2$; $f(x)=\pi/2$ *si* $\pi/2<x\le 3\pi/2$; $f(x)=-x+2\pi$ *si* $3\pi/2<x\le 2\pi$. *(Se supone que* λ *no es valor propio del problema homogéneo asociado).*

Solución: $y=\frac{3\pi}{8\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\cos n\pi/2-1}{n^2(\lambda-n^2)}\cos nx.$

Ejercicio 40 *Obtener la solución formal del problema no homogéneo:* $y''+\lambda y=f(x)$, $y(-1)=y(1)=0$ *siendo* f *la función* $f(x)=x+1$, $x\in[-1,1]$. *(Se supone que* λ *no es valor propio del problema homogéneo asociado).*

Solución: $y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}}{\left(\lambda-\frac{n^2\pi^2}{4}\right)}\operatorname{sen}\frac{n\pi(x+1)}{2}.$

Ejercicio 41 *Hallar una solución formal del problema no homogéneo de contorno:* $y''+\lambda y=x-x^2$, $0\le x\le 1$, $y'(0)=y'(1)=0$. *Nota: Se supone que para el problema no homogéneo de contorno (*$\lambda\neq n^2\pi^2; n=0,1,2,...$*).*

Solución: $y(x)=\frac{1}{3\lambda}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{-2((-1)^n+1)}{n^2\pi^2}}{\lambda-n^2\pi^2}\cos n\pi x.$

Ejercicio 42 *a) Hallar un desarrollo en serie de Fourier senoidal de la función* $f(x)=(x-1)^2$; $x\in[0,1]$. *b) Calcular la suma de la serie de Fourier anterior en los puntos:* $x=22$; $x=\frac{45}{2}$. *c) Calcular la desviación media cuadrática para* $n=1$.

Solución: a) $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}+\frac{4}{n^3\pi^3}((-1)^n-1)\right)\operatorname{sen} n\pi x$. b) $S(22)=0$, $S(45/2)=1/4$. c) $\delta_1^2\simeq 0{,}13$.

Ejercicio 43 *Hallar una solución formal del problema no homogéneo de contorno:* $y''+\lambda y=(x-1)^2$, $0\le x\le 1$, $y(0)=y(1)=0$, *sabiendo que los valores propios y las correspondientes funciones propias del problema homogéneo asociado son:* $\lambda_n=n^2\pi^2$, $y_n=k_n\operatorname{sen} n\pi x$, $(n=1,2,...)$. *Nota: Se supone que para el problema no homogéneo de contorno (*$\lambda\neq n^2\pi^2; n=1,2,...$*).*

Solución: $y(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{2}{n\pi}+\frac{4}{n^3\pi^3}((-1)^n-1)\right)}{\lambda-n^2\pi^2}\operatorname{sen} n\pi x.$

Ejercicio 44 *a) Hallar un desarrollo en serie de Fourier cosenoidal de la función* $f(x)=1-x^2$; $x\in[0,1]$. *b) Como aplicación del apartado anterior calcular la suma de las series numéricas:* $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$; $S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Solución: a) $f(x)\sim\frac{4}{6}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$. b) $S_1=\frac{-\pi^2}{12}$; $S_2=\frac{\pi^2}{6}$.

Ejercicio 45 *Hallar una solución formal del problema no homogéneo de contorno:* $y''+\lambda y=1-x^2$; $0\le x\le 1$, $y'(0)=y'(1)=0$, *sabiendo que los valores propios y las correspondientes funciones propias del problema homogéneo asociado son:* $\lambda_n=n^2\pi^2$, $y_n=k_n\cos n\pi x$, $(n=0,1,2,...)$. *Nota: Se supone que para el problema no homogéneo de contorno (*$\lambda\neq n^2\pi^2; n=0,1,2,...$*).*

Solución: $y(x)=\frac{2}{3\lambda}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-4(-1)^n}{n^2\pi^2(\lambda-n^2\pi^2)}\cos n\pi x.$

Ejercicio 46 *a) Hallar un desarrollo en serie de Fourier cosenoidal de la función:* $f(x)=2\pi x-x^2$; $x\in[0,\pi]$. *b) Como aplicación del apartado anterior calcular la suma de la serie numérica:* $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Solución: a) $f(x)\sim\frac{2}{3}\pi^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{n^2}\cos nx$. b) $S_1=\frac{-\pi^2}{12}$.

Ejercicio 47 *Hallar una solución formal del problema no homogéneo de contorno:* $y''+\lambda y=2\pi x-x^2$; $0\le x\le\pi$, $y'(0)=y'(\pi)=0$, *sabiendo que los valores propios y las funciones propias del problema homogéneo asociado son:* $\lambda_n=n^2$, $y_n=k_n\cos nx$, $(n=0,1,2,...)$. *Nota: Se supone que para el problema no homogéneo de contorno (*$\lambda\neq n^2; n=0,1,2,...$*).*

Solución: $y(x) = \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{\lambda} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(\lambda - n^2)n^2} \cos nx.$

Ejercicio 48 *a) Hallar un desarrollo en serie de Fourier senoidal de la función* $f(x) = \pi^2 - x^2$; $x \in [0, \pi]$. *b) Hallar una solución formal del problema no homogéneo de contorno:* $y'' + \lambda y = \pi^2 - x^2$; $0 \le x \le \pi$, $y(0) = y(\pi) = 0$, *sabiendo que los valores propios y las correspondientes funciones propias del problema homogéneo asociado son:* $\lambda_n = n^2$, $y_n = k_n \operatorname{sen} nx$, $(n = 1, 2, ...)$. *Nota: Se supone que para el problema no homogéneo de contorno* $(\lambda \neq n^2; n = 1, 2, ...)$.

Solución: a) $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{n} + \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}\right) \operatorname{sen} nx$. b) $y(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}\right)}{\lambda - n^2} \operatorname{sen} nx.$

Ejercicio 49 *a) Hallar un desarrollo en serie de Fourier cosenoidal de la función* $f(x) = (x-\pi)^2$; $x \in [0, \pi]$. *b) Hallar una solución formal del problema no homogéneo de contorno:* $y'' + \lambda y = (x - \pi)^2$; $0 \le x \le \pi$, $y'(0) = y'(\pi) = 0$, *sabiendo que los valores propios y las correspondientes funciones propias del problema homogéneo asociado son:* $\lambda_n = n^2$, $y_n = k_n \cos nx$, $(n = 0, 1, 2, ...)$. *Nota: Se supone que para el problema no homogéneo de contorno* $(\lambda \neq n^2; n = 0, 1, 2, ...)$.

Solución: a) $f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos nx$. b) $y(x) = \frac{\pi^2}{3\lambda} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2(\lambda - n^2)} \cos nx.$

Ejercicio 50 ♦ *Determinar los valores propios y las funciones propias del problema:* $x'' + 4x' + (4 + 9\lambda)x = 0$, $x(0) = x'(1) = 0$.

Solución: los valores propios son aquellos $\lambda > 0$ que satisfacen la ecuación $3\sqrt{\lambda}\cos(3\sqrt{\lambda}) = 2\operatorname{sen}\left(3\sqrt{\lambda}\right)$ y las funciones propias asociadas $x_\lambda(t) = Ae^{-2t}\operatorname{sen}\left(3\sqrt{\lambda}t\right)$.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

Ecuación de onda

Ejercicio 51 *Resolver, por el método de separación de variables, el problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} & t \ge 0,\ 0 < x < \pi \\ y(0,t) = y(\pi,t) = 0 & t \ge 0 \\ y(x,0) = x(\pi - x),\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solución: $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)^3} \operatorname{sen}(2n-1)x \cos(2n-1)t.$

Ejercicio 52 *Resolver, por el método de separación de variables, el problema*

$$\begin{cases} 4\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 9\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} & t \ge 0,\ 0 < x < \pi \\ y(0,t) = y(\pi,t) = 0 & t \ge 0 \\ y(x,0) = \operatorname{sen}^2 x,\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \operatorname{sen} x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solución: $y = \frac{3}{2}\operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{2t}{3} - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n-3)} \operatorname{sen}(2n-1)x \cos\frac{2(2n-1)t}{3}.$

Ejercicio 53 *Resolver, por el método de separación de variables, el problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} & t \ge 0,\ 0 < x < \pi \\ y(0,t) = y(\pi,t) = 0 & t \ge 0 \\ y(x,0) = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{4},\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \operatorname{sen} x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solución: $y(x,t) = \operatorname{sen} x\left(\frac{3}{16}\cos\frac{t}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{16}\operatorname{sen} 3x \cos\frac{3t}{2}.$

Ejercicio 54 *En el plano OXY se dispone de una cuerda elástica tensa de longitud un metro, cuyos extremos se hallan fijos en el eje OX. Se desplaza el punto medio de la cuerda, en el plano OXY, una distancia de $1cm$ en el sentido positivo del eje OY, y desde esa posición, en el instante $t=0$, se suelta la cuerda permitiendo que ésta vibre. Hallar $y(x,t)$, por el método de separación de variables, siendo $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ la ecuación que determina el desplazamiento $y(x,t)$ del punto de abscisa x en el instante t.*

Solución: $y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{25(2n-1)^2\pi^2}\operatorname{sen}(2n-1)\pi x\cos(2n-1)\pi t.$

Ecuación del calor

Ejercicio 55 *Resolver, por el método de separación de variables, el problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t} & 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0 & t>0 \\ u(x,0)=100 & 0<x<\pi \end{cases}$$

Solución: $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{400}{(2n-1)\pi}e^{-(2n-1)^2t}\operatorname{sen}(2n-1)x.$

Ejercicio 56 *Resolver, por el método de separación de variables, el problema*

$$\begin{cases} 7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t} & 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 & t>0 \\ u(x,0)=3\operatorname{sen}2x-6\operatorname{sen}5x & 0<x<\pi \end{cases}$$

Solución: $u(x,t)=3e^{-28t}\operatorname{sen}2x-6e^{-175t}\operatorname{sen}5x.$

Ejercicio 57 *Consideramos una varilla metálica aislada de longitud π, cuyos extremos se mantienen a $0\ ^oC$, y tomamos como eje de referencia OX, el eje de la varilla con origen O en un extremo de la misma. Denotamos por $T(x,t)$ la temperatura en el instante t del punto de la varilla que tiene abscisa x. Se supone que la ecuación diferencial de la variación de temperaturas es $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial T}{\partial t}$. Si la temperatura inicial es $T(x,0)=f(x)$, hallar T, por el método de separación de variables, con $f(x)=100\operatorname{sen}x,\ 0<x<\pi$.*

Solución: $T(x,t)=100e^{-t}\operatorname{sen}x.$

Ecuación de Laplace

Ejercicio 58 *Hallar la temperatura $u(x,y)$, en estado estacionario, en una lámina cuadrada de caras aisladas que, en el plano OXY, está delimitada por las rectas $x=0,\ x=L,\ y=0,\ y=L$. Supongamos que el borde superior de la lámina se mantiene a temperatura $u(x,L)=f(x)$, mientras que los demás bordes de mantienen a $0\ ^oC$, en los siguientes casos: a) $f(x)=100,\quad 0\le x\le L$. b) $f(x)=x(L-x),\quad 0\le x\le L$.*

Solución: a) $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{400}{(2n-1)\pi\operatorname{sh}(2n-1)\pi}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{L}\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi y}{L}.$
b) $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8L^2}{\operatorname{sh}[(2n-1)\pi]\pi^3(2n-1)^3}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{L}\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi y}{L}.$

Método de separación de variables

Ejercicio 59 *Resolver, por el método de separación de variables, el problema*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$$

$$\begin{array}{ll} z(x,0)=0,\ z(x,1)=x-1 & \forall x\in(1,2) \\ z(1,y)=z(2,y)=0 & \forall y\in[0,1] \end{array}$$

Solución: $z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\operatorname{sen} n\pi x\left(e^{n\pi y/2}-e^{-n\pi y/2}\right)}{n\pi\left(e^{-n\pi/2}-e^{n\pi/2}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\frac{\operatorname{sh}(n\pi y/2)}{\operatorname{sh}(n\pi/2)}$.

Ejercicio 60 *Resolver, por el método de separación de variables, el problema*

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-x\frac{\partial z}{\partial x}+z=0,\ 1\le x\le e,\ 0\le y\le 2$$
$$\begin{cases} z(1,y)=z(e,y)=0 & \forall y\in[0,2]\\ z(x,0)=x & \forall x\in(1,e)\\ z(x,2)=0 & \forall x\in(1,e)\end{cases}$$

Solución: $z=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n\right)\frac{2}{n\pi}x\operatorname{sen}\left[n\pi\ln x\right]\left(\frac{e^{n\pi y}}{1-e^{4n\pi}}+\frac{e^{-n\pi y}}{1-e^{-4n\pi}}\right)$.

Ejercicio 61 *Resolver, por el método de separación de variables, el problema*

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial z}{\partial y} & 0\le x\le\pi,\ y\ge 0\\ \dfrac{\partial z}{\partial x}(0,y)=0 & \forall y\ge 0\\ z(0,y)=z(\pi,y) & \forall y\ge 0\\ z(x,0)=\operatorname{sen} x & \forall x\in[0,\pi]\end{cases}$$

Solución: $z=\frac{2}{\pi}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\cos 2nxe^{-2n^2y^2}$.

Ejercicio 62 *Resolver, mediante el método de separación de variables, el siguiente problema mixto para la ecuación del calor:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u & 0\le x\le\pi,\ t>0\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 & t>0\\ u(x,0)=3\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 3x & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

Solución: $u(x,t)=3\operatorname{sen} x+e^{-8t}\operatorname{sen} 3x$.

Ejercicio 63 *Resolver, mediante el método de separación de variables, el siguiente problema de difusión:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & 0\le x\le\pi,\ t>0\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)=0 & t>0\\ u(x,0)=1+5\cos 3x & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

Solución: $u(x,t)=1+5e^{-9t}\cos 3x$.

Ejercicio 64 *Resolver, mediante el método de separación de variables, el siguiente problema mixto para la ecuación del telégrafo:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial t}-u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0\le x\le\pi,\ t>0\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 & t>0\\ u(x,0)=\operatorname{sen} x;\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0 & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

Solución: $u(x,t)=e^{-t}\operatorname{sen} x(\cos t+\operatorname{sen} t)$.

Ejercicio 65 *Resolver, por el método de separación de variables, el problema:*

$$\begin{aligned} y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial z}{\partial y},\ 1\le x\le 2,\ y\ge 0\\ z(1,y) &= z(2,y)=0,\ \forall y\ge 0\\ z(x,0) &= x-1,\ \forall x\in(1,2)\end{aligned}$$

Solución: $z(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi x\cdot e^{\frac{-n^2\pi^2y^2}{2}}$.