EJERCICIOS TEMA 5
FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Límites y Continuidad

Ejercicio 1 *Sea* $f(z)=\frac{x^2+x}{x+y}+\frac{i(y^2+y)}{x+y}$. *Demostrar que no existe* $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$.

Ejercicio 2 *Estudiar la continuidad en* $z=i$ *de la función:* $f(z)=\begin{cases} \frac{z^2+1}{z-i} & si \quad z\neq i \\ 3i & si \quad z=i \end{cases}$.

Solución: Discontinua.

Ejercicio 3 *Comprobar que no existe el límite:* $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\overline{z}+iz^2}{|z|}$.

Ejercicio 4 *Calcular* $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\overline{z}+iz^2}{\sqrt{|z|}}$.

Solución: 0.

Ejercicio 5 *Calcular* $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{|z|}$.

Solución: No existe.

Ejercicio 6 *Calcular* $\lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{(z+\overline{z})^3}{z|z|}+z\right)$.

Solución: 0.

Ejercicio 7 *Estudiar la continuidad de la función:* $f(z)=\begin{cases} \frac{\overline{z}+iz}{\sqrt{|z|}} & si \quad z\neq 0 \\ 0 & si \quad z=0 \end{cases}$.

Solución: *Continua en todos los puntos.*

Derivadas

Ejercicio 8 *Estudiar la derivabilidad de* $f(z)=z^2$.

Solución: $f'(z)=2z$.

Ejercicio 9 *Estudiar en* $z=0$ *la derivabilidad de* $f(z)=|z|^2$.

Solución: $f'(0)=0$.

Ejercicio 10 *Dada la función* $f(z)=x^2+y^2-2xyi$, *aplicando las condiciones de Cauchy-Riemann, estudiar si es derivable, en los puntos: a)* $z=i$; *b)* $z=1+i$.

Solución: *a) Derivable; b) No derivable.*

Ejercicio 11 *Determinar el subconjunto* A *de* $\mathbb{C}$ *en donde es derivable la función* $f(z)=\overline{z}$ *y el subconjunto* B *en donde es derivable* $g(z)=z\overline{z}$.

Solución: *a) El conjunto vacío; b) El origen $z = 0$.*

Ejercicio 12 *Comprobar que la función $w = f(z) = \sqrt{|xy|}$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en el origen pero que no es derivable en ese punto.*

Ejercicio 13 *Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, hallar las derivadas de las siguientes funciones: a) $f(z) = z^3$. b) $g(z) = \frac{1}{z}$, para $z \neq 0$. c) $h(z) = Lnz$; $h : \mathbb{C} - L_{-\pi} \to (-\pi, \pi)$.*

Solución: *a) $f'(z) = 3z^2$; b) $\frac{-1}{z^2}$*; c) $\frac{1}{z}$.

Integrales

Ejercicio 14 *Calcular $I = \int_C z^2 dz$ donde C es el arco de parábola $y = x^2, 1 \leq x \leq 2$. La dirección de integración es de $(1, 1)$ a $(2, 4)$.*

Solución: $\frac{-86}{3} - 6i$.

Ejercicio 15 *Calcular $I = \int_C z^2 dz$ a lo largo del contorno C_1 que es el segmento de recta que va desde $z = 0$ a $z = 2 + i$. Comprobar el resultado mediante paralelas a los ejes.*

Solución: $\frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$. Sale igual.

Ejercicio 16 *Calcular $I = \int_C \overline{z}^2 dz$ integrando a lo largo del contorno C, $y = x^2 + 1$, desde el punto $0 + i$ hasta el punto $1 + 2i$. Comprobar el resultado mediante paralelas a los ejes.*

Solución: $\frac{3}{5} - i\frac{10}{3}$. No sale igual.

Ejercicio 17 *Calcular $I = \int_C \overline{z} dz$, a) siendo el camino de integración C_1, la semicircunferencia superior $|z| = 1$, desde $z = -1$ a $z = 1$. b) siendo el camino de integración la semicircunferencia inferior C_2, que une los mismos puntos.*

Solución: a) $-\pi i$. b) πi.

Ejercicio 18 *Calcular la integral de línea $\int_C \frac{1}{z} dz$ siendo $C : z = e^{2it}$ en sentido positivo.*

Solución: $2\pi i$.

Ejercicio 19 *Calcular la integral de línea $\int_C \frac{\ln z}{z} dz$ siendo $C : |z| = 1$ en sentido positivo.*

Solución: -$2\pi^2$.

Ejercicio 20 *Calcular la integral de línea $\int_C \overline{z} dz$ siendo C la curva $x = y^2$, $0 \leq x \leq 1$.*

Solución: $\frac{1}{4} - \frac{1}{3}i$

Ejercicio 21 *Calcular la integral de línea $\int_C \frac{1+z^2}{z} dz$ siendo C la circunferencia de centro el origen y radio 1, recorrida en sentido positivo.*

Solución: $2\pi i$.

Ejercicio 22 *Calcular la integral de línea $\int_C \frac{|z|}{z} dz$ siendo $C : z = 2e^{2\pi it}$ en sentido positivo.*

Solución: $4\pi i$.

Ejercicio 23 *Calcular la integral de línea $\int_C (z + \overline{z}) dz$ siendo C la curva $x + y = 1$, desde el punto $(1, 0)$ hasta el punto $(0, 1)$.*

Solución: $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Ejercicio 24 *Calcular la integral de línea $\int_C \frac{1}{z-2} dz$ siendo $C : |z - 2| = 2$, en sentido positivo.*

Solución: $2\pi i$.

Ejercicio 25 *Sea* $f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ *definida por* $f(z) = \frac{1}{z}$. *Calcular la integral de línea* $\int_1^i f(z)dz$ *en los siguientes casos:*

$$\begin{array}{lll} (a) & z & : & [0,1] \to \mathbb{C},\ z(t) = (1-t) + it \\ (b) & z & : & [0,1] \to \mathbb{C},\ z(t) = e^{i\frac{\pi}{2}t} \\ (c) & z & : & [0,1] \to \mathbb{C},\ z(t) = \begin{cases} 1 + 2it & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 2 - 2t + i & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\ (d) & z & : & [0,1] \to \mathbb{C},\ z(t) = e^{\frac{-3\pi}{2}ti} \end{array}$$

Solución: (a) $\frac{\pi}{2}i$. (b) $\frac{\pi}{2}i$. (c) $\frac{\pi}{2}i$. (d) $\frac{-3\pi}{2}i$.

Ejercicio 26 *Calcular la integral de línea* $\int_C zdz$ *siendo* C *la curva* $y = x$, *desde el punto* 0 *hasta el punto* $1 + i$.

Solución: i.

Ejercicio 27 *Calcular la integral de línea* $\int_C \overline{z}dz$ *siendo* C *la mitad superior de la circunferencia* $|z| = 2$, *desde* $z = 2$ *hasta* $z = -2$.

Solución: $4\pi i$.

Ejercicio 28 *Comprobar el teorema de Cauchy-Goursat para*

$$\oint_C z^n dz = 0$$

donde n *es un número entero positivo o nulo, y* C *un círculo de radio* r *centrado en el origen.*

Ejercicio 29 *Calcular* $\oint_{C^+} \frac{dz}{z}$ *donde el contorno* C *es el cuadrado de vértices* $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$.

Solución: $2\pi i$.

Ejercicio 30 *Calcular* $\int_1^i \frac{1}{z}dz$ *integrando a lo largo del arco* C_1, *que es la porción de* $x^4 + y^4 = 1$ *que se encuentra en el primer cuadrante.*

Solución: $\frac{\pi}{2}i$.

Ejercicio 31 *Calcular la integral* $\int_0^{\frac{\pi}{2}i} ze^z dz$.

Solución: $(1 - \frac{\pi}{2}) - i$.

Ejercicio 32 *Demostrar que* $\int_0^i z \operatorname{sen} z dz = -\frac{i}{e}$.

Ejercicio 33 *Calcular la integral* $\int_C z^3 dz$, *siendo* $C : [0,1] \to \mathbb{C}$; $z(t) = t^3 + it$.

Solución: -1.

Ejercicio 34 *Señálense las funciones que tengan primitiva en el abierto* $A = \{z \in \mathbb{C}/2 < |z| < 3\}$.

(a) $f(z) = z^2$, *(b)* $f(z) = \frac{1}{z^2}$, *(c)* $f(z) = \frac{1}{z}$, *(d)* $f(z) = \frac{1}{z-4}$.
Solución: (a), (b) y (d).

Ejercicio 35 *Calcular* $\oint_{C^+} \frac{zdz}{(9-z^2)(z+i)}$ *donde* C *es la circunferencia* $|z| = 2$.

Solución: $\frac{\pi}{5}$.

Ejercicio 36 *Calcular* (a) $\oint_{C^+} \frac{\cos z}{z-1}dz$; (b) $\oint_{C^+} \frac{\cos z}{z+1}dz$ *donde* C *es el contorno triangular de vértices:* $(0,0)$, $(2,-2)$, $(2,2)$

Solución: $2\pi i \cos 1$.

Ejercicio 37 *Calcular* $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{\cos z}{(z^2+1)}dz$ *donde* C *es la circunferencia* $|z - 2i| = 2$.

Solución: $\frac{\cos i}{2i}$.

Ejercicio 38 *Calcular* $\oint_{C+} \frac{z^3+2z+1}{(z-1)^3} dz$ *donde* C *es el contorno* $|z| = 2$.

Solución: $6\pi i$.

Ejercicio 39 *Calcular* $\oint_{C+} \frac{\cos z}{(z-1)^3(z-5)^2} dz$ *donde* C *es la circunferencia* $|z-4| = 2$.

Solución: $\frac{-64 \operatorname{sen} 5 - 48 \cos 5}{4^6} 2\pi i$.

Ejercicio 40 *Calcular* $\oint_{C+} \frac{10z}{(z^2-1)(z^2-9)} dz$ *donde* C *es la circunferencia* $2|z-1| = 3$.

Solución: $-\frac{5}{4}\pi i$.

Ejercicio 41 *Calcular* $\oint_{C+} \frac{sen z}{(z-i)(z+i)} dz$ *donde* C *es la circunferencia* $|z-i| = 1$.

Solución: $\pi sh 1 i$.

Ejercicio 42 *Calcular* $\oint_{C+} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$ *donde* C *es la circunferencia* $|z| = 3$.

Solución: $\frac{8}{3e^2}\pi i$.

Ejercicio 43 *Calcular* $\oint_{C+} \frac{z^5+1}{(z-1)^5} dz$ *donde* C *es la circunferencia* $|z| = 2$.

Solución: $10\pi i$.

Ejercicio 44 *Calcular* $\oint_{C+} \frac{e^z}{z(z-1)} dz$ *donde* C *es la circunferencia* $|z| = 2$.

Solución: $2\pi i(e-1)$.

Ejercicio 45 *Calcular* $\oint_{C+} \frac{e^z}{z^n} dz$ *donde* C *es la circunferencia* $|z| = 1$.

Solución: $\frac{2\pi i}{(n-1)!}$.

Ejercicio 46 *Calcular* $\oint_{C+} \frac{sen(\pi z)}{(z^2-1)^2} dz$ *donde* C *es la circunferencia* $|z-1| = 1$.

Solución: $-i\frac{\pi^2}{2}$.

Series de Taylor y de Laurent

Ejercicio 47 *Obtener el desarrollo de Maclaurin de las funciones*

$$(a)\ \frac{1}{1-z}; \quad (b)\ \frac{1}{1+z}; \quad (c)\ \frac{1}{1-z^2}; \quad (d)\ \frac{1}{1+z^2}$$

Ejercicio 48 *Desarrollar en serie de Taylor:*

(a) la función e^z *alrededor de* $z_0 = i$.

(b) la función $\dfrac{1}{z}$ *alrededor de* $z_0 = 1$.

(c) la función $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ *alrededor de* $z_0 = -1$.

Ejercicio 49 *Desarrollar*

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)}$$

en serie de Laurent en potencias de $(z-1)$. *Determinar el dominio en el que la serie converge a* $f(z)$.

Ejercicio 50 *Desarrollar*

$$f(z) = \frac{1}{(z)(z-1)}$$

en una serie de Laurent que sea válida en una entorno abierto de $z = 1$. *Determinar el dominio de validez de la serie.*

Ejercicio 51 *Desarrollar*

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} \tag{1}$$

(a) en serie de Maclaurin en el disco abierto $|z| < 1$. (b) en serie de Laurent de potencias de z en la corona $1 < |z| < 2$. (c) en serie de Laurent de potencias de z en el dominio no acotado $2 < |z| < \infty$.

Ejercicio 52 *Hallar el desarrollo en serie de Laurent en potencias de z y el campo de convergencia de convergencia, de las funciones:*

(a) $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$; (b) $f(z) = \frac{sen z}{z^3}$; (c) $f(z) = \frac{1}{z(1+z)}$.
Solución:
(a) $f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots$; $0 < |z| < \infty$.
(b) $f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \cdots$; $0 < |z| < \infty$.
(c) $f(z) = \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 + \cdots$; $0 < |z| < \infty$.

Ejercicio 53 *Hallar el desarrollo en serie de Laurent en potencias de $z-1$, y el campo de convergencia, de la función $f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}$.*

Solución: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-1}(-1)^n}{n!}(z-1)^{n-2}$; $0 < |z-1| < \infty$.

Ejercicio 54 *Hallar el desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{z-3}$ para $3 < |z| < \infty$.*

Solución: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}}$.

Ejercicio 55 *Hallar el desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{z^2+z}{z-3}$ para $1 < |z| < \infty$.*

Solución: $f(z) = z + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{z^n}$.

Ejercicio 56 *Hallar el desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{z^2}{z-1}$ para $1 < |z| < \infty$.*

Solución: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{1} z^n$.

Ejercicio 57 *Hallar el desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ para $0 < |z-i| < 2$.*

Solución: $f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4i}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^n}(z-i)^n$.

Ejercicio 58 *Hallar el desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z) = e^z + e^{\frac{1}{z^2}}$ para $|z| > 0$.*

Solución: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-2n}}{n!}$.

Ejercicio 59 *Hallar el desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{z(z+R)}$ para $0 < |z| < R$.*

Solución: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{R^{n+1}} z^{n-1}$.

Ejercicio 60 *Hallar el desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ para $|z| < 1$.*

Solución: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1 - \frac{1}{2^{n+1}})z^n$.

Ejercicio 61 *Hallar el desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ para $1 < |z| < 2$.*

Solución: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ con $a_n = \begin{cases} -1 & si \quad n \leq -1 \\ \frac{1}{2^{n+1}} & si \quad n \geq 0 \end{cases}$.

Ejercicio 62 *Hallar el desarrollo en serie de Laurent de la función* $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ *para* $2 < |z| < \infty$.

Solución: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1+2^n}{z^{n+1}}$.

Ejercicio 63 *Hallar el desarrollo en serie de Laurent de la función* $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z+2}$ *para: (a)* $0 < |z| < 1$; *(b)* $1 < |z| < 2$; *(c)* $2 < |z| < \infty$.

Solución: (a) $\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + 1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) z^n$.
(b) $\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{z^{n+2}}$; (c) $\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{z^{n+2}}$.

Ejercicio 64 *Hallar el desarrollo en serie de Laurent, y el campo de convergencia, de la función* $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ *,donde* ; $0 < |a| < |b|$, *en un entorno de los puntos: (a)* $z = 0$; *(b)* $z = a$.

Solución: (a) $f(z) = \frac{1}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b^{n+1}a^{n+1}} z^n$; $|z| < a$.
(b) $f(z) = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+a}} \right)$; $|z-a| < |b-a|$.