

Índice general

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS	3
1.1. INTRODUCCIÓN	3
1.2. ANTECEDENTES Y ESTADO ACTUAL DEL TEMA	4
1.3. ESTRUCTURA DEL TRABAJO	8
2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	10
2.1. INTRODUCCIÓN	10
2.2. DEFINICIONES	11
2.2.1. Centrales Térmicas	11
2.2.2. Centrales Hidráulicas	12
2.3. EL PROBLEMA HIDROTÉRMICO GENERALIZADO	13
2.4. ELIMINACION DEL CONCEPTO DE PÉRDIDAS	14
2.5. REDUCCIÓN DEL PROBLEMA H_n-T_m AL H_n-T_1	17
2.6. EQUIVALENTE MINIMIZADORA PARA FUNCIONES DE COSTO: $F_i(x) = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2$	20
2.7. REPLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	28
3. PROBLEMA H_1-T_1 SIN RESTRICCIONES	30
3.1. INTRODUCCIÓN	30
3.2. ECUACIONES DE COORDINACIÓN	32
3.3. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE EXTREMALES	34
3.4. APLICACIONES DE TIRO	39
3.5. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN LOCAL	41
3.6. EL CASO PARTICULAR $H(t,z,z')=f(z) \cdot z'$	47
3.7. SOLUCIÓN PARA FUNCIONALES CONVEXOS.	48

3.8. SOLUCIÓN PARA FUNCIONALES NO CONVEXOS	51
3.9. CONSTRUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN	52
4. PROBLEMA H_1-T_1 CON RESTRICCIONES	54
4.1. INTRODUCCIÓN	54
4.2. EXISTENCIA DE SOLUCIÓN	56
4.3. AUSENCIA DE PUNTOS ANGULARES	57
4.4. SOLUCIONES INTERIORES	62
4.5. SOLUCIONES FRONTERIZAS	65
4.6. CONSTRUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN	75
5. EL PROBLEMA H_n-T_1	78
5.1. INTRODUCCIÓN	78
5.2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	78
5.3. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA	79
5.4. CONSTRUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN	83
6. APORTACIONES, CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO	84
6.1. APORTACIONES Y CONCLUSIONES	84
6.2. PERSPECTIVAS DE FUTURO	87
7. BIBLIOGRAFÍA	89

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se enmarca dentro de la línea de investigación denominada “Optimización de sistemas hidrotérmicos”. El estudio de las condiciones óptimas de funcionamiento de un sistema hidrotérmico es un problema complejo que ha suscitado gran interés durante las últimas décadas. Numerosas técnicas han sido empleadas en su resolución, tales como la programación dinámica lineal y no lineal, el análisis funcional, el cálculo variacional, métodos aproximados como el método de Ritz, redes neuronales, etc. En estos trabajos aparecen numerosos modelos matemáticos que aproximan la realidad con diferentes grados de precisión. Así, se pueden considerar centrales hidráulicas de carga fija o variable, acopladas o desacopladas hidráulicamente, con cuencas lineales o ramificadas, sin o con retraso en el transporte, considerando pérdidas de transmisión o despreciándolas y, así, un largo etcétera.

Tal variedad de modelos matemáticos hace necesario un estudio general del problema, cuya validez sea extensible a una gran diversidad de sistemas hidrotérmicos. Por otra parte, se ha observado que la mayor parte de los trabajos sobre este tema presenta altas dosis de vaguedad en la delimitación de la validez de los estudios, y adolecen de la falta de un estudio teórico suficiente que permita ir más allá de la mera búsqueda de la solución de problemas muy concretos. Por ejemplo, una cuestión esencial como es la de existencia y unicidad de solución, se evita de forma sistemática por casi todos los autores; solo alguno de ellos aborda esta cuestión, y aun así, sus estudios tienen el inconveniente de referirse a formulaciones excesivamente particulares que invalidan su aplicación a otros modelos.

El estudio que realizamos no persigue resolver un problema concreto a partir de una teoría elaborada ad hoc sino iniciar una línea de trabajo que dé respuesta satisfactoria a cualquier problema hidrotérmico con independencia de las características concretas de las centrales; más aún, pretendemos que pueda ser aplicable a cualquier problema de optimización de recursos donde se deba satisfacer, por dos fuentes de naturaleza distinta, una determinada función de demanda. El proyecto es muy ambicioso y son muchos los interrogantes

que planteamos, además de los que resolvemos de modo definitivo. La herramienta que utilizaremos será la del cálculo variacional, la más natural a nuestro juicio para abordar los problemas que se plantean, y que permite aspirar a unos resultados plausibles desde un punto de vista teórico.

Veremos, a continuación, los más relevantes investigadores que han conformado la historia de esta línea de investigación, cuyos orígenes se remontan a la década de los 50.

1.2. ANTECEDENTES Y ESTADO ACTUAL DEL TEMA

Los primeros pasos importantes en el campo de la programación óptima de un sistema de potencia de dimensiones reales se deben a **Ricard** [82], así como a **George** [50], que desarrollaron un método que permitía coordinar el costo de combustible y las pérdidas de transmisión y que se servía del analizador de redes.

Kirchmayer y **Stagg** [63] comparan distintos métodos de coordinación del costo de combustible asumiendo las pérdidas de transmisión de potencia activa y evaluando el ahorro de combustible producido.

Glimn y **Kirchmayer** [53] son los primeros en abordar el estudio de sistemas con centrales de carga variable.

En otra línea, **Carpentier** [21] utiliza la teoría de los multiplicadores de Kuhn-Tucker para tener en cuenta las restricciones de desigualdad del sistema.

Hasta aquí hemos citado algunos trabajos notables, aunque muy limitados, de programación óptima.

El-Hawary y **Christensen** fueron los pioneros en la utilización del análisis funcional y han publicado numerosos artículos desde el año 1970 utilizando esta técnica [31], [32] y [33]. En estos artículos estudian primero sistemas solo térmicos, a continuación sistemas hidráulicos en donde las plantas hidráulicas son de carga variable sin acoplamiento y, más tarde, un sistema hidrotérmico. Todo ello aparece reunido en un libro publicado en 1979 y titulado “Optimal Economic Operation of Electric Power Systems” [34], donde se muestran las grandes ventajas de la utilización del análisis funcional frente a otras técnicas.

Burchett y otros [16], en 1982, realizan un trabajo de optimización de flujo de carga (OPF), considerando sistemas que constan de hasta 600 buses, consiguiendo eliminar los problemas computacionales asociados a este tipo de sistemas. La optimización se basa en transformar el problema original en una sucesión de subproblemas.

De entre los numerosos trabajos que recurren a la programación dinámica, para un problema de coordinación hidrotérmica (HTS) destacamos el de **Wood** [101], en 1982, porque presenta un estudio especial de los periodos de alta demanda de potencia y analiza cómo se comporta el sistema ante estos picos de carga, lugares donde es más difícil obtener la solución óptima.

Cabe destacar también el trabajo que, en 1984, **Borre y Kapoor** [12] hacen sobre el despacho económico de un sistema de potencia hidrotérmico y que resuelven mediante el empleo de la programación lineal.

En 1986, **Bhatnagar y Rahman** [11] estudian un despacho de control de carga, pero para un sistema que tan solo contiene centrales térmicas o nucleares. Ese mismo año, **Branlund** y otros [13] abordan el estudio de un sistema hidrotérmico, pero para facilitar su tratamiento lo dividen en tres subsistemas: el térmico, el hidráulico y la red de transmisión. Resuelven cada subsistema por separado usando el método del gradiente conjugado para las ecuaciones no lineales, con restricciones también no lineales, que resultan de su planteamiento.

Otra línea de investigación muy importante es la desarrollada por **Habibollanzadeh** y otros [55] en Suecia. Ante un problema de programación óptima HTS, similar al considerado por El-Hawary y Christensen, optan por el método de Benders para descomponer el problema. Es de destacar que mantienen las características principales de los sistemas reales y el método proporciona mejores resultados.

En 1987, **Lee** y otros [67] realizan un trabajo dentro del campo de la programación a largo plazo, diseñando sistemas, para periodos de 10 y 15 años, utilizando técnicas probabilísticas. Introducen como elemento novedoso, para reducir el costo y la utilización de combustibles fósiles, el uso de las centrales de bombeo.

Christensen y Soliman [23], en 1987, añaden a la teoría del análisis funcional un estudio estadístico que estima la probabilidad del aporte de agua natural que pueden tener las centrales hidráulicas en función de la tendencia pasada y realizan una predicción a un año de plazo. Un estudio similar en la cuenca brasileña es realizado por **Carvalho y Soares** [22].

El-Hawary y Kumar [40] hacen un estudio comparativo de los distintos modelos que se pueden considerar para estudiar las plantas hidráulicas de carga variable, frente a la fórmula básica que relaciona la potencia con el caudal de descarga, la altura efectiva y la eficiencia.

Un estudio similar, aunque algo más detallado, fue el realizado por **El-Hawary y Ravindranath** [37] en 1988, considerando centrales hidráulicas sin acoplamiento y eliminando, para simplificar, la variable retraso en el transporte. Estos mismos autores, en [36], eligen el modelo de Glimn-Kirchmayer y resuelven un sistema hidrotérmico HTS sin retraso, utilizando el método de Newton-Raphson. Debido a la importancia de los valores iniciales, se dan algunas normas sobre cómo obtener aproximaciones iniciales aceptables, como por ejemplo suponer, en una primera aproximación, nulas las pérdidas por transmisión.

En 1989, **Suárez** [91] retoma la idea básica de resolver un problema HTS de corto plazo, dándole un nuevo impulso, al conectar la ya mencionada técnica del análisis funcional con la discretización del problema de contorno obtenido. Proporciona así, la solución en forma de un sistema no lineal al que se le puede aplicar el teorema del punto fijo, técnica iterativa de fácil implementación.

En 1990, **Soliman y Christensen** [88] proponen un algoritmo para estimar los parámetros

ros del sistema, de tanta influencia en la optimización. Trabajando en una línea paralela, **El-Hawary y Mbamalu** [35], en 1991, proponen modelos estadísticos para predecir algunos de estos parámetros.

El-Hawary y Ravindranath [38], ese mismo año, realizan una aproximación al problema de la optimización de múltiples objetivos. Consideran un sistema muy sencillo, con plantas hidráulicas de carga fija y sin acoplamiento, para poder abordar la minimización del costo de combustible, junto con la minimización de las pérdidas de transmisión. Estos mismos autores [39], en 1992, realizan un estudio comparativo para la optimización del flujo de carga de un sistema hidrotérmico (HTOPF) considerando centrales hidráulicas de carga variable y de carga fija.

Talaq, El-Hawary F. y El-Hawary M.E. [94] desarrollan, en 1994, un algoritmo en un sistema OPF para minimizar la función objetivo manteniendo una restricción en su valor máximo. Estos mismos autores, en [93], realizan un estudio de la sensibilidad de la minimización de emisiones ante la modificación de los datos iniciales del sistema, considerando centrales hidráulicas de carga fija, sin acoplamiento y sin retraso en el transporte.

En 1995, **Bayón y Suárez** [5] presentan un programa de optimización general que plantea la minimización del costo de combustible para un sistema hidrotérmico de considerables dimensiones. Estos mismos autores [4], en 1994, habían realizado un estudio especial para las emisiones de contaminantes producidas por las centrales térmicas, tomando datos de la cuenca asturiana.

King [62] desarrolla, en 1995, una técnica para la optimización combinada de coste de combustible y contaminación, basada en el empleo de redes neuronales, pero para un sistema formado solo por centrales térmicas.

En 1996, **Mbamalu, El-Hawary F. y El-Hawary M.E.** [71] estudian la minimización de las pérdidas de potencia, incluyendo incertidumbre en la potencia demandada. Ese mismo año, **Mbamalu y El-Hawary** [72], realizan un trabajo de optimización de emisiones contaminantes para un sistema hidrotérmico.

Por su parte, **Talaq** [95] vuelve al problema de minimizar conjuntamente las emisiones de NOx y el coste de generación, utilizando en su caso la aproximación desacoplada de Newton.

En 1997, ante el proceso de liberalización que surge en el marco del nuevo mercado eléctrico, **Tufegdzcic** [97] desarrolla un algoritmo para la optimización de un sistema hidrotérmico complejo en tiempo real, permitiendo cambiar de modo continuo el precio de oferta y consiguiendo el máximo aprovechamiento de los recursos hidráulicos.

Ibrahim [58] trabaja sobre el problema del óptimo flujo de carga, junto con las restricciones dinámicas de agua de las centrales hidráulicas y da un nuevo impulso a la programación no lineal, técnica ya utilizada por numerosos autores, al combinarla con el método del gradiente, las aproximaciones sucesivas, y una estimación realista de los valores iniciales del algoritmo.

También para el problema del óptimo flujo de carga, **Mostafa** [75], [76] utiliza con buenos resultados el paquete MINOS de optimización no lineal para implementar el algoritmo.

Las ecuaciones de flujo las expresa en forma polar y utiliza el modelo de la matriz de admitancias.

Allan [1], [2] utiliza la simulación secuencial de Monte-Carlo para el problema con restricciones del flujo de carga. Presta especial atención a la coordinación entre las unidades térmicas y las hidráulicas, apareciendo también centrales de bombeo con limitación de energía en sus simulaciones.

En 1998, **Demartini** [26] vuelve a utilizar los métodos de programación dual para la coordinación a corto plazo de un problema de grandes dimensiones (100 unidades térmicas) y con una fina subdivisión de 96 cuartos de hora para la programación diaria.

En 1999, **Ernan** y otros [42], ante la dificultad de resolver los problemas con sistemas hidráulicos acoplados, utilizan un nuevo algoritmo basado en los métodos de relajación lagrangianos con un estrategia novedosa basada en la división en subproblemas.

En el campo de la coordinación hidrotérmica, **Ruzic** y otros [87] modelizan el costo asociado a un consumo excesivo de agua en el periodo de optimización; lo que consiguen añadiendo un término de penalización a la función objetivo. Asimismo, prestan atención a la utilización de centrales de bombeo.

Carneiro y Leite [20] comparan los métodos clásicos de programación no lineal con los algoritmos genéticos (GAs). Los primeros presentan deficiencias tales como las dificultades de convergencia, excesiva simplificación del problema original o dificultades asociadas a la aproximación de la función objetivo. Por su parte, los GAs evitan estos inconvenientes y presentan un menor coste operativo.

Garzillo y otros [48] tratan el tema de la optimización de sistemas hidrotérmicos teniendo en cuenta las restricciones eléctricas de la red. Utilizan métodos de punto interior logrando gran precisión y flexibilidad en la modelización de sistemas hidráulicos.

Bayón y otros [7] utilizan el cálculo variacional junto con el método de Han-Powell para resolver de forma conjunta el problema de coordinación hidrotérmica y el del cálculo del óptimo flujo de carga, con la ventaja de poder calcular de forma más exacta los coeficientes de pérdidas, de gran importancia en este tipo de problemas. Estos mismos autores, en [8], siguiendo la misma técnica, prestan atención al diagnóstico de fallos en las redes, como son los fallos de los generadores, violación de las restricciones de la tensión en los nudos, etc.

En los últimos tiempos, una de las ramas de investigación más desarrollada es la que se centra en el estudio de las centrales de bombeo. Son numerosos los autores que trabajan desde diversos puntos de vista: **Puntel** y otros [80] con una aproximación probabilística, **Hannett** y otros [56] con un modelo de simulación dinámica, **Hongwei** y otros [57] con un nuevo método llamado algoritmo dinámico de programación híbrida genética y **Ying** y otros [102] utilizando programación fuzzy dinámica, entre otros.

Por último, hay que señalar que, ante la situación creada por el nuevo mercado eléctrico basado en la competencia entre las diferentes empresas eléctricas, están apareciendo numerosos trabajos con enfoques totalmente distintos enmarcados en la teoría de juegos, **Barquin** y otros [3], y **Fabra** y otros [43].

1.3. ESTRUCTURA DEL TRABAJO

Veamos, a continuación, de modo muy resumido, el contenido de los capítulos restantes de este trabajo:

CAPÍTULO 2: DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Se revisa la presentación clásica del problema despojándola de conceptos que, desde un punto de vista matemático, resultan superfluos. Así, observamos que el concepto de pérdidas de las centrales térmicas puede ser obviado con una adecuada modificación del problema y que dichas centrales pueden sustituirse por una sola que se comporta de modo equivalente a todo el conjunto. De este modo, se logra una formulación variacional en su estado más puro (sin ligaduras) que permitirá la utilización de la teoría del cálculo variacional en toda su potencia.

CAPÍTULO 3: PROBLEMA H_1-T_1 SIN RESTRICCIONES

Se analiza el caso particular de sistemas hidrotérmicos que constan de una única central hidráulica. El problema no es en absoluto sencillo cuando se manejan modelos muy generales. Se estudia la existencia de extremales que satisfagan la condición de mínimo fuerte y se muestra un algoritmo para su construcción, mucho más versátil que otros ya clásicos, cuya auténtica importancia se evidenciará en el estudio de problemas con restricciones y de sistemas con varias centrales hidráulicas.

Con este capítulo, se resuelve de modo satisfactorio el problema del funcionamiento óptimo de las centrales de bombeo, cuestión que está suscitando gran interés en tiempos recientes, sin que se hayan aportado resultados relevantes y, mucho menos, genéricos.

CAPÍTULO 4: PROBLEMA H_1-T_1 CON RESTRICCIONES

Siguiendo con una única central hidráulica, estudiamos el problema que se suscita cuando las potencias térmicas e hidráulicas tienen ciertas limitaciones. Esto es lo que ocurre en la práctica habitualmente; sin embargo, los trabajos existentes sobre el tema no dan una respuesta del todo satisfactoria a este problema, obviando, por ejemplo, una cuestión crucial como es el análisis de la restricción de volumen final, que es la clave, en muchos casos, de la existencia o no de solución.

En este caso, el problema no se reduce a resolver una ecuación de segundo orden con condiciones de contorno. La solución puede no ser “algebraicamente interior” en el sentido de que puede constar de unos arcos que no admiten variaciones bilaterales y de otros que satisfagan la ecuación de Euler. Para ello, hemos desarrollado el aparato matemático que ha resuelto el problema de un modo muy satisfactorio, tanto desde el punto de vista teórico como desde el punto de vista algorítmico y computacional.

CAPÍTULO 5: EL PROBLEMA H_n-T_1

Abordamos el estudio de los sistemas que constan de varias centrales hidráulicas. La dificultad a priori es evidente: se trata de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno. Hemos ideado, para ello, un método inspirado en el denominado

“método de descenso coordinado cíclico”, que resuelve de modo satisfactorio el problema, como límite de una sucesión de problemas con una única central hidráulica.

CAPÍTULO 6: ANÁLISIS DE MODELOS PARTICULARES

Se muestran diversos ejemplos, inspirados en sistemas reales, utilizando los algoritmos propuestos e implementados en MATHEMATICA. Hemos considerado gran variedad de situaciones que se han resuelto, en todos los casos, de un modo muy satisfactorio; hay que destacar en este sentido, los problemas con centrales de bombeo y los problemas con restricciones, que, hasta la fecha, no se habían abordado con gran profundidad.

CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO.

Mostramos los problemas que solo hemos resuelto parcialmente y planteamos otros, que no se han abordado en este trabajo, pero que, sin duda, son la continuación natural del proyecto generalizador que hemos iniciado.

CAPÍTULO 8: BIBLIOGRAFÍA

Mostramos publicaciones relacionadas con el análisis de sistemas hidrotérmicos, especialmente con el estudio de optimización del coste de combustible. Todas ellas se circunscriben al ámbito de la Ingeniería Eléctrica, pues, hasta la fecha, el tema no parece haber suscitado gran interés en el seno de la matemática aplicada. Incluimos también publicaciones básicas de matemáticas en las que aparecen los distintos resultados que se han utilizado en las demostraciones de los teoremas.

Capítulo 2

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

2.1. INTRODUCCIÓN

Un sistema hidrotérmico está constituido por centrales hidráulicas y térmicas que deben satisfacer conjuntamente, a lo largo de un determinado intervalo de tiempo, una cierta demanda de potencia eléctrica. Las centrales térmicas generan la potencia a costa del consumo de combustible (que es el objeto de la minimización), y las centrales hidráulicas la obtienen a partir de la energía liberada por el agua al mover una turbina, disponiendo para ello de una cantidad limitada de agua durante el intervalo de optimización.

De este modo tan simple puede resumirse el objetivo de multitud de estudios que se han realizado bajo la línea de investigación:

“OPTIMIZACIÓN DEL COSTE DE COMBUSTIBLE DE UN SISTEMA HIDROTÉRMICO”

En este capítulo y siguientes, nos mueve un triple propósito:

- i) Revisar la presentación clásica del problema despojándola de conceptos que, desde un punto de vista matemático, resultan superfluos, con el fin de facilitar el estudio de aspectos cualitativos que nos permita ir más allá de la mera búsqueda de la solución.
- ii) Hacer énfasis en la importancia de la delimitación de los campos de actuación y de validez de los resultados, aspectos en los que hemos podido observar, en muchos trabajos sobre el tema, altas dosis de vaguedad.
- iii) Sentar las bases para un estudio teórico generalista que resulte válido con independencia de las características concretas de las centrales e, incluso, pueda ser aplicable a cualquier problema de optimización de recursos donde se deba satisfacer, por dos fuentes de naturaleza distinta, una determinada función de demanda.

Veamos, a continuación, la definición de los elementos presentes en todo problema de optimización hidrotérmica.

2.2. DEFINICIONES

Supondremos que el sistema hidrotérmico¹ consta de m centrales térmicas y n centrales hidráulicas.

2.2.1. Centrales Térmicas

Definición 2.2.1.1. Denominaremos *función de costo* de la central térmica i -ésima a la aplicación

$$F_i : D_i \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que relaciona el consumo instantáneo de la central térmica i -ésima con la potencia generada por ella. De modo que, si denotamos por $P_i(t)$ la potencia generada en el instante t , el consumo durante el intervalo de optimización $[0, T]$ será

$$\int_0^T F_i(P_i(t)) dt$$

Por D_i denotamos el conjunto de valores de las potencias generables en cada instante por la central térmica i -ésima.

Definición 2.2.1.2. Diremos que $P : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ es admisible para F_i si

$$\forall t \in [0, T] , P(t) \in D_i$$

Definición 2.2.1.3. Denominaremos \mathcal{F}_i al conjunto de elementos admisibles para F_i .

Y denotaremos por \mathcal{F} a $\prod_{i=1}^m \mathcal{F}_i$.

Definición 2.2.1.4. Denominaremos *función de aportación efectiva* de la central térmica i -ésima a la aplicación

$$\phi_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}$$

que asigna a cada valor de la potencia generada por la térmica i -ésima la aportación que supone al sistema.

Definición 2.2.1.5. Se denominará *función de pérdidas* de la central térmica i -ésima a la aplicación definida en D_i

¹A lo largo de todo el trabajo, se utilizarán términos propios y exclusivos de los sistemas hidrotérmicos con el fin de facilitar la interpretación de determinadas hipótesis que se utilizan y de los resultados que se obtienen. No obstante, las formulaciones y conclusiones mantendrán su validez en cualquier problema de optimización de recursos que comparta con los problemas de optimización hidrotérmica los aspectos esenciales.

$$p_i(x) = x - \phi_i(x)$$

que mide la diferencia entre la potencia generada por la central térmica i -ésima y la aportación efectiva al sistema.

Observación 2.2.1.6. La función de costo que se ha utilizado sistemáticamente es un polinomio de segundo grado

$$F_i(x) = \gamma_i x^2 + \beta_i x + \alpha_i$$

que se ha considerado suficiente aproximación a la realidad.

Es también habitual considerar como función de pérdidas $p_i(x) = b_{ii} \cdot x^2$ (fórmula de Kirchmayer²).

2.2.2. Centrales Hidráulicas

Definición 2.2.2.1. Denominaremos *función de generación hidráulica efectiva* a la aplicación

$$H : \Omega_H \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde

$$H(t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t), z'_1(t), z'_2(t), \dots, z'_n(t))$$

representa el valor de la potencia aportada al sistema en el instante t por las centrales hidráulicas en su conjunto, siendo:

- $z_i(t)$ el volumen turbinado hasta el instante t (en adelante volumen) por la central i -ésima.
- $z'_i(t)$ el caudal descargado en el instante t (en adelante caudal) por la central i -ésima.
- $\Omega_H \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{2n}$ el dominio de definición de H .

Definición 2.2.2.2. Diremos que $\vec{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ es admisible para H si:

- I) z_i es de clase KC^1 , $\forall i = 1, \dots, n$ (Continua con derivada continua a trozos³).
- II) $(t, z_1(t), \dots, z_n(t), z'_1(t), \dots, z'_n(t)) \in \Omega_H$, $\forall t \in [0, T]$

Definición 2.2.2.3. Llamaremos \mathcal{H} al conjunto elementos admisibles para H .

² b_{ii} es el denominado *coeficiente de pérdidas*.

³Es natural consentir que las derivadas de las funciones admisibles tengan discontinuidades, pues equivale a permitir variaciones bruscas del caudal descargado, lo cual es en la práctica perfectamente posible.

Observación 2.2.2.4. Todos los modelos parten de la estimación de que la potencia $H(t)$ generada en cada instante es función del caudal $q(t)$ descargado y de la altura $h(t)$ del salto de agua:

$$H(t) = \Phi(q(t), h(t))$$

Las distintas modelizaciones de la altura, que atienden a la geometría del depósito, características técnicas de la central, simplificaciones del problema etc., han dado lugar a diversos estudios que nosotros trataremos de unificar con nuestro enfoque generalista del problema.

2.3. EL PROBLEMA HIDROTÉRMICO GENERALIZADO

Definición 2.3.1. Denominaremos *potencia demandada* a la función

$$P_d : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$$

que expresa la potencia que hay que suministrar al sistema en cada instante del *intervalo de optimización* $[0, T]$.

Definición 2.3.2. Denominaremos *volumen disponible* de la central hidráulica i -ésima al volumen b_i de agua que puede (y debe) turbinar hasta el instante T .

Definición 2.3.3. Con la notación utilizada en las definiciones anteriores y siendo

$$\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$$

el vector de volúmenes disponibles, denominaremos *problema hidrotérmico generalizado*

$$\Gamma \equiv \text{H}_n\text{-T}_m\{P_d, \{F_i, \phi_i\}_1^m, H, \vec{b}\}$$

al problema de minimizar el funcional

$$F(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) = \int_0^T \sum_{i=1}^m F_i(y_i(t)) dt$$

dentro del conjunto Ξ de *elementos admisibles* para Γ definido de la manera siguiente

$$\Xi = \{(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{F} \times \mathcal{H} \mid \text{satisfacen 1) y 2)}\}$$

1) Ecuación de equilibrio:

$$\sum_{i=1}^m \phi_i(y_i(t)) + H(t, z_1(t), \dots, z_n(t), z'_1(t), \dots, z'_n(t)) = P_d(t), \forall t \in [0, T]$$

2) Restricciones de volumen disponible:

$$z_i(0) = 0, \quad z_i(T) = b_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

Definición 2.3.4. Diremos que $(P_1, \dots, P_m, \vec{Q}) \in \Xi$ es *solución del problema* si $\forall (y_1, \dots, y_m, \vec{R}) \in \Xi$ se verifica:

$$\int_0^T \sum_{i=1}^m F_i(P_i(t)) dt \leq \int_0^T \sum_{i=1}^m F_i(y_i(t)) dt$$

2.4. ELIMINACION DEL CONCEPTO DE PÉRDIDAS

El concepto de pérdidas de transmisión, presente en la mayoría de estudios sobre el tema, que en el caso de las centrales hidráulicas ni siquiera se ha mencionado por estar contabilizadas en la función de generación efectiva es, desde el punto de vista matemático, superfluo en el sentido de que puede obviarse con una adecuada modificación de las funciones de costo de las centrales térmicas.

Lema 2.4.1. Sean $g_i : D_i \longrightarrow \tilde{D}_i$ biyectivas y los problemas

$$\Gamma \equiv \text{H}_n\text{-T}_m\{P_d, \{F_i, \phi_i\}_1^m, H, \vec{b}\}$$

$$\Gamma_{\{g_i\}} \equiv \text{H}_n\text{-T}_m\{P_d, \{(F_i \circ g_i^{-1}), (\phi_i \circ g_i^{-1})\}_1^m, H, \vec{b}\}$$

Entonces:

I) $(P_1, P_2, \dots, P_m, \vec{Q})$ es admisible para Γ si y solamente si $(g_1 \circ P_1, g_2 \circ P_2, \dots, g_m \circ P_m, \vec{Q})$ es admisible para $\Gamma_{\{g_i\}}$.

II) $(P_1, P_2, \dots, P_m, \vec{Q})$ es solución de Γ si y solamente si $(g_1 \circ P_1, g_2 \circ P_2, \dots, g_m \circ P_m, \vec{Q})$ es solución de $\Gamma_{\{g_i\}}$.

Demostración)

I) Si $(P_1, P_2, \dots, P_m, \vec{Q})$ es admisible para Γ se verifica:

1) $0 = P_d(t) - \sum_{i=1}^m \phi_i(P_i(t)) - H(t, \vec{Q}(t), \vec{Q}'(t)), \forall t \in [0, T]$

2) $\vec{Q}(0) = \vec{0}$ y $\vec{Q}(T) = \vec{b}$

Veamos que $(g_1 \circ P_1, g_2 \circ P_2, \dots, g_m \circ P_m, \vec{Q})$ es admisible para $\Gamma_{\{g_i\}}$. Efectivamente, teniendo en cuenta que

$$\sum_{i=1}^m (\phi_i \circ g_i^{-1}) ((g_i \circ P_i)(t)) = \sum_{i=1}^m \phi_i(P_i(t))$$

se verificará que

$$0 = P_d(t) - \sum_{i=1}^m (\phi_i \circ g_i^{-1}) ((g_i \circ P_i)(t)) - H(t, \vec{Q}(t), \vec{Q}'(t)), \forall t \in [0, T]$$

El recíproco es análogo.

II) Por reducción al absurdo.

Vamos a suponer que $(P_1, P_2, \dots, P_m, \vec{Q})$ es solución de Γ y que

$(g_1 \circ P_1, g_2 \circ P_2, \dots, g_m \circ P_m, \vec{Q})$ no lo es de $\Gamma_{\{g_i\}}$;

tendremos que $\exists(\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m, \vec{Q}_1)$ admisible para $\Gamma_{\{g_i\}}$ verificando:

$$\int_0^T \sum_{i=1}^m (F_i \circ g_i^{-1}) (\tilde{P}_i(t)) dt < \int_0^T \sum_{i=1}^m (F_i \circ g_i^{-1}) ((g_i \circ P_i)(t)) dt$$

y por tanto

$$\int_0^T \sum_{i=1}^m F_i ((g_i^{-1} \circ \tilde{P}_i)(t)) dt < \int_0^T \sum_{i=1}^m F_i(P_i(t)) dt$$

Vamos a observar que $(g_1^{-1} \circ \tilde{P}_1, \dots, g_m^{-1} \circ \tilde{P}_m, \vec{Q}_1)$ es admisible para Γ , lo cual será contradictorio con la suposición de que $(P_1, P_2, \dots, P_m, \vec{Q})$ es solución de Γ .

Efectivamente, no hay más que aplicar I):

$(g_1^{-1} \circ \tilde{P}_1, \dots, g_m^{-1} \circ \tilde{P}_m, \vec{Q}_1)$ es admisible para $\Gamma \Leftrightarrow (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m, \vec{Q}_1)$ lo es para $\Gamma_{\{g_i\}}$.

El recíproco es análogo. ▲

Teorema 2.4.2. Sean los problemas

$$\Gamma \equiv \mathbb{H}_n\text{-T}_m\{P_d, \{F_i, \phi_i\}_1^m, H, \vec{b}\}$$

$$\Lambda \equiv \mathbb{H}_n\text{-T}_m\{P_d, \{(F_i \circ \phi_i^{-1}), Id_i\}_1^m, H, \vec{b}\}$$

donde las funciones de aportación efectiva $\phi_i : D_i \rightarrow \tilde{D}_i$ son biyectivas; entonces:

I) $(P_1, P_2, \dots, P_m, \vec{Q})$ es solución de Γ si y solamente si

$(\phi_1 \circ P_1, \phi_2 \circ P_2, \dots, \phi_m \circ P_m, \vec{Q})$ es solución de Λ .

II) Las funciones de pérdidas en el problema Λ son idénticamente nulas.

Demostración)

I) Es consecuencia inmediata del lema anterior teniendo en cuenta que $\Lambda = \Gamma_{\{\phi_i\}}$

II) Teniendo en cuenta que en el problema $\Lambda = \Gamma_{\{\phi_i\}}$ las funciones de aportación efectiva son la aplicación identidad se tiene que

$$p_i(x) = x - Id_i(x) \equiv 0, \forall i$$

▲

Notación 2.4.3. A partir de ahora, siempre que las pérdidas sean idénticamente nulas o, lo que es mismo, que la función de aportación efectiva sea la identidad, omitiremos esta última en la presentación de los problemas.

Ejemplo 2.4.4. Vamos a considerar el problema

$$\Gamma \equiv \mathbb{H}_n\text{-}\mathbb{T}_m\{P_d, \{F_i, \phi_i\}_1^m, H, \vec{b}\}$$

donde las funciones de costo $F_i : [0, \frac{1}{b_{ii}}] \rightarrow \mathbb{R}$ son de la forma

$$F_i(x) = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2$$

las funciones de aportación efectiva $\phi_i : [0, \frac{1}{2b_{ii}}] \rightarrow [0, \frac{1}{4b_{ii}}]$ ($b_{ii} > 0$) son de la forma

$$\phi_i(x) = x - b_{ii}x^2$$

y las pérdidas, por tanto, $p_i(x) = b_{ii}x^2$.

Las funciones ϕ_i son biyectivas y sus inversas son

$$\phi_i^{-1}(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4b_{ii}x}}{2b_{ii}}$$

con lo cual las nuevas funciones de costo serán $\tilde{F}_i = (F_i \circ \phi_i^{-1})$

$$\tilde{F}_i(x) = (F_i \circ \phi_i^{-1})(x) = F_i\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4b_{ii}x}}{2b_{ii}}\right)$$

más concretamente

$$\tilde{F}_i(x) = \alpha_i + \beta_i \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4b_{ii}x}}{2b_{ii}}\right) + \gamma_i \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4b_{ii}x}}{2b_{ii}}\right)^2$$

que puede expresarse como

$$\tilde{F}_i(x) = \tilde{\alpha}_i + \tilde{\beta}_i \sqrt{1 - 4b_{ii}x} + \tilde{\gamma}_i x$$

donde:

$$\tilde{\gamma}_i = -\frac{\gamma_i}{b_{ii}}; \tilde{\beta}_i = \frac{-2\gamma_i - \beta_i}{2b_{ii}}; \tilde{\alpha}_i = \alpha_i + \frac{\beta}{2b_{ii}} + \frac{\gamma_i}{2b_{ii}^2} - \frac{\gamma_i}{b_{ii}}$$

Considerando ahora el nuevo problema sin pérdidas

$$\tilde{\Gamma} \equiv H_n\text{-}T_m\{P_d, \{\tilde{F}_i\}_1^m, H, \vec{b}\}$$

si $(P_1, P_2, \dots, P_m, \vec{Q})$ es solución de $\tilde{\Gamma}$,

$$(\phi_1^{-1} \circ P_1, \dots, \phi_m^{-1} \circ P_m, \vec{Q}) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4b_{11}P_1}}{2b_{11}}, \dots, \frac{1 - \sqrt{1 - 4b_{mm}P_m}}{2b_{mm}}, \vec{Q} \right)$$

es solución del primitivo Γ .

2.5. REDUCCIÓN DEL PROBLEMA H_n-T_m AL H_n-T₁

Vamos a ver en este apartado la posibilidad de sustituir un problema con m centrales térmicas (H_n-T_m) por otro equivalente (H_n-T₁) con una sola: la térmica equivalente.

Sean $F_i : D_i \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$) las funciones de costo de las centrales térmicas. Supondremos en todo el apartado que:

$$\forall \xi \in D = D_1 + D_2 + \dots + D_m \subseteq \mathbb{R} \quad \exists |(\xi_1, \dots, \xi_m) \in \prod_{i=1}^m D_i \text{ tal que}$$

$$\sum_{i=1}^m \xi_i = \xi \text{ y } \sum_{i=1}^m F_i(\xi_i) = \min_{\sum_{i=1}^m x_i = \xi} \left[\sum_{i=1}^m F_i(x_i) \right]$$

En suma, supondremos que $\forall \xi \in D$ el problema de calcular el mínimo de la función $\sum_{i=1}^m F_i(x_i)$ sujeto a la condición $\sum_{i=1}^m x_i = \xi$ admite una única⁴ solución (ξ_1, \dots, ξ_m) .

Definición 2.5.1. Llamaremos *función i -ésima de reparto* a

$$\Psi_i : D_1 + D_2 + \dots + D_m \rightarrow D_i$$

definida por

$$\Psi_i(\xi) = \xi_i, \forall i = 1, \dots, m$$

⁴La unicidad no es esencial. Su no cumplimiento se traduciría simplemente en la existencia de diversas funciones de reparto.

siendo (ξ_1, \dots, ξ_m) el único mínimo de $\sum_{i=1}^m F_i(x_i)$ sujeto a la condición $\sum_{i=1}^m x_i = \xi$.

Definición 2.5.2. Llamaremos *función equivalente minimizadora* de $\{F_i\}_1^m$ a

$$\Psi : D_1 + D_2 + \dots + D_m \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida de la manera siguiente:

$$\Psi(\xi) = \min_{\sum_{i=1}^m x_i = \xi} \left[\sum_{i=1}^m F_i(x_i) \right]$$

Observación 2.5.3. Se cumple:

$$I) \sum_{i=1}^m \Psi_i(\xi) = \xi$$

$$II) \sum_{i=1}^m F_i(\Psi_i(\xi)) = \Psi(\xi)$$

Teorema 2.5.4. Sea Ψ función equivalente minimizadora de $\{F_i\}_1^m$ y $\{\Psi_i\}_1^m$ las funciones de reparto.

Si $(P(t), \vec{Q}(t))$ es solución del problema

$$\Lambda^* \equiv \text{H}_n\text{-T}_1\{P_d, \{\Psi\}, H, \vec{b}\}$$

entonces

$$(\Psi_1(P(t)), \Psi_2(P(t)), \dots, \Psi_m(P(t)), \vec{Q}(t))$$

es solución del problema

$$\Lambda \equiv \text{H}_n\text{-T}_m\{P_d, \{F_i\}_1^m, H, \vec{b}\}$$

Demostración)

Si $(P(t), \vec{Q}(t))$ es solución de Λ^* se verifica

$$\begin{cases} P(t) + H(t, \vec{Q}(t), \vec{Q}'(t)) = P_d(t), \forall t \in [0, T] \\ \vec{Q}(0) = \vec{0}, \vec{Q}(T) = \vec{b} \end{cases}$$

Veremos primero que $(\Psi_1(P(t)), \Psi_2(P(t)), \dots, \Psi_m(P(t)), \vec{Q}(t))$ es admisible y luego que es solución.

Efectivamente, $(\Psi_1(P(t)), \Psi_2(P(t)), \dots, \Psi_m(P(t)), \vec{Q}(t))$ es admisible para Λ , sin más que tener en cuenta que

$$\sum_{i=1}^m \Psi_i(P(t)) = P(t), \forall t \in [0, T]$$

con lo que verifica la ecuación de equilibrio para Λ y \vec{Q} , obviamente, las condiciones de contorno.

Falta ver que $(\Psi_1(P(t)), \Psi_2(P(t)), \dots, \Psi_m(P(t)), \vec{Q}(t))$ minimiza el funcional

$$\int_0^T \sum_{i=1}^m F_i(y_i(t)) dt$$

Lo haremos por reducción al absurdo.

Supondremos que existe $(\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m, \vec{R}(t))$ admisible para Λ

$$\sum_{i=1}^m \tilde{P}_i(t) + H(t, \vec{R}(t), \vec{R}'(t)) = P_d(t), \forall t \in [0, T]$$

con $\vec{R}(0) = \vec{0}$, $\vec{R}(T) = \vec{b}$ verificando

$$\int_0^T \sum_{i=1}^m F_i(\tilde{P}_i(t)) dt < \int_0^T \sum_{i=1}^m F_i(\Psi_i(P(t))) dt$$

y llegaremos a una contradicción.

Efectivamente, si consideramos $\tilde{P}(t) = \sum_{i=1}^m \tilde{P}_i(t)$, $\forall t \in [0, T]$, $\tilde{P}(t)$ es admisible para Λ^* ya que

$$\begin{cases} \tilde{P}(t) + H(t, \vec{R}(t), \vec{R}'(t)) = P_d(t), \forall t \in [0, T] \\ \vec{R}(0) = \vec{0}, \vec{R}(T) = \vec{b} \end{cases}$$

Además, tenemos que

$$\Psi(\tilde{P}(t)) \stackrel{2.5.3}{=} \sum_{i=1}^m F_i(\Psi_i(\tilde{P}(t))) = \min_{\sum_{i=1}^m x_i = \tilde{P}(t)} \left[\sum_{i=1}^m F_i(x_i) \right] \leq \sum_{i=1}^m F_i(\tilde{P}_i(t)), \forall t \in [0, T]$$

y así

$$\int_0^T \Psi(\tilde{P}(t)) dt \leq \int_0^T \sum_{i=1}^m F_i(\tilde{P}_i(t)) dt < \int_0^T \sum_{i=1}^m F_i(\Psi_i(P(t))) dt \stackrel{2.5.3}{=} \int_0^T \Psi(P(t)) dt$$

que contradice la minimalidad de $P(t)$.



Observación 2.5.5. Si el problema es “solo térmico”

$$H_0-T_n\{P_d, \{F_i\}_1^n\}$$

podemos considerar el problema equivalente

$$\hat{\Gamma} \equiv H_0-T_1\{P_d, \{\Psi\}\}$$

donde Ψ representa la equivalente minimizadora de $\{F_i\}_1^n$.

De modo que si $P(t)$ es la solución del problema $\hat{\Gamma}$ y Ψ_i las funciones de reparto

$$(\Psi_1(P(t)), \Psi_2(P(t)), \dots, \Psi_n(P(t))) \text{ es solución de } \Gamma$$

Teniendo en cuenta ahora que $\hat{\Gamma}$ solamente tiene una función admisible, a saber, P_d , ésta será su solución. En consecuencia, la solución del problema original será

$$(\Psi_1(P_d(t)), \Psi_2(P_d(t)), \dots, \Psi_n(P_d(t)))$$

Observación 2.5.6. La posibilidad de construir la equivalente minimizadora radica en la posibilidad de, a partir del conocimiento de la aportación instantánea de las centrales térmicas en su conjunto, asignar a cada central térmica la generación de potencia que haga mínimo el costo instantáneo global de combustible.

En el caso de las centrales hidráulicas esta posibilidad no existe puesto que no hay un modo razonable de realizar el “reparto” a partir del conocimiento de la potencia generada por las centrales hidráulicas en su conjunto. No obstante, sí podría ser ello factible si se tratara del problema recíproco: minimizar el consumo total de agua con un costo de combustible prefijado.

2.6. EQUIVALENTE MINIMIZADORA PARA FUNCIONES DE COSTO: $F_i(x) = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2$

Vamos a calcular la equivalente minimizadora en el caso de que las funciones de costo sean polinomios de segundo grado, que son las que se utilizan sistemáticamente en los trabajos sobre el tema; impondremos, además, la natural restricción de positividad para las potencias térmicas.

Sean $F_i(x) = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2 \forall i = 1, \dots, m$ donde $\beta_i \geq 0$, $\gamma_i > 0$ y $D_i = [0, \infty)$ son sus respectivos dominios de definición.

Supondremos sin pérdida de generalidad que

$$\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_m$$

Lema 2.6.1. Si $\beta_i \leq \beta_j$ y la función $F : D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_m \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m F_i(x_i)$$

tiene en (a_1, \dots, a_m) un mínimo dentro del conjunto

$$C_a = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^m x_i = a\}$$

entonces

$$a_i = 0 \implies a_j = 0$$

Demostración)

Procederemos por reducción al absurdo.

Supongamos que $\beta_i \leq \beta_j$, $a_i = 0$ y que $a_j > 0$.

Consideremos la función

$$f(\varepsilon) = F(a_1, \dots, a_i + \varepsilon, \dots, a_j - \varepsilon, \dots, a_m) - F(a_1, \dots, a_m)$$

$$f(\varepsilon) = F_i(a_i + \varepsilon) + F_j(a_j - \varepsilon) - F_i(a_i) - F_j(a_j)$$

Es claro que si $(a_1, \dots, a_m) \in C_a$ entonces $(a_1, \dots, a_i + \varepsilon, \dots, a_j - \varepsilon, \dots, a_m) \in C_a$ para $0 \leq \varepsilon < a_j$.

Vamos a demostrar que existe ε tal que $f(\varepsilon) < 0$, lo cual será contradictorio con el hecho de que F presenta un mínimo en (a_1, \dots, a_m) dentro de C_a .

Tenemos que f es continua y derivable en el cero con $f(0) = 0$; de modo que será suficiente observar que $f'(0) < 0$.

Efectivamente,

$$f'(\varepsilon) = F'_i(a_i + \varepsilon) - F'_j(a_j - \varepsilon)$$

$$f'(\varepsilon) = \beta_i - \beta_j + 2\gamma_i(a_i + \varepsilon) - 2\gamma_j(a_j - \varepsilon)$$

y, teniendo en cuenta que $a_i = 0$,

$$f'(0) = \beta_i - \beta_j - 2\gamma_j \cdot a_j < 0$$

▲

■ El significado de este lema es el siguiente: funcionando las centrales térmicas de forma óptima, si una de ellas está desconectada (genera cero) también deben estarlo todas aquéllas cuyo coeficiente β_i es mayor o igual que el de aquélla.

Lema 2.6.2. Si $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_m$, entonces los parámetros siguientes

$$\delta_k = \frac{1}{2} \left[\beta_k \sum_{j=1}^k \frac{1}{\gamma_j} - \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\gamma_j} \right]$$

verifican

$$0 = \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_m$$

Demostración)

$$\delta_{k+1} = \frac{1}{2} \left[\beta_{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{\gamma_j} - \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\beta_j}{\gamma_j} \right] = \frac{1}{2} \left[\beta_{k+1} \sum_{j=1}^k \frac{1}{\gamma_j} - \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\gamma_j} \right] \geq \delta_k$$

▲

Lema 2.6.3. La condición necesaria y suficiente para que el mínimo de la función

$$F(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m F_i(x_i)$$

dentro del conjunto

$$C_\xi = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^m x_i = \xi\}$$

se alcance en un punto $(a_1, \dots, a_m) \in \overset{\circ}{C}_\xi$ ($a_i > 0 \forall i$), es que

$$\xi > \frac{1}{2} \left[\beta_m \sum_{j=1}^m \frac{1}{\gamma_j} - \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{\gamma_j} \right] = \delta_m$$

Demostración)

(Necesidad)

Si (a_1, \dots, a_m) es mínimo de F e interior, es mínimo relativo de F en

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^m x_i = \xi\}$$

y se tendrá que, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, es punto crítico de

$$F^*(x_1, \dots, x_m) = F(x_1, \dots, x_m) - \lambda(x_1 + \dots + x_m - \xi)$$

Si denotamos por Π a $\prod_{j=1}^m \gamma_j$ y por Γ_i a $\frac{\Pi}{\gamma_i}$ tendremos (método de los multiplicadores de Lagrange):

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1 + 2\gamma_1 x_1 - \lambda = 0 \\ \beta_2 + 2\gamma_2 x_2 - \lambda = 0 \\ \vdots \\ \beta_m + 2\gamma_m x_m - \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = \xi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \beta_1 \Gamma_1 + 2\Pi x_1 - \lambda \Gamma_1 = 0 \\ \beta_2 \Gamma_2 + 2\Pi x_2 - \lambda \Gamma_2 = 0 \\ \vdots \\ \beta_m \Gamma_m + 2\Pi x_m - \lambda \Gamma_m = 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = \xi \end{array} \right\}$$

de donde

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^m \beta_i \Gamma_i + 2\Pi \xi}{\sum_{i=1}^m \Gamma_i} = \frac{\sum_{i=1}^m \beta_i \frac{\Pi}{\gamma_i} + 2\Pi \xi}{\sum_{i=1}^m \frac{\Pi}{\gamma_i}} = \frac{\sum_{i=1}^m \beta_i \frac{1}{\gamma_i} + 2\xi}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\gamma_i}}$$

Consideremos ahora la función $\Psi_k(\xi)$ como la solución de la incógnita x_k

$$\Psi_k(\xi) = x_k = \frac{\sum_{i=1}^m \beta_i \frac{1}{\gamma_i} + 2\xi}{2\gamma_k \sum_{i=1}^m \frac{1}{\gamma_i}} - \frac{\beta_k}{2\gamma_k}$$

$$\Psi_k(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^m \beta_i \frac{1}{\gamma_i} + 2\xi}{2\gamma_m \sum_{i=1}^m \frac{1}{\gamma_i}} - \frac{\beta_k}{2\gamma_k} = 0 \iff \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^m \frac{\beta_k}{\gamma_i} - \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{\gamma_i} \right] = \xi$$

Si hacemos ahora

$$\Delta_k = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^m \frac{\beta_k}{\gamma_i} - \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{\gamma_i} \right]$$

está claro que

$$\Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \dots \leq \Delta_m = \delta_m$$

Es evidente que la solución para cada $k, \Psi_k(\xi)$, es estrictamente creciente con respecto a ξ ; de modo que

$$\xi \leq \delta_m \implies \Psi_m(\xi) = a_m \leq \Psi_m(\delta_m) = 0$$

o, su contrarrecíproco,

$$\Psi_m(\xi) = a_m > 0 \implies \xi > \delta_m$$

(Suficiencia)

Está claro que el mínimo de F existe por ser C_ξ compacto.

Si $\xi > \delta_m$ entonces

$$\xi > \Delta_k, \forall k = 1, \dots, m.$$

consideremos ahora

$$(a_1, \dots, a_m) = (\Psi_1(\xi), \dots, \Psi_m(\xi))$$

punto crítico del funcional convexo

$$F^*(x_1, \dots, x_m) = F(x_1, \dots, x_m) - \lambda(x_1 + \dots + x_m - \xi)$$

donde

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^m \beta_i \frac{1}{\gamma_i} + 2\xi}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\gamma_i}}$$

Tendremos que (a_1, \dots, a_m) es mínimo de F^* y, en consecuencia - lema de Lagrange-, es también mínimo de la restricción de F en

$$\{(x_1, \dots, x_m) \mid \sum_{i=1}^m x_i = \xi\}$$

Además

$$\xi > \Delta_k \implies \Psi_k(\xi) = a_k > 0$$

de modo que $(a_1, \dots, a_m) \in \overset{\circ}{C}_\xi$



Proposición 2.6.4. *La función k -ésima de reparto $\forall k = 1, \dots, m$ es*

$$\Psi_k(\xi) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^j \frac{\beta_i}{\gamma_i} + 2\xi}{2\gamma_k \sum_{i=1}^j \frac{1}{\gamma_i}} - \frac{\beta_k}{2\gamma_k} & \text{si } \delta_k \leq \delta_j \leq \xi < \delta_{j+1} \\ 0 & \text{si } \xi < \delta_k \end{cases}$$

donde los coeficientes δ_k son:

$$\delta_k = \frac{1}{2} \left[\beta_k \sum_{i=1}^k \frac{1}{\gamma_i} - \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i}{\gamma_i} \right]$$

Demostración)

Por el lema anterior, cuando $\xi > \delta_m$, las funciones de reparto $\Psi_k(\xi)$ son estrictamente positivas para todo k y no hay más que observar la expresión de la solución para x_k .

Si $\delta_{m-1} < \xi \leq \delta_m$, entonces el mínimo de $\sum_{i=1}^m F_i(x_i)$ no puede ser interior, de modo que, por el lema 2.6.1, debe anularse al menos x_m . Así pues, $\Psi_m(\xi) = 0$.

Con las restantes se razona de modo análogo en un problema de dimensión $m - 1$

$$\Psi_k(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\beta_i}{\gamma_i} + 2\xi}{2\gamma_k \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\gamma_i}} - \frac{\beta_k}{2\gamma_k}$$

Si $\delta_{m-2} < \xi \leq \delta_{m-1}$, entonces $\Psi_m(\xi) = 0$ y, razonando igual que antes, $\Psi_{m-1}(\xi) = 0$ y para $k < m - 1$ se tendrá

$$\Psi_k(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^{m-2} \frac{\beta_i}{\gamma_i} + 2\xi}{2\gamma_k \sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{\gamma_i}} - \frac{\beta_k}{2\gamma_k}$$

Por último, reiterando nuevamente el razonamiento, si $\delta_j < \xi \leq \delta_{j+1}$ tendremos que la función de reparto k -ésima valdrá 0 si $\xi < \delta_k$ y, cuando $\delta_k \leq \xi$ ($k = 1, \dots, j$),

$$\Psi_k(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^j \frac{\beta_i}{\gamma_i} + 2\xi}{2\gamma_k \sum_{i=1}^j \frac{1}{\gamma_i}} - \frac{\beta_k}{2\gamma_k}$$

▲

■ En resumen, si $\delta_j \leq \xi < \delta_{j+1}$, el “reparto” se efectúa entre las centrales térmicas de la primera a la j -ésima, permaneciendo las restantes inactivas.

Teorema 2.6.5. *La función equivalente minimizadora⁵ es polinómica de segundo grado a trozos*

$$\Psi(\xi) = \sum_{i=1}^m F_i(\Psi_i(\xi)) = \tilde{\alpha}_k + \tilde{\beta}_k \xi + \tilde{\gamma}_k \xi^2 \text{ si } \delta_k \leq \xi < \delta_{k+1},$$

$$\bullet \tilde{\gamma}_k = \frac{1}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{\gamma_i}} \bullet \tilde{\beta}_k = \tilde{\gamma}_k \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i}{\gamma_i} \bullet \tilde{\alpha}_k = \sum_{i=1}^m \alpha_i + \frac{\tilde{\beta}_k^2}{4\tilde{\gamma}_k} - \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{4\gamma_i}$$

Además es de clase C^1 y verifica $\Psi'(\delta_k) = \beta_k$ para $i = 1, \dots, m$.

Demostración)

Es evidente que Ψ es polinomio de segundo grado a trozos. Los coeficientes $\tilde{\alpha}_m$, $\tilde{\beta}_m$ y $\tilde{\gamma}_m$ se obtienen sin dificultad en [7] donde se trata la cuestión sin tener en cuenta las restricciones; de modo que está claro que, en nuestro caso, serán el resultado de cambiar en dichas fórmulas m por k , con la salvedad de la expresión de $\tilde{\alpha}_k$ que se mantiene un sumatorio hasta m , que representa la suma de los consumos de combustible de las centrales cuando están desconectadas (generación nula).

Veremos, a continuación, que los límites laterales de Ψ y de Ψ' coinciden en los únicos puntos conflictivos que son los δ_k .

Observemos en primer lugar que

$$\delta_k = \frac{1}{2} \left[\beta_k \sum_{i=1}^k \frac{1}{\gamma_i} - \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i}{\gamma_i} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\beta_k - \tilde{\beta}_k}{\tilde{\gamma}_k} \right]$$

$$\delta_k = \frac{1}{2} \left[\beta_k \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\gamma_i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\beta_i}{\gamma_i} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\beta_k - \tilde{\beta}_{k-1}}{\tilde{\gamma}_{k-1}} \right]$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\beta_k^2}{4\gamma_i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\beta_i^2}{4\gamma_i} = \sum_{i=1}^k \frac{\beta_k^2}{4\gamma_i} - \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{4\gamma_i}$$

Veamos ahora que los límites laterales de Ψ en δ_k coinciden:

⁵La idea de la térmica equivalente no es totalmente original. **El-Hawary M.E.** [34] la considera en los problemas solo térmicos, aunque pasándole desapercibida la necesidad de definir a trozos la térmica equivalente, consecuencia lógica de haber obviado la restricción de positividad de las potencias. Es curioso, sin embargo, que la idea apenas se haya utilizado en problemas con componente hidráulica que es donde adquiere su verdadera importancia.

$$\Psi(\delta_k^+) = \tilde{\alpha}_k + \tilde{\beta}_k \frac{1}{2} \left[\frac{\beta_k - \tilde{\beta}_k}{\tilde{\gamma}_k} \right] + \tilde{\gamma}_k \frac{1}{2} \left[\frac{\beta_k - \tilde{\beta}_k}{\tilde{\gamma}_k} \right]^2$$

$$\Psi(\delta_k^+) = \tilde{\alpha}_k + \frac{1}{4} \left[\frac{2\tilde{\beta}_k\beta_k - 2\tilde{\beta}_k^2}{\tilde{\gamma}_k} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{\beta_k - \tilde{\beta}_k}{\tilde{\gamma}_k} \right]^2$$

$$\Psi(\delta_k^+) = \tilde{\alpha}_k + \frac{2\tilde{\beta}_k\beta_k - 2\tilde{\beta}_k^2 + [\beta_k - \tilde{\beta}_k]^2}{4\tilde{\gamma}_k} = \tilde{\alpha}_k + \frac{[\beta_k^2 - \tilde{\beta}_k^2]}{4\tilde{\gamma}_k}$$

$$\Psi(\delta_k^+) = \sum_{i=1}^m \alpha_i + \frac{\tilde{\beta}_k^2}{4\tilde{\gamma}_k} - \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{4\gamma_i} + \frac{[\beta_k^2 - \tilde{\beta}_k^2]}{4\tilde{\gamma}_k} = \sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{4\gamma_i} + \frac{\beta_k^2}{4\tilde{\gamma}_k}$$

Análogamente

$$\Psi(\delta_k^-) = \tilde{\alpha}_{k-1} + \tilde{\beta}_k \frac{1}{2} \left[\frac{\beta_k - \tilde{\beta}_{k-1}}{\tilde{\gamma}_{k-1}} \right] + \tilde{\gamma}_{k-1} \frac{1}{2} \left[\frac{\beta_k - \tilde{\beta}_{k-1}}{\tilde{\gamma}_{k-1}} \right]^2$$

$$\Psi(\delta_k^-) = \sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\beta_i^2}{4\gamma_i} + \frac{\beta_k^2}{4\tilde{\gamma}_{k-1}}$$

En definitiva

$$\Psi(\delta_k^-) = \sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\beta_i^2}{4\gamma_i} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\beta_i^2}{\gamma_i} = \sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{4\gamma_i} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{\gamma_i} = \Psi(\delta_k^+)$$

Veamos, por último, que las derivadas laterales de Ψ en los puntos δ_k también coinciden

$$\Psi'(\delta_k^+) = \tilde{\beta}_k + 2\tilde{\gamma}_k\delta_k = \tilde{\beta}_k + \beta_k - \tilde{\beta}_k = \beta_k$$

$$\Psi'(\delta_k^-) = \tilde{\beta}_{k-1} + 2\tilde{\gamma}_{k-1}\delta_k = \tilde{\beta}_{k-1} + \beta_k - \tilde{\beta}_{k-1} = \beta_k$$

▲

Ejemplo 2.6.1. Vamos a calcular la equivalente minimizadora, considerando la restricción de positividad en el dominio de las funciones de costo, de las cuatro funciones de costo siguientes:

$$F_1(x) = x + 4x^2 ; F_2(x) = 2x + 3x^2 ; F_3(x) = 3x + 2x^2 ; F_4(x) = 4x + x^2$$

Los δ_i que aparecían en el apartado anterior son, en este caso:

$$0 < 1/8 < 5/12 < 23/24$$

y la equivalente minimizadora

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 + x + 4x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/8 \\ -1/28 + 11/7x + 12/7x^2 & \text{si } 1/8 \leq x \leq 5/12 \\ -9/52 + 29/13x + 12/13x^2 & \text{si } 5/12 \leq x \leq 23/24 \\ -29/50 + 77/25x + 12/25x^2 & \text{si } 23/24 \leq x \end{cases}$$

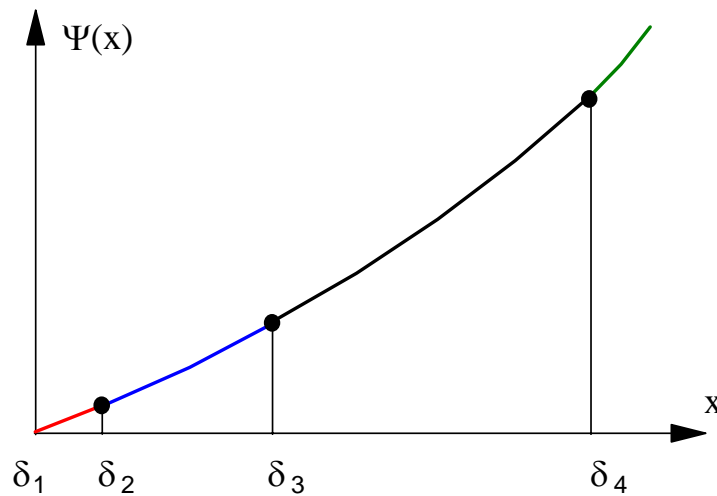


Figura 2.1: Térmica equivalente.

2.7. REPLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Una vez demostrado que el concepto de pérdidas puede ser obviado con una adecuada modificación de la función de costo y que todo problema de tipo (H_n-T_m) puede ser sustituido por otro de la forma (H_n-T_1) , seguido de otro “solo térmico”, nos centraremos en los de tipo (H_n-T_1) que constituyen el auténtico problema variacional. Además, dicho problema variacional presenta una ligadura (ecuación de equilibrio)

$$y(t) + H(t, \vec{Z}(t), \vec{Z}'(t)) = P_d(t), \forall t \in [0, T]$$

que puede suprimirse juntamente con la función incógnita $y(t)$, trasladando así el problema a la minimización del funcional

$$F(\vec{Z}) = F(z_1, \dots, z_n) = \int_0^T \Psi \left(P_d(t) - H(t, \vec{Z}(t), \vec{Z}'(t)) \right) dt$$

con las condiciones de contorno $\vec{Z}(0) = \vec{0}$, $\vec{Z}(T) = \vec{b}$.

Definición 2.7.1. Diremos que una función \vec{Q} es admisible para el problema

$$H_n-T_1\{P_d, \Psi, H, \vec{b}\}$$

si:

- i) \vec{Q} es admisible para H .
- ii) $P_d(t) - H(t, \vec{Q}(t), \vec{Q}'(t))$ admisible para Ψ .
- iii) $\vec{Q}(0) = \vec{0}$, $\vec{Q}(T) = \vec{b}$.

Definición 2.7.2. Llamaremos $\Theta_{\vec{b}}$ al conjunto de funciones admisibles.

Definición 2.7.3. Diremos que \vec{Q} es solución del problema $H_n-T_1\{P_d, \Psi, H, \vec{b}\}$ si es admisible y

$$\int_0^T \Psi \left(P_d(t) - H(t, \vec{Q}(t), \vec{Q}'(t)) \right) dt = \min_{\vec{Z} \in \Theta_{\vec{b}}} \int_0^T \Psi \left(P_d(t) - H(t, \vec{Z}(t), \vec{Z}'(t)) \right) dt$$

Observación 2.7.4. El valor de la incógnita $y(t)$, que desaparece como tal con el nuevo planteamiento y que representa el aporte de las centrales térmicas al sistema, se recupera una vez conocidos los valores de las demás incógnitas. Para conocer la aportación particular de cada una de ellas habrá que recurrir a las funciones de reparto.

Capítulo 3

PROBLEMA H_1-T_1 SIN RESTRICCIONES

3.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior, se hicieron una serie de consideraciones que permitieron replantear el problema clásico de optimización hidrotérmica, presentándolo como un problema variacional sin ligaduras.

En este capítulo, analizaremos el caso particular de sistemas hidrotérmicos que constan de una única central hidráulica. Realizaremos el estudio permitiendo que las funciones admisibles no tengan más restricciones que su pertenencia a $KC^1[0, T]$ y las restricciones de volumen disponible. Quedan de este modo incluidas en nuestro estudio las denominadas centrales de bombeo¹ al permitir que la función de generación hidráulica efectiva $H(t, z, z')$ esté definida para valores negativos de z' (caudal). Asimismo, permitiremos que la función de coste térmico Ψ admita argumento (potencia térmica) negativo, lo que equivale a consentir que la potencia hidráulica efectiva exceda a la potencia demandada pudiendo con ello reportar costes negativos (beneficios²) que compensen los costes térmicos positivos. Asimismo, procuraremos que las aplicaciones P_d , Ψ y H sean lo más generales posible sin más imposiciones que las naturales en este tipo de problemas. A lo largo de todo el capítulo supondremos, por comodidad, que son suficientemente derivables y haremos las

¹Las centrales de bombeo disponen de la capacidad de bombear agua, en determinados momentos, con el propósito de utilizarla en otros de modo más eficiente. Cuando se produce el bombeo, obviamente, se está descargando un caudal negativo y se está generando una potencia también negativa (la que consume la bomba).

²Es perfectamente posible que las centrales generen potencia en exceso y la deriven hacia otros sistemas con la consiguiente compensación económica. Por otra parte, si en lugar de minimizar el coste de combustible, disponiendo de una cantidad limitada de agua, consideramos el problema recíproco: minimizar el consumo de agua disponiendo de una cantidad limitada de combustible, las centrales de bombeo (que jugarían el papel de térmicas) constituyen un ejemplo donde se pueden producir costes negativos (recuperación de agua).

siguientes suposiciones adicionales:

• **Función de costo térmico.**

Supondremos que la función de costo $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifica

$$\Psi'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

y es, en consecuencia, estrictamente creciente³.

Supondremos también que verifica

$$\Psi''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

y es, por tanto, estrictamente convexa⁴.

• **Función de generación hidráulica efectiva.**

Supondremos que $H(t, z, z')$ de dominio $\Omega_H = [0, T] \times \mathbb{R}^2$ es estrictamente creciente⁵ con respecto al caudal z' , verificándose

$$\frac{\partial H(t, z, z')}{\partial z'} > 0$$

Supondremos también la concavidad⁶ de $H(t, z, z')$ con respecto a z' , es decir

$$\frac{\partial^2 H(t, z, z')}{\partial z'^2} \leq 0$$

Definición 3.1.1. Llamaremos φ_b al problema de minimizar el funcional

$$F(z(t)) = \int_0^T L(t, z(t), z'(t)) dt$$

con L de la forma

$$L(t, z(t), z'(t)) = \Psi(P_d(t) - H(t, z(t), z'(t)))$$

dentro del conjunto

$$\Theta_b = \{z \in KC^1[0, T] \mid z(0) = 0, z(T) = b\}$$

Observación 3.1.2. Con las suposiciones que hemos hecho queda garantizado el cumplimiento de las siguientes desigualdades:

³Esta exigencia es absolutamente natural toda vez que significa “más consumo a mayor potencia generada”.

⁴Esta suposición, a pesar de satisfacerla los modelos habituales, no es natural como la anterior; sin embargo, es una propiedad clave para determinar el carácter minimizante de una extremal.

⁵Significa “más potencia a mayor caudal”.

⁶Si suponemos concavidad estricta podemos rebajar la hipótesis de convexidad estricta de Ψ a simple convexidad.

- $L_{z'z'}(t, z, z') > 0$ (Condición de Legendre).
- $L_{z'}(t, z, z') < 0$.

Definición 3.1.3. Diremos que q es admisible para \wp_b si $q \in \Theta_b$.

Definición 3.1.4. Diremos que q es solución del problema \wp_b si:

- q es admisible.
- $F(q) \leq F(z) \forall z \in \Theta_b$.

Definición 3.1.5. Diremos que q es solución local⁷ de \wp_b si es admisible y mínimo fuerte relativo del funcional F .

■ Vamos a estudiar la existencia y, en su caso, a construir las extremales que satisfagan la condición de mínimo local fuerte. Es nuestro propósito investigar los aspectos que inciden más directamente sobre esta cuestión mostrando, además, técnicas que pueden proporcionar en un futuro nuevos resultados.

3.2. ECUACIONES DE COORDINACIÓN

La determinación de las extremales de un funcional pasa por la resolución de una ecuación diferencial de segundo orden (ecuación de Euler) con condiciones de contorno. En general, salvo casos muy particulares, se trata un problema muy complejo incluso desde el punto de vista del cálculo numérico. La particular expresión que presenta la ecuación de Euler permite, sin embargo, transformarla en otra ecuación, en la que no aparece la derivada segunda, que nos permitirá obtener información cualitativa de las extremales y proporcionará un método muy sencillo y versátil de resolución aproximada.

Lema 3.2.1. (*Lema de Coordinación*)

Si $z(t)$ satisface en $[0, \tau]$ la ecuación de Euler del funcional

$$F(z) = \int_0^T L(t, z(t), z'(t)) dt$$

donde $L(t, z(t), z'(t)) = \Psi(P_d(t) - H(t, z(t), z'(t)))$, entonces existe una constante positiva K tal que $\forall t \in [0, \tau]$ se verifican las relaciones:

I)

$$-\frac{\partial L(t, z(t), z'(t))}{\partial z'} + \int_0^t \frac{\partial L(s, z(s), z'(s))}{\partial z} ds = K$$

II)

⁷Discriminar si una solución local es solución del problema es una cuestión que tan solo en casos muy particulares resolveremos de un modo definitivo.

$$-\frac{\partial L(t, z(t), z'(t))}{\partial z'} \exp \left(- \int_0^t \frac{\frac{\partial H(s, z(s), z'(s))}{\partial z}}{\frac{\partial H(s, z(s), z'(s))}{\partial z'}} ds \right) = K$$

Demostración)

Si $z(t)$ satisface la ecuación de Euler del funcional tenemos que:

$$L_z(t, z(t), z'(t)) - \frac{d}{dt} (L_{z'}(t, z(t), z'(t))) = 0$$

I) Sin más que integrar se obtiene⁸:

$$-L_{z'}(t, z(t), z'(t)) + \int_0^t L_z(s, z(s), z'(s)) ds = -L_{z'}(0, z(0), z'(0)) = K > 0, \forall t \in [0, \tau]$$

II)

Si en la ecuación de Euler dividimos por $L_{z'}(t, z(t), z'(t)) < 0, \forall t$, tendremos

$$\frac{L_z(t, z(t), z'(t))}{L_{z'}(t, z(t), z'(t))} - \frac{\frac{d}{dt} [L_{z'}(t, z(t), z'(t))]}{L_{z'}(t, z(t), z'(t))} = 0$$

e integrando

$$\int_0^t \frac{L_z(s, z(s), z'(s))}{L_{z'}(s, z(s), z'(s))} ds - \ln |L_{z'}(s, z(s), z'(s))| \Big|_0^t = 0$$

$$\int_0^t \frac{L_z(s, z(s), z'(s))}{L_{z'}(s, z(s), z'(s))} ds - \ln |L_{z'}(t, z(t), z'(t))| + \ln |L_{z'}(0, z(0), z'(0))| = 0$$

$$|L_{z'}(0, z(0), z'(0))| = |L_{z'}(t, z(t), z'(t))| \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{L_z(s, z(s), z'(s))}{L_{z'}(s, z(s), z'(s))} ds \right]$$

Pero, teniendo en cuenta que $L_{z'}(t, z(t), z'(t)) < 0$ y que

$$\frac{L_z(s, z(s), z'(s))}{L_{z'}(s, z(s), z'(s))} = \frac{H_z(s, z(s), z'(s))}{H_{z'}(s, z(s), z'(s))}$$

tenemos, como pretendíamos, que $\forall t \in [0, \tau]$

⁸Esta relación aparece en [96] como paso previo a la obtención de la que denominan segunda ecuación de Euler-Lagrange.

$$-L_{z'}(t, z(t), z'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, z(s), z'(s))}{H_{z'}(s, z(s), z'(s))} ds \right] = -L_{z'}(0, z(0), z'(0)) = K \in \mathbb{R}^+$$

▲

Definición 3.2.2. A las relaciones anteriores las denominaremos, respectivamente, primera y segunda *ecuaciones de coordinación* de $z(t)$ y a la constante positiva

$$K = \frac{\partial H(0, z(0), z'(0))}{\partial z'} \Psi'(P_d(0) - H(0, z(0), z'(0))) = -L_{z'}(0, z(0), z'(0))$$

constante de coordinación de la extremal.

Notación 3.2.3. En lo sucesivo, con el fin de abreviar la escritura de las expresiones en las que aparezca, haremos

$$E(t, q) = \exp \left(- \int_0^t \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}(s, q(s), q'(s))} ds \right)$$

3.3. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE EXTREMALES

Veremos, a continuación, una serie de teoremas que establecen condiciones suficientes para la existencia de extremales del funcional F , cuyo dominio se extienda a todo el intervalo $[0, T]$. Téngase en cuenta que las extremales que cumplen la condición inicial $z(0) = 0$ tienen garantizado su dominio en un entorno del origen, que puede no prolongarse hasta el instante T , en cuyo caso podríamos no tener solución para el problema.

Teorema 3.3.1. *Si se verifican las siguientes condiciones:*

- i) $\lim_{z' \rightarrow +\infty} [\inf_{\{z, t\}} L_{z'}(t, z, z')] = 0$
- ii) $\lim_{z' \rightarrow -\infty} [\sup_{\{z, t\}} L_{z'}(t, z, z')] = -\infty$
- iii) $0 < \eta_1 < E(t, Q) < \eta_2 < \infty, \forall Q \in C^2([0, T], \mathbb{R})$
entonces $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ existe una única extremal

$$q \in C^2([0, T], \mathbb{R})$$

que satisface las condiciones:

$$q(0) = 0 \text{ y } q'(0) = \lambda$$

Demostración)

La ecuación de Euler asociada al funcional F da lugar a la ecuación diferencial de 2º orden

$$L_z - L_{tz'} - z' L_{zz'} - z'' L_{z'z'} = 0$$

en la cual puede despejarse

$$z'' = \frac{L_z - L_{tz'} - z' L_{zz'}}{-L_{z'z'}}$$

de donde, por verificarse $L_{z'z'} \neq 0$, podemos reescribir la ecuación como

$$z'' = f(t, z, z')$$

con $f \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^2)$; de modo que el *Problema de Cauchy*:

$$\left. \begin{aligned} z'' &= f(t, z, z') \\ z(0) &= 0 \\ z'(0) &= \lambda \end{aligned} \right\}$$

tiene solución única en un entorno a la derecha de 0.

Sea (q, I) solución maximal a derecha del anterior Problema de Cauchy. Bastará ver que $I = [0, T]$ o, lo que es lo mismo, que la solución maximal es global.

Procederemos por reducción al absurdo, suponiendo que $I = [0, \tau)$.

En tal caso, existirá una sucesión $\{t_n\}_1^\infty \subset I$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \tau$ que verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} |q'(t_n)| = \infty$

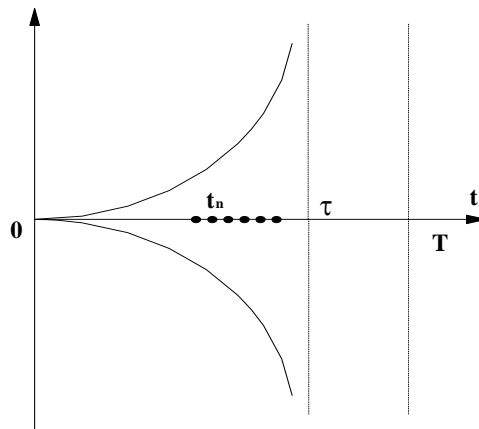


Figura 3.1: Solucin maximal.

Por el lema de coordinación (3.2.1.), $q(t)$ debe verificar $\forall t \in I$

$$-L_{z'}(t, q(t), q'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{L_z(s, q(s), q'(s))}{L_{z'}(s, q(s), q'(s))} ds \right] = K \neq 0$$

o, lo que es lo mismo,

$$K = -L_{z'}(t, q(t), q'(t)) \cdot E(t, q)$$

Analizaremos los dos casos posibles:

A)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q'(t_n) = \infty$$

Consideremos la sucesión constantemente igual a K

$$S_n = -L_{z'}(t_n, q(t_n), q'(t_n)) \cdot E(t_n, q(t_n))$$

Por ser L decreciente con respecto a z' ,

$$\inf_{\{z,t\}} [L_{z'}(t, z, q'(t_n))] \leq L_{z'}(t_n, q(t_n), q'(t_n)) < 0$$

y, por la hipótesis i),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\{z,t\}} [L_{z'}(t, z, q'(t_n))] = 0$$

con lo cual,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{z'}(t_n, q(t_n), q'(t_n)) = 0$$

y, teniendo en cuenta ahora la hipótesis iii),

$$0 < \eta_1 < E(t_n, q(t_n)) < \eta_2 < \infty$$

resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$$

que contradice el hecho de que

$$S_n = K \neq 0, \forall n$$

B)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q'(t_n) = -\infty$$

se llegará a idéntica contradicción, teniendo en cuenta que $\forall n$

$$\sup_{\{z,t\}} [L_{z'}(t, z, q'(t_n))] \geq L_{z'}(t_n, q(t_n), q'(t_n))$$

y, por la hipótesis ii),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\{z,t\}} [L_{z'}(t, z, q'(t_n))] = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{z'}(t_n, q(t_n), q'(t_n)) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

que contradice nuevamente la constancia de S_n .

▲

Observación 3.3.2. Las hipótesis i) y ii) del teorema anterior hacen referencia al comportamiento asintótico “extremo” de $L_{z'}$, con respecto al caudal, que debe ser independiente del instante y del volumen. Más concretamente, la hipótesis i) viene a significar que, para valores muy grandes del caudal, el coste de combustible presenta escasa variación, comparada con la variación del caudal. La hipótesis ii) se puede interpretar como que la central de bombeo, al bombear caudales grandes, hace aumentar de modo desproporcionado (se dispara) el consumo de combustible. La hipótesis iii) viene a significar que la influencia del caudal, en la función de generación hidráulica efectiva, no es de orden inferior a la del volumen. De hecho, si se da la acotación

$$\exists \eta > 0 \text{ tal que } \left| \frac{\partial H(t, z, z')}{\partial z} \right| < \eta \frac{\partial H(t, z, z')}{\partial z'}, \forall (t, z, z')$$

se verifica dicha hipótesis.

■ En algunos casos particulares se pueden relajar las hipótesis del teorema anterior; veamos dos casos especialmente interesantes.

Teorema 3.3.3. Si la función de generación hidráulica efectiva es de la forma⁹

$$H(t, z, z') = f(z) \cdot z'$$

se verifican las propiedades siguientes:

i) Para toda q extremal de F existe una constante $K_q = P_d(0) - f(q(0)) \cdot q'(0)$, verificando

$$P_d(t) - f(q(t)) \cdot q'(t) = K_q, \forall t \in [0, T]$$

es decir, la potencia térmica óptima es constante.

ii) Si $\exists \vartheta > 0$ tal que $\forall z, f(z) > \vartheta$, entonces $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ existe una única extremal

$$q \in C^2([0, T], \mathbb{R})$$

que satisface las condiciones:

$$q(0) = 0 \text{ y } q'(0) = \lambda$$

⁹En este modelo se engloban las centrales cuya generación de potencia es proporcional al caudal y a la altura, siendo esta última dependiente exclusivamente del volumen, despreciándose o no existiendo las pérdidas. Entre ellas cabe destacar las denominadas centrales de carga fija, en las que $f(z) = Cte$.

Demostración)

i) Si observamos la segunda ecuación de coordinación tendremos

$$\Psi' (P_d(t) - f(q(t)) \cdot q'(t)) \cdot f(q(t)) \exp \left(- \int_0^t \frac{f'(q(s)) \cdot q'(s)}{f(q(s))} ds \right) = K$$

$$\Psi' (P_d(t) - f(q(t)) \cdot q'(t)) \cdot f(q(t)) \exp (- \ln f(q(t)) + \ln f(0)) = K$$

$$\Psi' (P_d(t) - f(q(t)) \cdot q'(t)) \cdot f(q(t)) \cdot \frac{f(0)}{f(q(t))} = K$$

$$\Psi' (P_d(t) - f(q(t)) \cdot q'(t)) = \tilde{K}$$

$$P_d(t) - f(q(t)) \cdot q'(t) = (\Psi')^{-1} (\tilde{K}) = K_q$$

ii) Razonando análogamente a como se hizo en el teorema 3.3.1, veremos que la solución maximal a derecha es global.

Efectivamente, en caso contrario el intervalo maximal sería de la forma $[0, \tau)$ verificándose que $\lim_{t \rightarrow \tau^-} |q'(t)| = \infty$ y, por tanto, también $\lim_{t \rightarrow \tau^-} |f(q(t)) \cdot q'(t)| = \infty$, que contradice, obviamente, la constancia de $P_d(t) - f(q(t)) \cdot q'(t)$.

▲

Teorema 3.3.4. *Si la función de generación hidráulica efectiva es de la forma¹⁰*

$$H(t, z, z') = \Phi(f(z) \cdot z')$$

entonces se verifican las propiedades siguientes:

i) *Si q es extremal de F , su segunda ecuación de coordinación es:*

$$\Psi' (P_d(t) - \Phi(f(q(t)) \cdot q'(t))) \cdot \Phi'(f(q(t)) \cdot q'(t)) = K$$

ii) *Si $\exists \vartheta > 0$ tal que $\forall z, f(z) > \vartheta$, y las funciones auxiliares $\Upsilon_t(x) = \Psi(P_d(t) - \Phi(x))$ cumplen las dos propiedades siguientes:*

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \Upsilon_t'(x) = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} |\Upsilon_t'(x)| = \infty$$

entonces, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ existe una única extremal

$$q \in C^2([0, T], \mathbb{R})$$

¹⁰En este modelo, se engloban las centrales comentadas en la nota anterior, admitiendo la posibilidad de existencia de pérdidas.

que satisface las condiciones:

$$q(0) = 0 \text{ y } q'(0) = \lambda$$

Demostración)

i) Análoga a la del teorema anterior.

ii) No hay más que observar que

$$\Psi'(P_d(t) - \Phi(f(q(t)) \cdot q'(t))) \cdot \Phi'(f(q(t)) \cdot q'(t)) = -\Upsilon'_t(f(q(t)) \cdot q'(t))$$

de modo que

$$-\Upsilon'_t(f(q(t)) \cdot q'(t)) = K$$

con lo cual, el resto es también análogo al teorema anterior.

▲

3.4. APLICACIONES DE TIRO

La existencia de extremales no garantiza que el problema tenga solución. Puede suceder que las extremales no satisfagan una condición necesaria como es la posibilidad de inclusión en un campo de extremales. Asimismo, puede suceder que ninguna extremal satisfaga las condiciones de contorno (restricción de volumen disponible). En el presente apartado se analizarán hipótesis adicionales cuyo cumplimiento garantiza el carácter de mínimo relativo fuerte de las extremales, así como otras que asegurarán la compatibilidad con cualquier restricción de volumen disponible.

Supondremos, a lo largo del presente apartado, que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists |q_\lambda$ extremal del funcional F que satisface las condiciones:

$$q_\lambda(0) = 0 \text{ y } q'_\lambda(0) = \lambda$$

Definición 3.4.1. Denominaremos *aplicación de tiro*¹¹ en t del funcional F a la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \varphi_t : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \lambda & \longrightarrow & q_\lambda(t) \end{array}$$

donde denotamos por q_λ la extremal del funcional F que satisface las condiciones:

$$q_\lambda(0) = 0 \text{ y } q'_\lambda(0) = \lambda$$

¹¹Las hemos denominado así en alusión al denominado método de tiro para la resolución de ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno. Estas aplicaciones son de clase C^1 , en virtud del teorema de diferenciabilidad respecto de las condiciones iniciales.

Lema 3.4.2. *Si las aplicaciones de tiro φ_t de F son estrictamente crecientes entonces las extremales q_λ forman un campo central con centro en el origen de coordenadas.*

Demostración)

Es claro que el centro es $(0, 0)$ ya que:

$$q_\lambda(0) = 0, \forall \lambda$$

Además $\forall t \in (0, T]$ y $\forall \lambda_1 < \lambda_2$:

$$q_{\lambda_1}(t) = \varphi_t(\lambda_1) < \varphi_t(\lambda_2) = q_{\lambda_2}(t)$$

▲

Teorema 3.4.3. *Si las aplicaciones de tiro φ_t de F son estrictamente crecientes, entonces cada extremal q_λ es la única solución local del problema $\varphi_{q_\lambda(T)}$.*

Demostración)

Para que una extremal q sea un mínimo fuerte (relativo) es suficiente que pueda ser incluida en un campo de extremales y verifique

$$L_{z'z'}(t, q(t), p) > 0, \forall t \in [0, T], \forall p \in \mathbb{R}$$

La posibilidad de ser incluida en un campo de extremales se probó en el lema 3.4.2.

La segunda condición es consecuencia inmediata de las propiedades que habíamos impuesto inicialmente al funcional.

La unicidad es obvia teniendo en cuenta el carácter creciente de las aplicaciones de tiro.

▲

Proposición 3.4.4. *Si las aplicaciones de tiro φ_t de F son estrictamente crecientes, entonces*

$$B = \{b \mid \varphi_b \text{ tiene solución local}\}$$

es un intervalo abierto (no necesariamente acotado).

Demostración)

Teniendo en cuenta el teorema anterior, habrá que ver únicamente que los valores posibles de las extremales en T constituyen un intervalo abierto.

Efectivamente, $B = \varphi_T(\mathbb{R})$ es imagen de la aplicación continua φ_T del conexo \mathbb{R} y, por tanto, un intervalo. Por otra parte, el carácter creciente de la aplicación de tiro nos asegura que B es abierto.

▲

3.5. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN LOCAL

Con la proposición 3.4.4, ha quedado abierta la posibilidad de que, para valores determinados de b , el problema φ_b carezca de solución. Veremos, a continuación, un teorema que establece condiciones suficientes para la existencia de solución para cualquier restricción de volumen disponible.

Definición 3.5.1. Denominaremos *aplicación de caudal en t* del funcional F , a la aplicación

$$\begin{aligned} \psi_t : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longrightarrow q'_\lambda(t) \end{aligned}$$

donde denotamos por q_λ la extremal del funcional F que satisface las condiciones:

$$q_\lambda(0) = 0 \text{ y } q'_\lambda(0) = \lambda$$

Lema 3.5.2. Si las aplicaciones de caudal ψ_t son estrictamente crecientes, también lo son las aplicaciones de tiro φ_t .

Demostración)

$$\varphi_t(\lambda) = q_\lambda(t) = \int_0^t q'_\lambda(x) dx = \int_0^t \psi_x(\lambda) dx$$

Teniendo en cuenta que

$$\lambda_1 < \lambda_2 \implies \psi_x(\lambda_1) < \psi_x(\lambda_2), \forall x \in [0, T]$$

$$\varphi_t(\lambda_1) = \int_0^t q'_{\lambda_1}(x) dx = \int_0^t \psi_x(\lambda_1) dx < \int_0^t \psi_x(\lambda_2) dx = \int_0^t q'_{\lambda_2}(x) dx = \varphi_t(\lambda_2)$$

▲

Teorema 3.5.3. Si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ existe una única extremal que satisface $q(0) = 0$ y $q'(0) = \lambda$, las aplicaciones de caudal ψ_t son estrictamente crecientes y se verifican las hipótesis

- i) $0 < \eta_1 < E(t, Q) < \eta_2 < \infty, \forall Q \in C^2([0, T], \mathbb{R})$
- ii) $\forall z', \forall t : \inf_z H_{z'}(t, z, z') = I(t, z') > 0$
- iii) $\forall z', \forall t : \inf_z H(t, z, z') = \tilde{I}(t, z') > -\infty$
- iv) $\forall z', \forall t : \sup_z H(t, z, z') = S(t, z') < \infty$
- v) $\forall z', \forall t : \sup_z H_{z'}(t, z, z') = \tilde{S}(t, z') < \infty$

$$\text{vi) } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} L_{z'}(0, 0, \lambda) = 0$$

$$\text{vii) } \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} L_{z'}(0, 0, \lambda) = -\infty$$

entonces $\forall b \in \mathbb{R}$, \wp_b tiene una única solución local.

Demostración)

Consideremos las extremales q_λ de F que verifican:

$$q_\lambda(0) = 0 \text{ y } q'_\lambda(0) = \lambda$$

Solamente hay que demostrar que $\varphi_T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, para lo cual, teniendo en cuenta la continuidad de φ_T , será suficiente demostrar que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} q_\lambda(T) = +\infty$ y que $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} q_\lambda(T) = -\infty$.

Sean K_λ las constantes de coordinación de las extremales q_λ , es decir,

$$K_\lambda = H_{z'}(0, 0, \lambda) \Psi'(P_d(0) - H(0, 0, \lambda)) = -L_{z'}(0, 0, \lambda)$$

Es obvio que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} K_\lambda = - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} L_{z'}(0, 0, \lambda) = 0$$

y que

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} K_\lambda = - \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} L_{z'}(0, 0, \lambda) = \infty$$

Procederemos por reducción al absurdo.

Supongamos que

$$\exists t_0 \in [0, T] \text{ tal que } \forall \lambda > 0, q'_\lambda(t_0) < C$$

Tendremos que $\forall \lambda > 0$

$$K_\lambda = H_{z'}(t_0, q_\lambda(t_0), q'_\lambda(t_0)) \cdot \Psi'(P_d(t_0) - H(t_0, q_\lambda(t_0), q'_\lambda(t_0))) \cdot E(t_0, q_\lambda) > 0$$

y, teniendo en cuenta ahora que $H_{z'z'} \leq 0$ y que Ψ' es creciente,

$$K_\lambda > H_{z'}(t_0, q_\lambda(t_0), C) \cdot \Psi'(P_d(t_0) - H(t_0, q_\lambda(t_0), C)) \cdot E(t_0, q_\lambda)$$

$$H_{z'}(t_0, q_\lambda(t_0), C) \geq \inf_x H_{z'}(t_0, x, C) = I(t_0, C) > 0$$

$$H(t_0, q_\lambda(t_0), C) \leq \sup_x H(t_0, x, C) = S(t_0, C) < \infty$$

$$\Psi'(P_d(t_0) - H(t_0, q_\lambda(t_0), C)) > \Psi'(P_d(t_0) - S(t_0, C)) > 0$$

y, teniendo en cuenta que, por hipótesis,

$$0 < \eta_1 < E(t_0, q_\lambda) < \eta_2 < \infty$$

tendremos

$$K_\lambda > \eta_1 \cdot I(t_0, C) \cdot \Psi'(P_d(t_0) - S(t_0, C)) > 0$$

y, por tanto,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} K_\lambda \geq \eta_1 \cdot I(t_0, C) \cdot \Psi'(P_d(t_0) - S(t_0, C)) > 0$$

lo cual es contradictorio.

Así pues, no puede darse la supuesta acotación

$$q'_\lambda(t_0) < C, \forall \lambda > 0$$

para ningún $t_0 \in [0, T]$; de modo que

$$\forall t \in [0, T] \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} q'_\lambda(t) = +\infty$$

y, utilizando el lema 3.5.5, que demostraremos más adelante, tenemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} q_\lambda(T) = +\infty$$

Análogamente se demostraría que

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} q_\lambda(T) = -\infty$$

Observación 3.5.4. Las hipótesis de la ii) a la v) imponen, nuevamente, unas ciertas limitaciones a la influencia del volumen en la función de generación hidráulica efectiva. Concretamente, para cada (t, z') la funciones del volumen $h_{t,z'}(z) = H(t, z, z')$, $f_{t,z'}(z) = H_{z'}(t, z, z')$ y $\frac{1}{f_{t,z'}(z)}$ están acotadas. ▲

Lema 3.5.5. Sea $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ una familia de funciones continuas

$$f_\lambda : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$$

verificando:

i) $\forall t \in [0, T]$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda(t) = +\infty$

ii) $\lambda_1 < \lambda_2 \implies \forall t \in [0, T]$, $f_{\lambda_1}(t) < f_{\lambda_2}(t)$

entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^T f_\lambda(t) dt = +\infty$$

Demostración)

Probaremos que $\forall K > 0$ existe $\tilde{\lambda}$ tal que

$$\lambda > \tilde{\lambda} \implies \int_0^T f_\lambda(t) dt > K$$

Dado $M > 0$, consideremos para cada $t \in [0, T]$, λ_t tal que $f_{\lambda_t}(t) > 2M$.
 Por la continuidad de f_{λ_t} , tenemos que existe $\varepsilon_t > 0$ tal que

$$f_{\lambda_t}(\tilde{t}) > M, \forall \tilde{t} \in (t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t) \cap [0, T]$$

Como la familia es creciente,

$$\lambda > \lambda_t \implies f_\lambda(\tilde{t}) > M, \forall \tilde{t} \in (t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t) \cap [0, T] \tag{1}$$

Consideremos ahora la familia de abiertos $\{A_t\}_{t \in [0, T]}$ donde

$$A_t = (t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t)$$

Está claro que $\{A_t\}_{t \in [0, T]}$ es un recubrimiento del compacto $[0, T]$ y existe, en consecuencia, un subrecubrimiento finito $\{A_{t_i}\}$ con $i = 1, \dots, n$.

Sea ahora

$$\tilde{\lambda} = \text{máx}\{\lambda_{t_1}, \dots, \lambda_{t_n}\}$$

Para todo $\lambda > \tilde{\lambda}$, y $\tilde{t} \in [0, T]$ existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\tilde{t} \in (t_i - \varepsilon_{t_i}, t_i + \varepsilon_{t_i})$
 y como $\lambda > \tilde{\lambda} > \lambda_{t_i} \stackrel{(1)}{\implies} f_\lambda(\tilde{t}) > M$, tenemos que

$$\int_0^T f_\lambda(t) dt \geq \int_0^T M dt = T \cdot M$$

donde, basta tomar $M = \frac{K}{T}$.



Contraejemplo 3.5.6. En el lema 3.5.4, la condición ii) no se puede suprimir, puesto que sin ella deja de ser cierto. Ni siquiera puede sustuirse por otra algo menos exigente como la siguiente

$$\lambda_1 < \lambda_2 \implies \int_0^t f_{\lambda_1}(s) ds < \int_0^t f_{\lambda_2}(s) ds, \forall t \in (0, T]$$

Hemos ideado un ejemplo de sucesión de funciones f_n para las cuales se cumple:

i) $\forall t \in [0, T], \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) = +\infty$

ii) $\int_0^t f'_n(s) ds = f_n(t) < f_{n+1}(t) = \int_0^t f'_{n+1}(s) ds, \forall t \in (0, T], \forall n > 2$

y, sin embargo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f'_n(s) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 1$$

Las funciones f_n las definimos a partir de otra sucesión g_n de funciones de clase $KC^1[0, T]$.

$$g_n \equiv \begin{cases} R((0, 0); (1 - \frac{1}{n}, n)) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 - \frac{1}{n} \\ R((1 - \frac{1}{n}, n); (1, 0)) & \text{si } 1 - \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{-n^2 + n^3 + n^4 - \sqrt{2n + n^2 - 2n^3}}{(1 + n^4)} \\ R^{\tan}(n) & \text{si } \frac{-n^2 + n^3 + n^4 - \sqrt{2n + n^2 - 2n^3}}{(1 + n^4)} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Donde denotamos por $R(X, Y)$ a la recta que pasa por X e Y ; y por $R^{\tan}(n)$ a la recta tangente a la circunferencia $x^2 + (y-1)^2 = 1$ en su punto de corte con $R((1 - \frac{1}{n}, n); (1, 0))$.

De este modo, tenemos una sucesión de líneas quebradas a partir de las cuales construimos la sucesión de clase C^1 , evitando los dos puntos angulares con sendos arcos de circunferencias inscritas a los triángulos PQR y P'Q'R', como se indica en la figura 3.1. Obsérvese que la monotonía de la sucesión g_n es evidente en el intervalo $[1 - \frac{1}{n}, 1]$ y, en $[0, 1 - \frac{1}{n}]$, no hay más que tener en cuenta que para $n > 2$

$$g'_n(0) = \frac{n^2}{n-1} < \frac{(n+1)^2}{n} = g'_{n+1}(0)$$

La monotonía de f_n queda clara como consecuencia de la de g_n , teniendo en cuenta, además, que los arcos de circunferencia mantienen -por construcción- dicha monotonía.

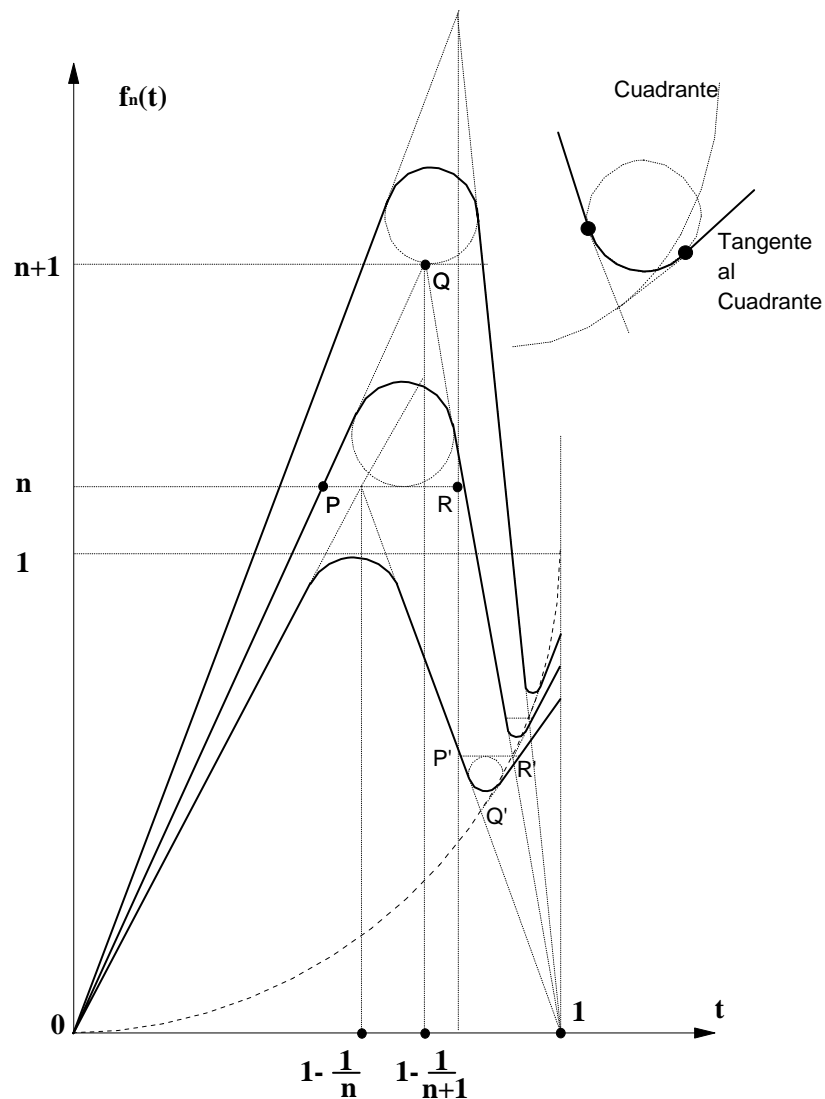


Figura 3.1: Contraejemplo

Observación 3.5.7. La existencia y unicidad de mínimo relativo no garantiza que éste constituya la solución del problema. Puede suceder que ésta no exista, habida cuenta de la no compacidad del conjunto de funciones admisibles. Esta cuestión es, por el momento, un problema abierto que trataremos de resolver y que conjeturamos tendrá una solución positiva.

Conjetura 3.5.8. Con las hipótesis del teorema 3.5.4,

$$\forall b \in \mathbb{R}, \text{ el problema } \varphi_b \text{ posee solución única.}$$

3.6. EL CASO PARTICULAR $H(t,z,z')=f(z) \cdot z'$

Este caso particular engloba todo tipo de central hidráulica de bombeo (sin pérdidas) cuya generación de potencia – o consumo durante el bombeo – es proporcional al caudal y a la altura del depósito, siendo esta última función exclusiva del volumen turbinado. Se trata de un modelo cuya simplicidad permite la utilización de la que es, sin duda, la técnica más natural a la hora de estudiar el carácter estrictamente creciente de las aplicaciones de tiro: la derivación respecto a las condiciones iniciales.

Teorema 3.6.1. Si $H(t, z, z') = f(z) \cdot z'$ ($f(z) > 0$), se verifica:

- i) Las funciones de tiro son estrictamente crecientes.
- ii) Si además existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 < \varepsilon_1 < f(z) < \varepsilon_2, \forall z \in \mathbb{R}$$

entonces $\forall b \in \mathbb{R}$, φ_b tiene una única solución local.

Demostración)

- i) Bastará con ver que

$$\varphi'_t(\lambda) > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in (0, T]$$

Recordemos (3.3.3) que, en este caso, las extremales verifican la ecuación

$$P_d(t) - f(z(t)) \cdot z'(t) = P_d(0) - f(z(0)) \cdot z'(0), \forall t \in [0, T]$$

Si $z(t) = \varphi_t(\lambda)$ es la extremal que verifica $z(0) = 0$ y $z'(0) = \lambda$, entonces satisface la ecuación diferencial

$$P_d(t) - f(z) \cdot z' = P_d(0) - f(0) \cdot \lambda$$

la cual es de variables separadas y puede resolverse integrando

$$\int P_d(t)dt - \int f(z)dz = t \cdot [P_d(0) - f(0) \cdot \lambda] + c$$

donde, derivando con respecto de λ (condición inicial), tenemos

$$-f(\varphi_t(\lambda)) \frac{d\varphi_t(\lambda)}{d\lambda} = -t \cdot f(0)$$

y, por tanto,

$$\varphi'_t(\lambda) = \frac{-t \cdot f(0)}{-f(\varphi_t(\lambda))} > 0$$

- ii) Se verifica la hipótesis del teorema 3.3.3

$$0 < \varepsilon_1 < f(z)$$

de modo que, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, existe una única extremal q satisfaciendo $q(0) = 0$ y $q'(0) = \lambda$.

Solo falta ver que $\varphi_T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, para lo cual será suficiente demostrar que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_T(\lambda) = +\infty$

y que $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \varphi_T(\lambda) = -\infty$.

Obsérvese ahora que

$$\varphi'_T(\lambda) = \frac{T \cdot f(0)}{f(\varphi_T(\lambda))} > \frac{T \cdot \varepsilon_1}{\varepsilon_2} > 0$$

resultando ya evidente la no acotación ni superior ni inferior de φ_T .



3.7. SOLUCIÓN PARA FUNCIONALES CONVEXOS.

Los funcionales convexos constituyen el marco ideal a la hora de abordar problemas de optimización (minimización). La clave de la importancia de estos funcionales está en la equivalencia de los conceptos de punto crítico, mínimo relativo y mínimo absoluto. Esta equivalencia nos garantiza que si existe una extremal admisible será la solución del problema.

Teorema 3.7.1. *Si el funcional F es convexo en Θ_b y $q \in \Theta_b$ es una extremal de F , entonces q es solución del problema \wp_b .*

(Si la convexidad es estricta la solución es única).

Demostración)

No hay más que tener en cuenta que F es diferenciable Gâteaux en la subvariedad afín $\Theta_b \cap C^1[0, T]$ y que la diferencial se anula en las extremales del funcional. Así pues, q es un punto crítico de F cuya convexidad garantiza que es mínimo absoluto de F en el convexo $\Theta_b \cap C^1[0, T]$ (esto es todavía insuficiente pues el problema se planteó en $KC^1[0, T]$).

Ahora bien, teniendo en cuenta el *lema de redondeo de ángulos* [46],

$$F(q) = \inf_{\substack{z \in \Theta_b \\ z \in C^1[0, T]}} F(z) = \inf_{\substack{z \in \Theta_b \\ z \in KC^1[0, T]}} F(z)$$

q es también mínimo absoluto en Θ_b y, por tanto, solución de \wp_b (única si la convexidad es estricta).



■ La convexidad de un funcional es de difícil comprobación; sin embargo, con las propiedades asumidas en la introducción del capítulo, juntamente con la concavidad de H , queda asegurada la convexidad del funcional.

Proposición 3.7.2. *Para que el funcional $F : \Theta_b \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$F(z) = \int_0^T \Psi (P_d(t) - H(t, z(t), z'(t))) dt$$

sea convexo en Θ_b , es suficiente que Ψ sea creciente y convexa y H cóncava con respecto a (z, z') .

Demostración)

Sea $\alpha \in [0, 1]$ y $g_1, g_2 \in \Theta_b$

$$F(\alpha g_1 + (1 - \alpha)g_2) = \int_0^T \Psi (P_d(t) - H(t, \alpha g_1(t) + (1 - \alpha)g_2(t), \alpha g_1'(t) + (1 - \alpha)g_2'(t))) dt$$

Por ser H cóncava con respecto a (z, z') , para cada t tendremos

$$H(t, \alpha g_1(t) + (1 - \alpha)g_2(t), \alpha g_1'(t) + (1 - \alpha)g_2'(t)) \geq \alpha H(t, g_1(t), g_1'(t)) + (1 - \alpha)H(t, g_2(t), g_2'(t))$$

con lo cual, por ser Ψ creciente

$$\begin{aligned} F(\alpha g_1 + (1 - \alpha)g_2) &\leq \int_0^T \Psi (P_d(t) - \alpha H(t, g_1(t), g_1'(t)) - (1 - \alpha)H(t, g_2(t), g_2'(t))) dt = \\ &= \int_0^T \Psi (\alpha P_d(t) - \alpha H(t, g_1(t), g_1'(t)) + (1 - \alpha)P_d(t) - (1 - \alpha)H(t, g_2(t), g_2'(t))) dt = \\ &= \int_0^T \Psi (\alpha (P_d(t) - H(t, g_1(t), g_1'(t))) + (1 - \alpha) (P_d(t) - H(t, g_2(t), g_2'(t)))) dt \end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta ahora la convexidad de Ψ ,

$$\begin{aligned} F(\alpha g_1 + (1 - \alpha)g_2) &\leq \\ &\leq \int_0^T \alpha \Psi (P_d(t) - H(t, g_1(t), g_1'(t))) dt + \int_0^T (1 - \alpha) \Psi (P_d(t) - H(t, g_2(t), g_2'(t))) dt = \end{aligned}$$

$$= \alpha F(g_1) + (1 - \alpha)F(g_2)$$

y, en definitiva,

$$F(\alpha g_1 + (1 - \alpha)g_2) \leq \alpha F(g_1) + (1 - \alpha)F(g_2), \forall \alpha \in [0, 1].$$

▲

Observación 3.7.3. Si $H(t, z, z')$ no depende de z , entonces es cóncava con respecto a (z, z') (recuérdese que imponíamos que lo fuera respecto de z') y, por tanto, el funcional es convexo.

■ El carácter estrictamente creciente de las aplicaciones de tiro no ha sido necesario en este apartado para la determinación del carácter minimizante de las extremales. Veamos, no obstante, que dicha propiedad puede deducirse fácilmente en el caso de que el funcional sea estrictamente convexo.

Proposición 3.7.4. Si F es estrictamente convexo, entonces las aplicaciones de tiro son estrictamente crecientes.

Demostración)

Vamos a proceder por reducción al absurdo.

Supongamos $\lambda_1 < \lambda_2$ y $\tau > 0$ con $\varphi_\tau(\lambda_1) \geq \varphi_\tau(\lambda_2)$.

Sean q_{λ_1} y q_{λ_2} las extremales de F que verifican

$$\begin{cases} q_{\lambda_1}(0) = q_{\lambda_2}(0) = 0 \\ q'_{\lambda_1}(0) = \lambda_1 < \lambda_2 = q'_{\lambda_2}(0) \end{cases}$$

Tendremos que

$$q_{\lambda_1}(\tau) \geq q_{\lambda_2}(\tau)$$

Por la continuidad de q'_{λ_i} , $\exists t_0 \in (0, \tau)$ de modo que $\forall t \in [0, t_0]$

$$q'_{\lambda_1}(t) < q'_{\lambda_2}(t)$$

y, en consecuencia, $\forall t \in (0, t_0]$ se verifica también

$$q_{\lambda_1}(t) < q_{\lambda_2}(t)$$

Como además

$$q_{\lambda_1}(\tau) \geq q_{\lambda_2}(\tau)$$

por la continuidad de $q_{\lambda_i}(t)$, existirá $t_1 \in (t_0, \tau]$ verificando

$$q_{\lambda_1}(t_1) = q_{\lambda_2}(t_1)$$

lo cual contradice la unicidad de la solución del teorema 3.7.1, aplicado al funcional F en el intervalo $[0, t_1]$.

▲

3.8. SOLUCIÓN PARA FUNCIONALES NO CONVEXOS

Vamos a ver, a continuación, un resultado que evidencia la no necesidad de la convexidad del funcional para poder garantizar que las extremales son soluciones del problema; lo cual está, como ya vimos, íntimamente relacionado con el carácter estrictamente creciente de las aplicaciones de tiro.

Teorema 3.8.1. *Si se verifican las siguientes condiciones:*

- i) $L_{z'z}(t, z, z') \leq 0$ ($L_{z'}$ decreciente con respecto a z).
- ii) Siempre que $q'_1(t) \leq q'_2(t) \forall t \in [0, \tau]$ se cumple que $E(\tau, q_1) \leq E(\tau, q_2)$.
entonces las aplicaciones ψ_t (de caudal en t de F) son estrictamente crecientes.

Demostración)

Vamos a demostrar, por reducción al absurdo, que si q_1 y q_2 son extremales verificando

$$\begin{aligned} q_1(0) &= q_2(0) = 0 \\ q'_1(0) &= \lambda_1 < \lambda_2 = q'_2(0) \end{aligned}$$

se cumplirá $q'_1(t) < q'_2(t) \forall t \in [0, T]$ y, en consecuencia, el enunciado del teorema.

Si denotamos por K_i a la constante de coordinación de la extremal q_i tendremos

$$K_1 = H_{z'}(0, 0, \lambda_1) \cdot \Psi'(P_d(0) - H((0, 0, \lambda_1))) = -L_{z'}(0, 0, \lambda_1)$$

$$K_2 = H_{z'}(0, 0, \lambda_2) \cdot \Psi'(P_d(0) - H((0, 0, \lambda_2))) = -L_{z'}(0, 0, \lambda_2)$$

de donde, teniendo en cuenta que $L_{z'z'} > 0$ (3.1.1), se sigue que $K_1 > K_2$.

Supongamos ahora que $\exists t_0 > 0$ de modo que

$$q'_1(t_0) \geq q'_2(t_0)$$

por la continuidad de q'_i , para algún $\zeta \in (0, t_0]$ se verificará

$$\chi = q'_1(\zeta) = q'_2(\zeta) \text{ y } q'_1(t) < q'_2(t) \forall t \in [0, \zeta)$$

Si observamos las ecuaciones de coordinación respectivas en el instante ζ

$$K_1 = -L_{z'}(\zeta, q_1(\zeta), \chi) \cdot E(\tau, q_1)$$

$$K_2 = -L_{z'}(\zeta, q_2(\zeta), \chi) \cdot E(\tau, q_2)$$

Obsérvese ahora que $q_1(\zeta) < q_2(\zeta)$, con lo cual, teniendo en cuenta $L_{z'z} \leq 0$ o, lo que es lo mismo, el carácter creciente de $-L_{z'}$ con respecto a z , se sigue que

$$-L_{z'}(\zeta, q_1(\zeta), \chi) \leq -L_{z'}(\zeta, q_2(\zeta), \chi)$$

que, juntamente con ii), implica que $K_1 \leq K_2$, lo cual contradice el hecho de que $K_1 > K_2$.

▲

3.9. CONSTRUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN

La determinación de la única extremal que satisface la restricción de volumen $z(T) = b$ pasa por la obtención del único cero de la función $\varphi_T(\lambda) - b$. En esto se basa precisamente el denominado método de tiro o del disparo, consistente en variar la condición inicial de la derivada (caudal inicial) hasta conseguir el cumplimiento de la segunda condición de contorno.

Por otra parte, el carácter estrictamente creciente de la aplicación de tiro en T facilita, obviamente, la búsqueda de la solución. La dificultad está, en todo caso, en la determinación de $\varphi_T(\lambda)$, toda vez que se trata de la resolución de la ecuación de Euler del funcional con las condiciones iniciales $z(0) = 0$ y $z'(0) = \lambda$. Para su resolución aproximada, existe una larga lista de métodos numéricos; no obstante, por razones que se comentarán más adelante, sugerimos la utilización, en su versión discretizada, de cualquiera de las dos ecuaciones de coordinación:

I)

$$\int_0^t L_z(t, z(s), z'(s)) ds - L_{z'}(t, z(t), z'(t)) = -L_{z'}(0, 0, \lambda)$$

II)

$$-L_{z'}(t, z(t), z'(t)) \exp\left(-\int_0^t \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}(s, q(s), q'(s))} ds\right) = -L_{z'}(0, 0, \lambda)$$

que, en su versión discretizada en los instantes $t_k = T \cdot k/n$, con $k = 0, 1, \dots, n-1$, toma la forma

I)

$$\frac{T}{n} \sum_{i=1}^{k-1} L_z(t_i, z(t_i), z'(t_i)) - L_{z'}(t_k, z(t_k), z'(t_k)) = -L_{z'}(0, 0, \lambda)$$

II)

$$-L_{z'}(t_k, z(t_k), z'(t_k)) \exp\left(-\frac{T}{n} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{H_z(t_i, z(t_i), z'(t_i))}{H_{z'}(t_i, z(t_i), z'(t_i))}\right) = -L_{z'}(0, 0, \lambda)$$

El algoritmo que proponemos - **ALGORITMO I** - se basa en la construcción de una sucesión triple $(z(t_i), z'(t_i), \xi_i)$ definida por recurrencia de la manera siguiente:

A) $z'(0) = \lambda$ (caudal inicial).

B) $z(0) = 0$ (volumen inicial).

C) $-\xi_0 = -L_{z'}(0, 0, \lambda)$ (constante de coordinación).

D) $z(t_k) = z(t_{k-1}) + \frac{T}{n} z'(t_{k-1})$ (acumulador de caudales¹²).

E) (En I) $\xi_k = \xi_{k-1} + \frac{T}{n} L_z(t_{k-1}, z(t_{k-1}), z'(t_{k-1}))$ (¹³acumulador de L_z).

o (en II) $\xi_k = \xi_{k-1} \cdot \exp\left(\frac{\frac{T}{n} H_z(t_{k-1}, z(t_{k-1}), z'(t_{k-1}))}{H_{z'}(t_{k-1}, z(t_{k-1}), z'(t_{k-1}))}\right)$ (acumulador de $\exp(H_z/H_{z'})$).

F) $z'(t_k)$ es tal que se verifica $L_{z'}(t_k, z(t_k), z'(t_k)) = \xi_k$ (ecuación de coordinación).

■ Obsérvese la sencillez y la fácil implementación del algoritmo, más versátil que otros ya clásicos, cuya auténtica importancia se evidenciará en el estudio de problemas con restricciones y en sistemas con varias centrales hidráulicas. Así y todo, cabe ya citar alguno de los aspectos más destacables del algoritmo:

- Ausencia de z'' , a pesar de tratarse de ecuaciones diferenciales de segundo orden.
- Se evita la presencia de la derivada de la potencia demandada con lo que se logra resolver satisfactoriamente problemas en los que ésta no es derivable.
- Las centrales de bombeo, cuya modelización suele realizarse mediante una función de generación hidráulica no derivable en el cero, tienen cabida en nuestro estudio sin que éste se vea afectado de forma considerable por dicha circunstancia.

¹²Esto revela que el método de resolución propuesto es de tipo Euler.

¹³Las integrales las aproximamos por rectángulos de altura la imagen del extremo inferior del intervalo.

Capítulo 4

PROBLEMA H_1-T_1 CON RESTRICCIONES

4.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior, los dominios de definición de las funciones involucradas eran muy amplios. A la función de generación hidráulica efectiva $H(t, z, z')$ le permitíamos que estuviera definida para valores negativos de z' (caudal), lo cual, en la práctica, ocurre en las denominadas centrales de bombeo. Asimismo, permitíamos que la función de coste térmico Ψ admitiera argumento (potencia térmica) negativo. En este capítulo, siguiendo con una sola central hidráulica, vamos a suponer el cumplimiento de las mismas propiedades que imponíamos en el capítulo precedente a las funciones $H(t, z, z')$ y Ψ , en el interior de sus dominios de definición, pero vamos a introducir ciertas restricciones a dichos dominios o, equivalentemente, a las funciones admisibles. Seguimos imponiendo dos hipótesis cruciales: la positividad estricta de $H_{z'}$ y el carácter estrictamente creciente de $L_{z'}$ con respecto a z' .

- **Función de coste térmico.** $\Psi(P_d(t) - H(t, q(t), q'(t)))$

Solamente admitiremos potencias térmicas no negativas es decir:

$$P_d(t) \geq H(t, q(t), q'(t))$$

$$\Psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

- **Función de generación hidráulica efectiva.** $H(t, z, z')$

Solamente se admitirán volúmenes y caudales positivos o nulos:

$$H : \Omega_H \subset [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

Definición 4.1.1. Llamaremos Π_b al problema de minimizar el funcional

$$F(z(t)) = \int_0^T L(t, z(t), z'(t)) dt$$

con L de la forma

$$L(t, z(t), z'(t)) = \Psi(P_d(t) - H(t, z(t), z'(t)))$$

dentro del conjunto

$$\Theta_b = \{z \in KC^1[0, T] / z(0) = 0, z(T) = b, z'(t) \geq 0 \wedge H(t, z(t), z'(t)) \leq P_d(t)\}$$

Definición 4.1.2. Diremos que una función q es admisible para Π_b si $q \in \Theta_b$.

Definición 4.1.3. Diremos que una función q es solución del problema Π_b si:

- i) q es admisible.
- ii) $F(q) \leq F(z) \forall z \in \Theta_b$.

Definición 4.1.4. Diremos que una función $q \in \Theta_b$ es frontera si $\exists t \in [0, T]$ verificando alguna de las dos siguientes propiedades:

- i) $q'(t) = 0$.
- ii) $H(t, q(t), q'(t)) = P_d(t)$.

Definición 4.1.5. Diremos que una función $q \in \Theta_b$ es interior si no es frontera.

Definición 4.1.6. Diremos que una función $q \in \Theta_b$ presenta un arco fronterizo inferior en $[t_1, t_2]$ si

$$\forall t \in [t_1, t_2], q'(t) = 0$$

Definición 4.1.7. Diremos que una función $q \in \Theta_b$ presenta un arco fronterizo superior en $[t_1, t_2]$ si

$$\forall t \in [t_1, t_2], H(t, q(t), q'(t)) = P_d(t)$$

Definición 4.1.8. Diremos que una función $q \in \Theta_b$ presenta un arco interior (o de extremal) en un intervalo $[t_1, t_2]$ si

$$\forall t \in (t_1, t_2), H(t, q(t), q'(t)) < P_d(t) \wedge 0 < q'(t)$$

Haremos, además, las siguientes suposiciones:

Hipótesis¹ 4.1.9. Para todo instante y volumen puede generarse por la central hidráulica la totalidad de la potencia demandada, es decir:

¹Esta hipótesis se introduce con el propósito de que existan funciones admisibles con arcos fronterizos superiores.

$$\forall (t, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+, \exists z' \text{ tal que } H(t, z, z') = P_d(t)$$

Hipótesis² 4.1.10. Para caudales nulos, la potencia hidráulica debe ser siempre inferior a la demanda:

$$\forall (t, z) \in [0, T] \times [0, b], H(t, z, 0) < P_d(t)$$

4.2. EXISTENCIA DE SOLUCIÓN

La suposición de la acotación uniforme de las derivadas de las funciones admisibles (caudales) supone una simplificación grande en lo que al problema de existencia de solución se refiere. En estas condiciones, será suficiente el carácter no vacío del conjunto de funciones admisibles para que el problema posea solución [46].

Teorema 4.2.1. Si $\forall \tau \in [0, T], \exists M_\tau$ tal que

$$H(t, q(t), q'(t)) \leq P_d(t) \text{ en } [0, \tau] \implies q'(t) < M_\tau \text{ en } [0, \tau]$$

entonces:

i) La ecuación diferencial $H(t, z(t), z'(t)) - P_d(t) = 0$, con $z(0) = 0$, tiene solución única en $[0, T]$.

ii) Si denominamos $\omega(t)$ a la solución de la ecuación anterior y hacemos³ $\ell = \omega(T)$, entonces

$$\forall b \in [0, \ell] \text{ el problema } \Pi_b \text{ tiene solución.}$$

Demostración)

i) Estamos ante una ecuación diferencial dada en forma implícita

$$0 = \Phi(t, z, z') = H(t, z, z') - P_d(t)$$

y, teniendo en cuenta la hipótesis 4.1.9. y que $H_{z'} > 0$,

$$\forall (t, z) \exists |z'| \text{ tal que } \Phi(t, z, z') = 0$$

de modo que $z' = f(t, z)$ en $[0, T] \times \mathbb{R}$.

Además

²Esta hipótesis se introduce, por comodidad, con el propósito de que los arcos fronterizos superiores e inferiores no puedan tener puntos comunes.

³ ℓ representa el volumen de agua que consumiría la central hidráulica si generara toda la potencia demandada sin intervención de la térmica.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z'} = \frac{\partial H(t, z, z')}{\partial z'} \neq 0$$

con lo cual podemos aplicar el teorema de la función implícita que nos permite afirmar que $f : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es además de clase C^1 .

De modo que estamos ahora ante una ecuación diferencial con condición inicial, que tendrá solución única en un entorno de 0. Sea $\omega(t)$ dicha solución y $[0, \tau)$ su dominio maximal. En tal caso tendríamos que $\lim_{t \rightarrow \tau^-} \omega(t) = \infty$, lo cual, como veremos, es contradictorio y, en consecuencia, el dominio es $[0, T]$.

Efectivamente, $H(t, \omega(t), \omega'(t)) = P_d(t)$ en $[0, \tau)$ y, por tanto, $\omega'(t) \leq M_\tau \forall t \in [0, \tau)$, lo que implica que

$$\omega(t) \leq tM_\tau \forall t \in [0, \tau)$$

que contradice la suposición $\lim_{t \rightarrow \tau^-} \omega(t) = \infty$.

ii) Por hipótesis tenemos que

$$\exists M_T \in \mathbb{R} \text{ tal que } \forall q \in \Theta_b \text{ se cumple que } 0 \leq q'(t) < M_T \forall t \in [0, T]$$

lo cual nos permite afirmar que, si el conjunto de funciones admisibles es no vacío, el problema tiene solución.

Veamos que $\forall b \in [0, \ell]$ se tiene que $\Theta_b \neq \emptyset$.

Teniendo en cuenta la continuidad de $\omega(t)$ en $[0, T]$, existe $\delta \in [0, T]$ tal que $\omega(\delta) = b$. Consideremos ahora

$$\omega_b(t) = \begin{cases} \omega(t) & \text{si } t \in [0, \delta] \\ b & \text{si } t \in [\delta, T] \end{cases}$$

y es evidente que $\omega_b(t) \in \Theta_b$.

▲

4.3. AUSENCIA DE PUNTOS ANGULARES

El hecho de que a las funciones admisibles se les haya impuesto las restricciones

$$0 \leq q'(t) \wedge H(t, q(t), q'(t)) \leq P_d(t)$$

hace que el extremo del funcional pueda no ser “algebraicamente interior”, en el sentido de que puede constar de unos arcos que no admiten variaciones bilaterales ($q'(t) = 0$ o $H(t, q(t), q'(t)) = P_d(t)$) (Fig. 4.0, arcos C_2 y C_4 respectivamente) y de otros que satisfagan la ecuación de Euler (Fig. 4.0, arcos C_1 y C_3).

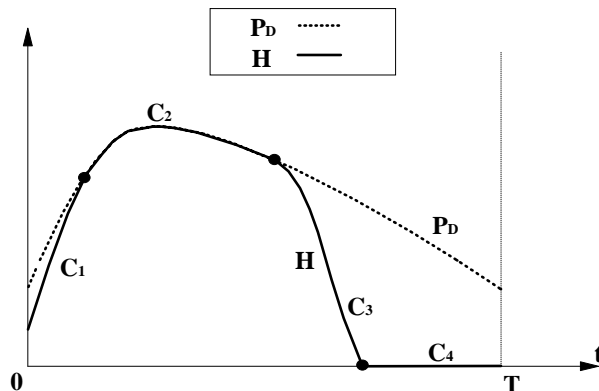


Figura 4.0: Arcos fronterizos e interiores.

Nos proponemos demostrar que el tránsito de unos arcos a otros se produce con suavidad, en el sentido de que la derivada de la función minimizadora (caudal) es continua en los puntos extremos de los mencionados arcos. Este resultado es conocido [41] en el caso de que la limitación a las funciones admisibles sea la prohibición de penetrar en un recinto limitado por una curva: la extremal es tangente a la frontera del recinto. En nuestro caso, las restricciones de las funciones admisibles son más complejas puesto que afectan también a sus derivadas.

Teorema 4.3.2. *Si Q es solución del problema Π_b , entonces*

$$Q \in C^1[0, T]$$

(La solución del problema carece de puntos angulares⁴).

Demostración)

Procederemos por reducción al absurdo.

Supondremos que Q' no es continua en t_0 y supondremos también que $Q'(t_0^-) < Q'(t_0^+)$; en caso contrario se razonaría de forma análoga.

Consideremos las funciones auxiliares $h_\delta \in KC^1[0, T]$

$$h_\delta = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, T] \setminus (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \\ (t - t_0 + \delta) & \text{si } t \in [t_0 - \delta, t_0] \\ -(t - t_0 - \delta) & \text{si } t \in [t_0, t_0 + \delta] \end{cases} \quad h'_\delta = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, T] \setminus [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \\ 1 & \text{si } t \in (t_0 - \delta, t_0) \\ -1 & \text{si } t \in (t_0, t_0 + \delta) \end{cases}$$

⁴Cuando el problema carece de restricciones solo pueden ser puntos angulares aquéllos donde $L_{z', z'} = 0$ [66]; de ahí que este teorema no fuera necesario en el capítulo anterior. Al haber restricciones, si bien no pueden existir puntos angulares en los arcos interiores, sí podría ser angular alguno de los puntos fronterizos.

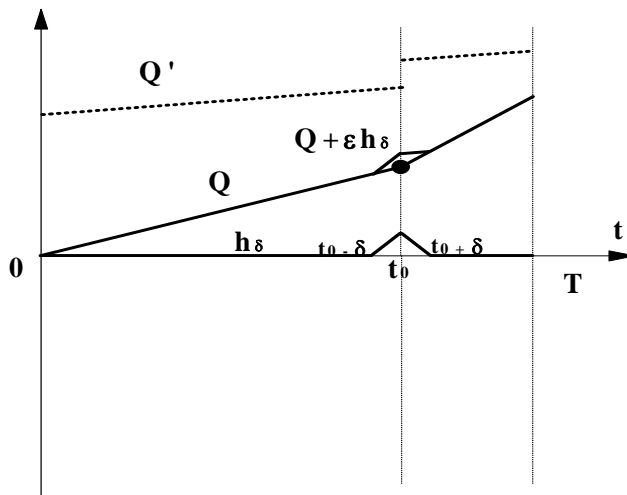


Figura 4.1: Funcin auxiliar h_δ .

Nótese que

$$0 \leq h_\delta(t) \leq \delta \quad \forall t \in [0, T].$$

Vamos a considerar $\Phi(\varepsilon) = F(Q + \varepsilon h_\delta)$ (para valores de $\varepsilon \geq 0$) y la derivada por la derecha de Φ en el cero

$$\Phi'(0^+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(Q + \varepsilon h_\delta) - F(Q)}{\varepsilon}$$

esto es, en realidad, la derivada F según la dirección h_δ evaluada en Q , cuya existencia, para δ suficientemente pequeño, garantiza el lema siguiente (4.3.3) y cuya expresión es bien conocida

$$\Phi'(0^+) = \int_0^T [h_\delta(t) \cdot L_z(t, Q(t), Q'(t)) + h'_\delta(t) \cdot L_{z'}(t, Q(t), Q'(t))] dt$$

El objetivo de la demostración no es otro que el de probar que $\Phi'(0^+) < 0$, pues en ese caso, para un cierto $\varepsilon > 0$, tendremos que

$$F(Q + \varepsilon h_\delta) < F(Q)$$

lo cual contradirá el carácter minimizante de Q .

Teniendo en cuenta que $Q'(t_0^-) < Q'(t_0^+)$, la continuidad de Q y $L_{z'}$, así como el carácter estrictamente creciente de $L_{z'}$ con respecto a z' ,

$$L_{z'}(t_0^-, Q(t_0^-), Q'(t_0^-)) < L_{z'}(t_0^+, Q(t_0^+), Q'(t_0^+))$$

Asimismo, resulta evidente que existe $\delta > 0$, lo suficientemente pequeño como para que se verifiquen las siguientes desigualdades:

I)

$$\begin{aligned} & L_{z'}(t_0^-, Q(t_0^-), Q'(t_0^-)) + h_\delta(t_0^-) \cdot L_z(t_0^-, Q(t_0^-), Q'(t_0^-)) < \\ & < L_{z'}(t_0^+, Q(t_0^+), Q'(t_0^+)) - h_\delta(t_0^+) \cdot L_z(t_0^+, Q(t_0^+), Q'(t_0^+)) \end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in (t_0, t_0 + \delta)} L_{z'}(t, Q(t), Q'(t)) + h_\delta(t) \cdot L_z(t, Q(t), Q'(t)) < \\ & < \inf_{t \in (t_0 - \delta, t_0)} L_{z'}(t, Q(t), Q'(t)) - h_\delta(t) \cdot L_z(t, Q(t), Q'(t)) \end{aligned}$$

de donde se deduce la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} & \int_{t_0 - \delta}^{t_0} [L_{z'}(t, Q(t), Q'(t)) + h_\delta(t) \cdot L_z(t, Q(t), Q'(t))] dt \leq \\ & \leq \delta \cdot \sup_{t \in (t_0, t_0 + \delta)} L_{z'}(t, Q(t), Q'(t)) + h_\delta(t) \cdot L_z(t, Q(t), Q'(t)) < \\ & < \delta \cdot \inf_{t \in (t_0 - \delta, t_0)} L_{z'}(t, Q(t), Q'(t)) - h_\delta(t) \cdot L_z(t, Q(t), Q'(t)) \leq \\ & \leq \int_{t_0}^{t_0 + \delta} [L_{z'}(t, Q(t), Q'(t)) - h_\delta(t) \cdot L_z(t, Q(t), Q'(t))] dt \end{aligned}$$

Recordemos ahora (escribiendo (t) en vez de $(t, Q(t), Q'(t))$) que

$$\begin{aligned} \Phi'(0^+) &= \int_{t_0 - \delta}^{t_0} [h_\delta(t) \cdot L_z(t) + 1 \cdot L_{z'}(t)] dt + \int_{t_0}^{t_0 + \delta} [h_\delta(t) \cdot L_z(t) + (-1) \cdot L_{z'}(t)] dt = \\ &= \int_{t_0 - \delta}^{t_0} [L_{z'}(t) + h_\delta(t) \cdot L_z(t)] dt - \int_{t_0}^{t_0 + \delta} [L_{z'}(t) - h_\delta(t) \cdot L_z(t)] dt \end{aligned}$$

y está ya claro que $\Phi'(0^+) < 0$, que es lo que había que demostrar.



Lema 4.3.3. Sean h_δ las funciones definidas en el teorema anterior.

Si $Q \in KC^1[0, T]$ y $Q'(t_0^-) < Q'(t_0^+)$, entonces existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que $\forall \delta \in (0, \tilde{\delta})$, $\exists \varepsilon_\delta$ verificando:

$$H(t, Q(t) + \varepsilon h_\delta(t), Q'(t) + \varepsilon h'_\delta(t)) \leq H(t, Q(t), Q'(t)) , \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta) \text{ y } \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

Demostración)

Consideremos la función $\Phi_\delta : [0, 1] \times [t_0, t_0 + \delta) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\Phi_\delta(\varepsilon, t) = H(t, Q(t) + \varepsilon h_\delta(t), Q'(t) + \varepsilon h'_\delta(t)) - H(t, Q(t), Q'(t))$$

Tenemos que demostrar, en realidad, que existe $\tilde{\delta}$ tal que

$$\forall \delta \in (0, \tilde{\delta}) \exists \varepsilon_\delta \text{ verificando } \Phi_\delta(\varepsilon, t) < 0 , \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta) \text{ y } \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

Para lo cual, teniendo en cuenta que $\Phi_\delta(0, t) = 0$, será suficiente ver que existe $\tilde{\delta}$ tal que

$$\forall \delta \in (0, \tilde{\delta}) \text{ se tiene } \frac{\partial \Phi_\delta(0, t)}{\partial \varepsilon} < 0 , \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

$$\frac{\partial \Phi_\delta(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} = H_z(t, Q(t) + \varepsilon h_\delta(t), Q'(t) + \varepsilon h'_\delta(t)) \cdot h_\delta(t) + H_{z'}(t, Q(t) + \varepsilon h_\delta(t), Q'(t) + \varepsilon h'_\delta(t)) \cdot h'_\delta(t)$$

$$\frac{\partial \Phi_\delta(0, t)}{\partial \varepsilon} = H_z(t, Q(t), Q'(t)) \cdot h_\delta(t) + H_{z'}(t, Q(t), Q'(t)) \cdot h'_\delta(t)$$

$$\frac{\partial \Phi_\delta(0, t)}{\partial \varepsilon} \leq |H_z(t, Q(t), Q'(t))| \cdot \delta - H_{z'}(t, Q(t), Q'(t))$$

Por ser H_z , $H_{z'}$ y Q continuas y Q' continua a trozos existen

$$M = \max_{t \in [0, T]} |H_z(t, Q(t), Q'(t))| > 0$$

$$m = \min_{t \in [0, T]} H_{z'}(t, Q(t), Q'(t)) > 0$$

Si hacemos ahora $\tilde{\delta} = \frac{m}{M}$ ya tenemos lo que pretendíamos:

$$\frac{\partial \Phi_\delta(0, t)}{\partial \varepsilon} \leq M \cdot \delta - m < M \cdot \tilde{\delta} - m = 0, \forall \delta \in (0, \tilde{\delta}), \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$$



4.4. SOLUCIONES INTERIORES

Hemos visto, en el apartado anterior, que está garantizada la ausencia de puntos angulares en la solución minimizadora. En este apartado, estudiaremos condiciones que garantizan la inexistencia de solución fronteriza.

Teorema 4.4.1. *Si se verifican las hipótesis*

- i) $\Psi'(0) = 0$.
- ii) $\lim_{z' \rightarrow a_{\{z,t\}}} [\inf H_{z'}(t, z, z')] = +\infty \iff a = 0$.
- iii) $0 < \eta_1 < E(t, Q) < \eta_2 < \infty \forall Q \in C^2([0, T], \mathbb{R})$.

entonces $\forall (\mu, Z, \lambda) \in [0, T] \times [0, b] \times (0, \infty)$ que verifica

$$H(\mu, Z, \lambda) < P_d(\mu)$$

existe una única extremal de F

$$q(t) \in C^2([0, T], \mathbb{R}), \text{ con } 0 < q'(t) \wedge H(t, q(t), q'(t)) < P_d(t)$$

que satisface las condiciones:

$$q(\mu) = Z \text{ y } q'(\mu) = \lambda$$

Demostración)

Al igual que en el teorema 3.3.1, tenemos la ecuación

$$z'' = f(t, z, z')$$

donde $f \in C^1(\Omega)$ con

$$\Omega = \{(t, z, z') / 0 < z'(t) \wedge H(t, z, z') < P_d(t) \text{ y } t \in [0, T]\}$$

de modo que el *Problema de Cauchy*:

$$\left. \begin{aligned} z'' &= f(t, z, z') \\ z(\mu) &= Z \\ z'(\mu) &= \lambda \end{aligned} \right\}$$

tiene solución única en un entorno de μ .

Sea (q, I) solución maximal del anterior Problema de Cauchy. Bastará ver que $I = [0, T]$, o, lo que es lo mismo, que la solución maximal es global.

Procederemos por reducción al absurdo, suponiendo que $(q, [\mu, \tau))$ es solución maximal a derecha (a izquierda sería análogo). En tal caso, existirá una sucesión $\{t_n\}_1^\infty \subset [\mu, \tau)$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \tau$ que verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, q(t_n), q'(t_n)) \in \partial\Omega$$

Es decir, se cumple una de las dos igualdades siguientes

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} H(t_n, q(t_n), q'(t_n)) - P_d(t_n) = 0$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} q'(t_n) = 0$

Vamos a analizar ahora las dos situaciones posibles según se verifique 1) ó 2):

- 1) $\lim_{t_n \rightarrow \tau} H(t_n, q(t_n), q'(t_n)) = P_d(\tau)$

En virtud del lema de coordinación, tendremos que $\forall n$

$$-L_{z'}(t_n, q(t_n), q'(t_n)) \cdot \exp \left[- \int_{\mu}^{t_n} \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}(s, q(s), q'(s))} ds \right] = K$$

Consideremos la sucesión constante

$$K_n = H_{z'}(t_n, q(t_n), q'(t_n)) \cdot \Psi'(P_d(t_n) - H(t, q(t_n), q'(t_n))) \cdot \exp - \left[\int_{\mu}^{t_n} \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}(s, q(s), q'(s))} ds \right]$$

con $K_n = K = H_{z'}(\mu, Z, \lambda) \cdot \Psi'(P_d(\mu) - H(\mu, Z, \lambda)) > 0$.

Teniendo en cuenta ahora que:

- $\lim_{t_n \rightarrow \tau} \Psi'(P_d(t_n) - H(t, q(t_n), q'(t_n))) = \Psi'(0) = 0$ (hipótesis i).
- $\exp \left(- \int_{\mu}^{t_n} \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}(s, q(s), q'(s))} ds \right)$ está acotado (inmediato por la hipótesis iii).
- $\lim_{t_n \rightarrow \tau} H(t_n, q(t_n), q'(t_n)) = P_d(\tau) \implies \lim_{t_n \rightarrow \tau} q'(t_n) > 0$ (inmediato por 4.1.10) $\implies \lim_{t_n \rightarrow \tau} H_{z'}(t_n, q(t_n), q'(t_n)) < \infty$ (acotado, la hipótesis ii).

tenemos por tanto que $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = 0$ que contradice la constancia de K_n .

- 2) Si $\lim_{t_n \rightarrow \tau} q'(t_n) = 0$,

tenemos, por la hipótesis ii), que

$$\lim_{t_n \rightarrow \tau} H_{z'}(t_n, q(t_n), q'(t_n)) = \infty$$

Además, por 4.1.10, resulta que

$$\lim_{t_n \rightarrow \tau} [P_d(t_n) - H(t_n, q(t_n), q'(t_n))] = \varsigma > 0$$

y ahora, por ser Ψ' creciente y $\Psi'(0) = 0$, tenemos

$$\lim_{t_n \rightarrow \tau} \Psi'(P_d(t_n) - H(t, q(t_n), q'(t_n))) = \Psi'(\varsigma) > 0$$

con lo cual $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = +\infty$ que contradice, nuevamente, la constancia de K_n .



Corolario 4.4.2. *Si se verifican las hipótesis del teorema anterior y q es solución del problema Π_b , entonces se verifica una de las siguientes propiedades⁵:*

- i) $q'(t) = 0 \forall t \in [0, T]$.*
- ii) $H(t, q(t), q'(t)) = P_d(t) \forall t \in [0, T]$.*
- iii) $0 < H(t, q(t), q'(t)) < P_d(t) \forall t \in [0, T]$.*

Demostración)

El teorema 4.3.2. nos asegura que la solución q es de clase C^1 .

Está claro también, por 4.1.10, que no pueden existir arcos fronterizos consecutivos de distinto tipo.

Supongamos ahora, que coexisten en la solución arcos fronterizos e interiores.

Sea $\tau \in (t_1, t_2)$ tal que $0 < H(t, q(t), q'(t)) < P_d(t) \forall t \in (t_1, t_2)$ con t_2 (por ejemplo) punto fronterizo.

Consideremos ahora la única extremal $p \in C^2([0, T], \mathbb{R})$ que verifica

$$0 < H(t, p(t), p'(t)) < P_d(t) \forall t \in [0, T]$$

y que satisface las condiciones: $p'(\tau) = q'(\tau)$ y $p(\tau) = q(\tau)$.

Es obvio que $p \equiv q$ en el intervalo (t_1, t_2) .

Ahora bien, si tenemos en cuenta que

$$q'(t_2) = 0 \text{ o } H(t_2, q(t_2), q'(t_2)) - P_d(t_2) = 0$$

y la continuidad de q' , tendremos que para cualquier sucesión $\{t_n\} \subset (t_1, t_2)$ que verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_2$, verificará también

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q'(t_n) = 0 \text{ o } \lim_{n \rightarrow \infty} H(t_n, q(t_n), q'(t_n)) - P_d(t_n) = 0$$

y, de ahí, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p'(t_n) = 0 \text{ o } \lim_{n \rightarrow \infty} H(t_n, p(t_n), p'(t_n)) - P_d(t_n) = 0$$

Así pues, se tendrá

$$p'(t_2) = 0 \text{ o } H(t_2, p(t_2), p'(t_2)) = P_d(t_2)$$

lo cual contradice el carácter interior de la extremal p .



⁵La solución es enteramente fronteriza o enteramente interior.

4.5. SOLUCIONES FRONTERIZAS

Cuando una extremal $q(t)$ admite variaciones bilaterales en todo el intervalo $[0, T]$, se verifica, en todo él, la ecuación de coordinación

$$K = \int_0^t L_z(s, q(s), q'(s))ds - L_{z'}(t, q(t), q'(t))$$

donde $L(t, q(t), q'(t)) = \Psi (P_d(t) - H(t, q(t), q'(t)))$ y la constante de coordinación

$$K = \Psi' (P_d(0) - H(0, 0, q'(0))) \cdot H_{z'}(0, 0, q'(0))$$

Cuando la función minimizadora presenta arcos fronterizos se nos plantean los siguientes interrogantes:

¿En todos los arcos interiores (C_1 y C_3 de la figura 4.2) la constante de coordinación será idéntica?

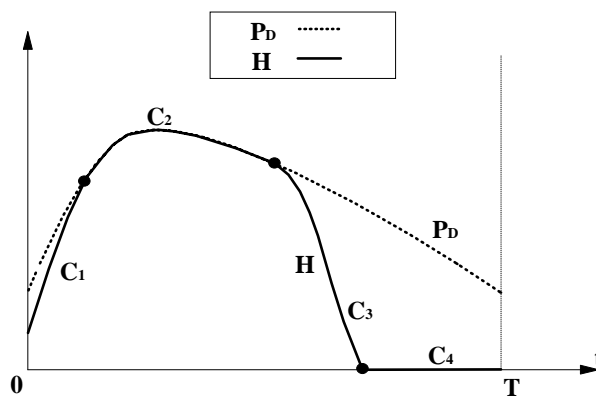


Figura 4.2: Arcos fronterizos e interiores.

¿En qué momento debe penetrar y abandonar la frontera?

Para una mayor clarificación de nuestros propósitos, vamos a considerar el caso particularmente interesante, por su sencillez, de función de generación hidráulica efectiva

$$H(t, z, z') = \beta \cdot z' \quad (\beta \in \mathbb{R}^+)$$

En este caso, ya vimos que la ecuación de coordinación es de la forma:

$$K = P_d(t) - H(t, q(t), q'(t))$$

Quiere esto decir que la solución minimizadora se caracterizará necesariamente por dar lugar a que el valor de la potencia térmica óptima sea constante. Si pensamos en un ejemplo como el de la figura 4.3, resulta evidente que, para determinados valores de K , la

ecuación de coordinación es de imposible cumplimiento en todo el intervalo, si tenemos en cuenta que la potencia térmica no puede exceder a la demandada. Lo que, sin duda alguna, tiene que darse es su constancia en los intervalos donde $q'(t)$ es estrictamente positivo y ser igual a la potencia demandada allí donde el caudal sea nulo. Y, en este caso particular, las preguntas que nos hacemos son:

¿Será la constante idéntica en todos los intervalos de constancia de la potencia térmica?
 ¿Podrá la térmica, en algún instante, asumir toda la demanda ($q'(t) = 0$) y que ésta sea mayor que en los intervalos de constancia?

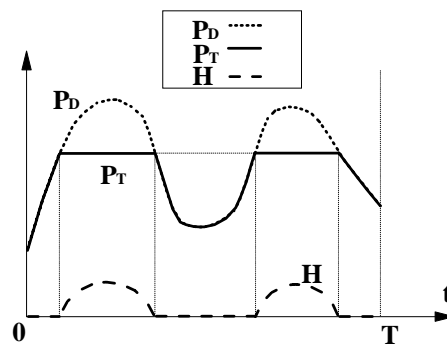
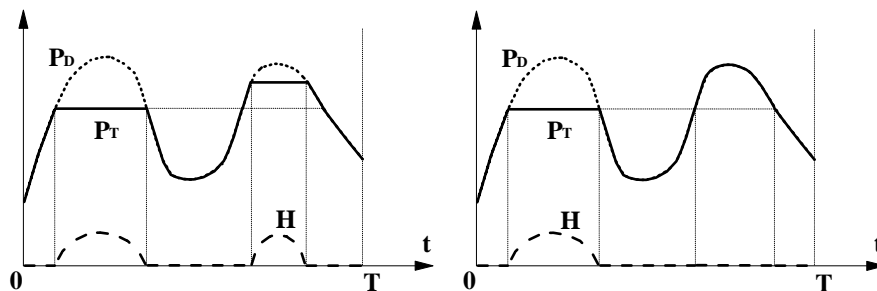


Figura 4.3: Solución correcta.



Figuras 4.4 - 4.5: Soluciones incorrectas.

Estas preguntas quedan respondidas satisfactoriamente, sin condiciones adicionales, cuando se trata de arcos fronterizos inferiores. Para los arcos fronterizos superiores solamente hemos logrado respuesta satisfactoria en los problemas donde la influencia del volumen en la función de generación hidráulica efectiva presenta “escasa relevancia” en el sentido de la definición siguiente.

Definición 4.5.1. Diremos que en un problema Π_b el volumen influye débilmente si $\forall g$ admisible, $\forall h \in KC^1[0, T]$ y $\forall t_1, t_2 \in [0, T]$ verificando:

- i) $H(t, g(t), g'(t)) = P_d(t)$ en $[t_1, t_2]$
- ii) $h(0) = h(T) = 0$

iii) $h'(t) < 0, \forall t \in (t_1, t_2)$
 $\exists \varepsilon' > 0$ tal que $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon']$ y $\forall t \in [t_1, t_2]$

$$H(t, g(t) + \varepsilon h(t), g'(t) + \varepsilon h'(t)) \leq P_d(t)$$

■ Lo que se pretende con esta definición es, en realidad, imponer que $g + \varepsilon h$ sea admisible $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon']$ y para cualquier h que verifique ii) y iii), lo que posibilitará la existencia de derivada por la derecha en 0 de la función $\Phi(\varepsilon) = F(Q + \varepsilon h)$.

La idea que esta definición trata de reflejar es que, si en un intervalo se genera por la central hidráulica la totalidad de la potencia demandada, cualquier otro reparto del agua, que conceda menos caudal a dicho intervalo, no logra generar más potencia en ningún instante del mismo. Obviamente, quedan aquí contemplados todos los problemas en cuya función de generación hidráulica efectiva no interviene el volumen. Veamos, a continuación, un modelo sencillo (no realista) para el que no se verifican las exigencias de la definición.

$$P_d(t) = 2 + 100 \cdot \exp(2t - 1) ; H(t, z, z') = z' + 100 \cdot \exp z$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ 2t - 1 & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ 1 - t & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

En el intervalo $[1/2, 1]$ $H(t, g(t), g'(t)) = P_d(t)$ y, sin embargo,

$$H(3/4, g(3/4) + \varepsilon h(3/4), g'(3/4) + \varepsilon h'(3/4)) > P_d(3/4)$$

para valores de ε próximos a 0.

Teorema 4.5.2. Sea $\epsilon > 0$ y $q(t)$ solución del problema Π_b verificando

$$q'(t) = 0, \forall t \in [t_0, t_1]$$

i) Si $0 < H(t, q(t), q'(t)) < P_d(t) \forall t \in [t_1, t_1 + \epsilon]$, entonces:

$$\int_{t_0}^{t_1} L_z(s, q(s), q'(s)) ds + L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_0)) - L_{z'}(t_1, q(t_1), q'(t_1)) \geq 0$$

ii) Si $0 < H(t, q(t), q'(t)) < P_d(t) \forall t \in [t_0 - \epsilon, t_0]$, entonces:

$$\int_{t_0}^{t_1} L_z(s, q(s), q'(s)) ds + L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_0)) - L_{z'}(t_1, q(t_1), q'(t_1)) \leq 0$$

Demostración)

i) Supongamos lo contrario, es decir

$$\int_{t_0}^{t_1} L_z(s, q(s), q'(s)) ds + L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_0)) - L_{z'}(t_1, q(t_1), q'(t_1)) < 0$$

o, lo que es lo mismo,

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(L_z(t, q(t), q'(t)) - \frac{d}{dt} L_{z'}(t, q(t), q'(t)) \right) dt < 0$$

Consideremos la siguiente sucesión de funciones

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_0 \\ n(t - t_0) & \text{si } t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } t \in [t_0 + \frac{1}{n}, t_1] \\ g(t) & \text{si } t > t_1 \end{cases}$$

con $g \in C^1$ verificando $g(t_1) = 1$ y $g(t) = 0 \forall t \in [t_1 + \epsilon, T]$.

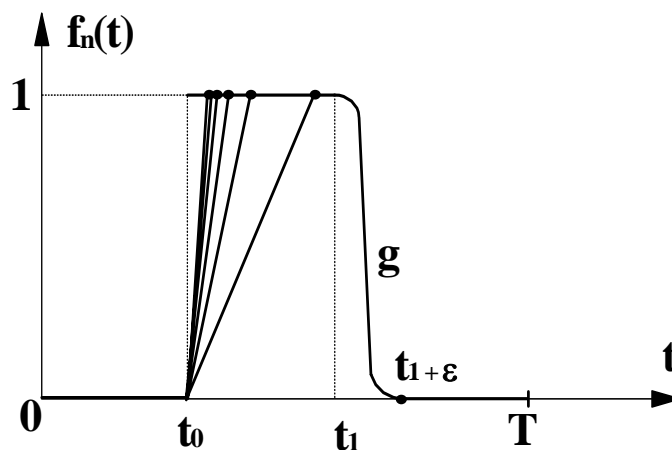


Figura 4.6: Sucesin auxiliar de funciones.

Está claro que f_n es puntualmente convergente y uniformemente acotada en $[0, T]$ e integrable Riemann $\forall n$, verificándose

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_0 \\ 1 & \text{si } t \in (t_0, t_1] \\ g(t) & \text{si } t > t_1 \end{cases}$$

Haciendo

$$\Gamma(t) = \left(L_z(t, q(t), q'(t)) - \frac{d}{dt} L_{z'}(t, q(t), q'(t)) \right) \text{ y } \Upsilon_n(t) = \Gamma(t) f_n(t)$$

tendremos que $\Upsilon_n(t)$ es, también, puntualmente convergente y uniformemente acotada en

$[0, T]$ e integrable Riemann $\forall n$, cumpliéndose

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Upsilon_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_0 \\ \Gamma(t) & \text{si } t \in (t_0, t_1] \\ \Gamma(t)g(t) & \text{si } t > t_1 \end{cases}$$

Estamos en condiciones de utilizar el teorema de convergencia acotada, que nos asegura que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} \Upsilon_n(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \lim_{n \rightarrow \infty} \Upsilon_n(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \Gamma(t) dt$$

así pues,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} \Upsilon_n(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(L_z(t, q(t), q'(t)) - \frac{d}{dt} L_{z'}(t, q(t), q'(t)) \right) dt < 0$$

lo cual implica que, para un cierto m , se cumplirá

$$\int_{t_0}^{t_1} \Upsilon_m(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \Gamma(t) f_m(t) dt < 0$$

Tengamos ahora en cuenta que $\exists \delta' > 0$ suficientemente pequeño de modo que, $\forall \delta \in [0, \delta']$, $q(t) + \delta f_m(t)$ es admisible⁶.

Consideremos ahora la derivada direccional

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{F(q + \delta f_m) - F(q)}{\delta} &= \int_0^T \left(L_z(t, q(t), q'(t)) - \frac{d}{dt} L_{z'}(t, q(t), q'(t)) \right) \cdot f_m(t) dt = \\ &= \int_0^{t_0} \Gamma(t) f_m(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \Gamma(t) f_m(t) dt + \int_{t_1}^{t_1+\epsilon} \Gamma(t) g(t) dt + \int_{t_1+\epsilon}^T \Gamma(t) \cdot f_m(t) dt \end{aligned}$$

pero, teniendo en cuenta que $\Gamma(t) = 0$ en $[t_1, t_1 + \epsilon]$, por ser q extremal en ese intervalo, y que $f_m \equiv 0$ en $[t_1 + \epsilon, T] \cup [0, t_0]$, se sigue que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{F(q + \delta f_m) - F(q)}{\delta} = \int_{t_0}^{t_1} \Gamma(t) f_m(t) dt < 0$$

con lo cual, $\exists \zeta > 0$ tal que $F(q + \zeta f_m) < F(q)$, lo cual contradice la minimalidad de $q(t)$.

ii)

⁶En este momento no es necesaria la exigencia de influencia débil del volumen puesto que la restricción $q'(t) \geq 0$ sólo afecta al caudal.

Análogamente, considerando la sucesión auxiliar de funciones:

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq t_1 \\ n(t - t_1) & \text{si } t \in [t_1 - \frac{1}{n}, t_1] \\ -1 & \text{si } t \in [t_0, t_1 - \frac{1}{n}] \\ g(t) & \text{si } t \leq t_0 \end{cases}$$

con $g \in C^1$ verificando $g(t_0) = -1$ y $g(t) = 0$ si $t \leq t_0 - \epsilon$.

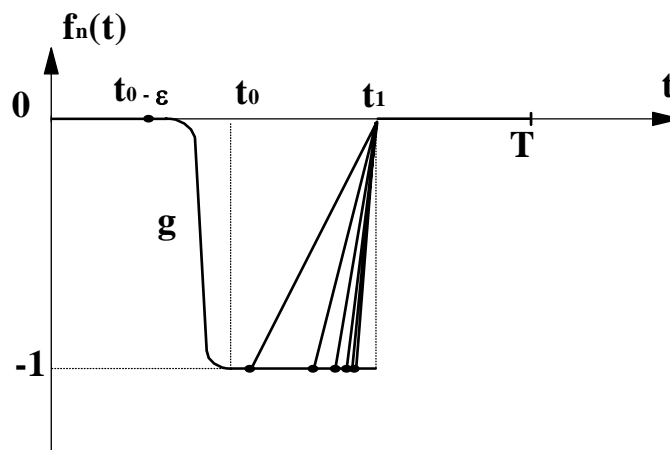


Figura 4.7: Sucesin auxiliar de funciones.

Corolario 4.5.3. Si $q(t)$ es solución del problema Π_b , que en el intervalo $[t_0, t_1]$ presenta un arco fronterizo del tipo $q'(t) = 0$, y en $[t_0 - \epsilon, t_0]$ y $[t_1, t_1 + \epsilon]$ sendos arcos de extremal interiores, entonces se verifica lo siguiente:

I)

$$\int_{t_0}^{t_1} L_z(s, q(s), q'(s)) ds + L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_0)) - L_{z'}(t_1, q(t_1), q'(t_1)) = 0$$

II)

$$\int_0^t L_z(s, q(s), q'(s)) ds - L_{z'}(t, q(t), q'(t)) = K, \forall t \in [t_0 - \epsilon, t_0] \cup [t_1, t_1 + \epsilon]$$

Demostración)

I) Es inmediata, teniendo en cuenta el teorema anterior.

II) $q(t)$ verificará la ecuación de Euler del funcional en los intervalos $[t_0 - \epsilon, t_0]$ y $[t_1, t_1 + \epsilon]$, de modo que tendremos las ecuaciones de coordinación:

$$K_0 = \int_0^t L_z(s, q(s), q'(s)) ds - L_{z'}(t, q(t), q'(t)) \text{ en } [t_0 - \epsilon, t_0]$$

$$K_0 = \int_0^{t_0} L_z(s, q(s), q'(s))ds - L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_0))$$

$$K_1 = \int_0^t L_z(s, q(s), q'(s))ds - L_{z'}(t, q(t), q'(t)) \text{ en } [t_1, t_1 + \epsilon]$$

$$K_1 = \int_0^{t_1} L_z(s, q(s), q'(s))ds - L_{z'}(t_1, q(t_1), q'(t_1))$$

$$K_1 - K_0 = \int_{t_0}^{t_1} L_z(s, q(s), q'(s))ds - L_{z'}(t_1, q(t_1), q'(t_1)) + L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_0)) \stackrel{I}{=} 0$$

de donde se concluye que $K_1 = K_0$.



Teorema 4.5.4. *Sea $\epsilon > 0$ y $q(t)$ solución del problema Π_b , en el que el volumen influye débilmente, verificando*

$$H(t, q(t), q'(t)) = P_d(t) , \forall t \in [t_0, t_1]$$

i) *Si $0 < H(t, q(t), q'(t)) < P_d(t) , \forall t \in [t_1, t_1 + \epsilon]$, entonces*

$$\int_{t_0}^{t_1} L_z(s, q(s), q'(s))ds + L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_0)) - L_{z'}(t_1, q(t_1), q'(t_1)) \leq 0$$

ii) *Si $0 < H(t, q(t), q'(t)) < P_d(t) , \forall t \in [t_0 - \epsilon, t_0]$, entonces*

$$\int_{t_0}^{t_1} L_z(s, q(s), q'(s))ds + L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_0)) - L_{z'}(t_1, q(t_1), q'(t_1)) \geq 0$$

Demostración)

La técnica de la demostración es idéntica a la del teorema anterior. Se diferencian únicamente en las sucesiones auxiliares de funciones utilizadas y en el uso de la influencia débil del volumen en el momento de calcular la “derivada direccional”, que requiere la admisibilidad de $q(t) + \delta f_m(t)$.

i) Puede utilizarse la siguiente sucesión auxiliar de funciones, que verifica $f'_n(t) < 0 , \forall t \in (t_0, t_1)$,

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_0 \\ \left(\frac{t_1-t}{t_1-t_0}\right)^n - 1 & \text{si } t \in [t_0, t_1] \\ g(t) & \text{si } t > t_1 \end{cases}$$

con $g \in C^1$ verificando $g(t_1) = -1$ y $g(t) = 0$ si $t \geq t_1 + \epsilon$.

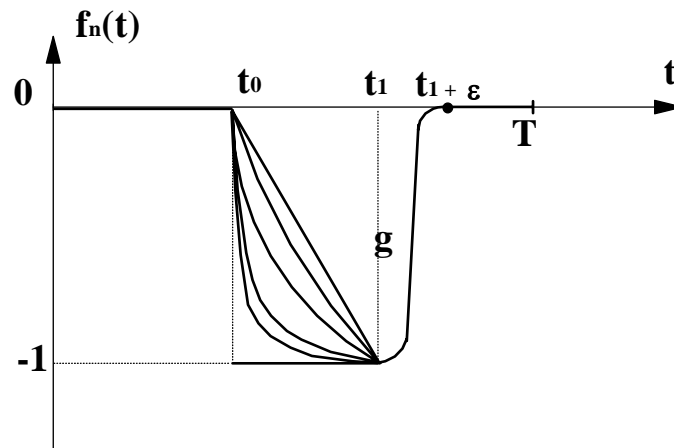


Figura 4.8: Sucesin auxiliar de funciones.

ii) Puede utilizarse, en este caso, la siguiente sucesión auxiliar de funciones, que verifica $f'_n(t) < 0$, $\forall t \in (t_0, t_1)$,

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > t_1 \\ \left(\frac{t_1-t}{t_1-t_0}\right)^{\frac{1}{n}} & \text{si } t \in [t_0, t_1] \\ g(t) & \text{si } t < t_0 \end{cases}$$

con $g \in C^1$ verificando $g(t_0) = 1$ y $g(t) = 0$ si $t \leq t_0 - \epsilon$



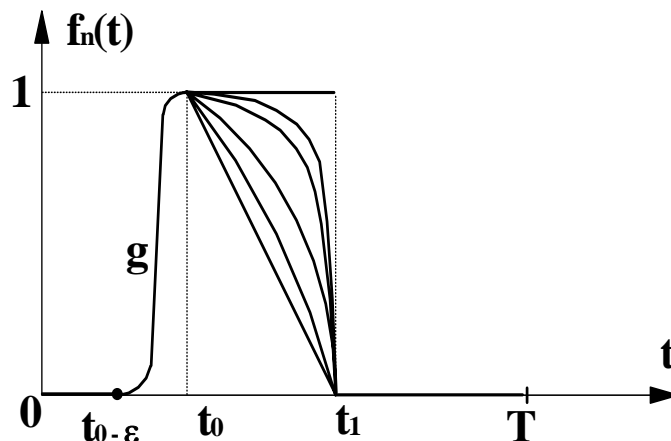


Figura 4.9: Sucesin auxiliar de funciones.

Corolario 4.5.6. Si $q(t)$ es soluci3n del problema Π_b , en el que el volumen influye d3bilmente, presentando un arco fronterizo del tipo $H(t, q(t), q'(t)) = P_d(t) \forall t \in [t_0, t_1]$ y sendos arcos de extremal interiores en $[t_0 - \epsilon, t_0]$ y $[t_1, t_1 + \epsilon]$, entonces se verifica lo siguiente:

I)

$$\int_{t_0}^{t_1} L_z(s, q(s), q'(s)) ds + L_{z'}(t_1, q(t_0), q'(t_0)) - L_{z'}(t_1, q(t_1), q'(t_1)) = 0$$

II)

$$\int_0^t L_z(s, q(s), q'(s)) ds - L_{z'}(t, q(t), q'(t)) = K \forall t \in [t_0 - \epsilon, t_0] \cup [t_1, t_1 + \epsilon]$$

Demostraci3n)

Id3ntica a la del corolario anterior.

▲

■ Con estos dos corolarios queda respondida afirmativamente la pregunta que nos hab3amos formulado de si, en los ditintos arcos de extremal, la constante de coordinaci3n es la misma.

Definici3n 4.5.6. Llamaremos *funci3n de coordinaci3n* de $q \in \Theta_b$ a la funci3n , continua en $[0, T]$, definida de la manera siguiente:

$$\forall_q(x) = \int_0^x L_z(t, q(t), q'(t)) dt - L_{z'}(x, q(x), q'(x))$$

Observaci3n 4.5.7. Para cualesquiera $t_0, t_1 \in [0, T]$ se verifica:

$$\mathbb{Y}_q(t_1) - \mathbb{Y}_q(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} L_z(s, q(s), q'(s)) ds + L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_0)) - L_{z'}(t_1, q(t_1), q'(t_1))$$

En el caso particular de $H(t, z, z') = f(z) \cdot z'$ y llamando $P_{ter}(t)$ a (potencia térmica)

$$P_{ter}(t) = P_d(t) - f(z(t)) \cdot z'(t)$$

se tiene que

$$\mathbb{Y}_q(t_1) = \mathbb{Y}_q(t_0) \iff P_{ter}(t_0) = P_{ter}(t_1)$$

Teorema 4.5.8. (Teorema fundamental de coordinación). Si q es solución del problema Π_b , en el que el volumen influye débilmente⁷, entonces $\exists K > 0$ tal que:

iii) Si $q'(t) \neq 0$ y $H(t, q(t), q'(t)) \neq P_d(t)$ (t no es punto fronterizo)

$$\mathbb{Y}_q(t) = K$$

ii) Si $q'(t) = 0$

$$\mathbb{Y}_q(t) \leq K$$

iii) Si $H(t, q(t), q'(t)) = P_d(t)$

$$\mathbb{Y}_q(t) \geq K$$

Demostración)

i) Ya se ha demostrado para arcos interiores consecutivos en los corolarios anteriores.

ii) Si $q'(t) = 0 \forall t \in [t_0, t_1]$, siendo $(t_1, t_1 + \epsilon)$ arco interior, tendremos, por la continuidad de \mathbb{Y}_q , que $\mathbb{Y}_q(t_1) = K$.

Aplicando ahora el teorema 4.5.2, tendremos que $\forall t \in [t_0, t_1]$

$$\int_t^{t_1} L_z(s, q(s), q'(s)) ds + L_{z'}(t, q'(t), q(t)) - L_{z'}(t_1, q'(t_1), q(t_1)) \geq 0$$

o, equivalentemente,

$$\mathbb{Y}_q(t_1) - \mathbb{Y}_q(t) \geq 0$$

y, por tanto,

$$K = \mathbb{Y}_q(t_1) \geq \mathbb{Y}_q(t)$$

⁷Tenemos la convicción de que este resultado es cierto en todos los casos pero, por el momento, no se ha logrado demostrar.

iii) Análogo que el anterior. ▲

Definición 4.5.8. A la constante K del teorema anterior la denominaremos constante de coordinación de la solución q .

4.6. CONSTRUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN

En el capítulo anterior, sugeríamos la construcción de la solución utilizando el método de tiro, consistente en variar la condición inicial de la derivada (caudal en el instante cero) hasta lograr que se verificara la segunda condición de contorno. En este caso, la idea subyacente es la misma; pero la variación de la condición inicial de la derivada, que ahora puede carecer de sentido, será sustituida por la variación de la constante de coordinación. Se tratará de encontrar, para cada K , la función Q_K que satisfaga el teorema fundamental de coordinación y, de entre ellas, la que dé lugar a una función admisible.

Definición 4.6.1. Llamaremos $\lambda_{\text{máx}}$ al caudal necesario en el instante inicial ($t = 0$) para satisfacer la central hidráulica toda la potencia demandada. Es decir:

$$H(0, 0, \lambda_{\text{máx}}) = P_d(0)$$

Haremos también:

$$K_{\text{mín}} = -L_{z'}(0, 0, \lambda_{\text{máx}})$$

$$K_{\text{máx}} = -L_{z'}(0, 0, 0)$$

Observación 4.6.2. $\forall \lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$ tendremos

$$K_{\text{mín}} = -L_{z'}(0, 0, \lambda_{\text{máx}}) < -L_{z'}(0, 0, \lambda) < -L_{z'}(0, 0, 0) = K_{\text{máx}}$$

Para la construcción de Q_K (**ALGORITMO II**) seguiremos los pasos siguientes:

Paso 1] (primer arco)

i) Si $K \geq K_{\text{máx}}$ haremos $Q_K(t) = 0$ en el intervalo maximal $[0, t_1]$ donde se verifica

$$K \geq \forall_{Q_K}(t) = \int_0^t L_z(t, 0, 0) ds - L_{z'}(t, 0, 0), \forall t \in [0, t_1]$$

(La central térmica genera toda la potencia demandada en $[0, t_1]$).

ii) Si $K \leq K_{\text{mín}}$ haremos $Q_K(t) = \omega(t)$ solución de la ecuación diferencial

$$H(t, \omega(t), \omega'(t)) = P_d(t) \text{ con } \omega(0) = 0$$

en el intervalo maximal $[0, t_1]$ donde se verifica

$$K \leq \mathbb{Y}_\omega(t) = \int_0^t L_z(t, \omega(s), \omega'(s))ds - L_{z'}(t, \omega(t), \omega'(t)) , \forall t \in [0, t_1]$$

(La central hidráulica genera toda la potencia demandada en $[0, t_1]$).

iii) $K_{\min} < K < K_{\max}$ ($\exists \lambda$ que verifique $K = -L_{z'}(0, 0, \lambda)$).

Q_K será el arco de extremal interior que verifica la ecuación de Euler en su dominio maximal $[0, t_1]$ y, por tanto, la ecuación de coordinación:

$$K = \mathbb{Y}_{Q_K}(t) = \int_0^t L_z(s, Q_K(s), Q'_K(s))ds - L_{z'}(t, Q_K(t), Q'_K(t)) , \forall t \in [0, t_1]$$

Paso i-ésimo] (arco i-ésimo)

• Si Q_K tiene en $[t_{i-1}, t_i]$ un arco interior, caben dos posibilidades:

I) Si $Q'_K(t_i) = 0$, consideraremos el intervalo maximal $[t_i, t_{i+1}]$ que verifica

$$K \geq \int_0^t L_z(s, Q_K(s), Q'_K(s))ds - L_{z'}(t, Q_K(t_i), 0) , \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$$

y haremos $Q_K(t) = Q_K(t_i) \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$.

II) Si $H(t_i, Q_K(t_i), Q'_K(t_i)) = P_d(t_i)$, consideraremos el intervalo maximal $[t_i, t_{i+1}]$ que verifica

$$K \leq \int_0^t L_z(s, \omega(s), \omega'(s))ds - L_{z'}(t, \omega(t), \omega'(t)) \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$$

siendo $\omega(t)$ solución de la ecuación diferencial

$$H(t, \omega(t), \omega'(t)) = P_d(t) \text{ con } \omega(t_i) = Q_K(t_i)$$

En este caso, haremos $Q_k(t) = \omega(t) \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$.

• Si $[t_{i-1}, t_i]$ es fronterizo, Q_K será el arco de extremal interior que verifica la ecuación de Euler en su dominio maximal $[t_i, t_{i+1}]$ y, por tanto, la ecuación de coordinación:

$$K = \int_0^t L_z(s, Q_K(s), Q'_K(s))ds - L_{z'}(t, Q_K(t), Q'_K(t)) , \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$$

Observación 4.6.3. En los arcos fronterizos de tipo $q'(t) = 0$ la condición

$$\mathbb{Y}_q(t) = \int_0^t L_z(s, Q_K(s), Q'_K(s))ds - L_{z'}(t, Q_K(t), 0) \leq K$$

es equivalente a la no existencia de solución positiva ($X > 0$) en el instante t de la ecuación

$$\int_0^t L_z(s, Q_K(s), Q'_K(s))ds - L_{z'}(t, Q_K(t), X) = K$$

siendo X la incógnita. No hay más que tener en cuenta el carácter estrictamente creciente de $L_{z'}$ con respecto a z' .

Observación 4.6.4. En los arcos fronterizos de tipo $H(t, q(t)q'(t)) = P_d(t)$, la condición

$$\forall_q(t) = \int_0^t L_z(s, Q_K(s), Q'_K(s))ds - L_{z'}(t, Q_K(t), Q'_K(t)) \geq K$$

es equivalente a la no existencia de solución en el instante t de la ecuación

$$\int_0^t L_z(s, Q_K(s), Q'_K(s))ds - L_{z'}(t, Q_K(t), X) = K$$

cumpléndose, además, que $H(t, Q_K(t), X) \leq P_d(t)$.

Efectivamente, si $H(t, Q_K(t), Q'_K(t)) = P_d(t)$ y $H(t, Q_K(t), X) < P_d(t)$, necesariamente $Q'_K(t) > X$ y, en consecuencia,

$$L_{z'}(t, Q_K(t), X) < L_{z'}(t, Q_K(t), Q'_K(t))$$

■ La construcción de Q_K , desde el punto de vista computacional, puede efectuarse siguiendo el mismo procedimiento que en el capítulo anterior, utilizando la versión discretizada de las ecuaciones de coordinación, con la salvedad de que, en los instantes donde los valores obtenidos para z y z' violen las restricciones, se impondrá a la solución Q_K mantenerse en la frontera hasta que se den las condiciones - establecidas en teoremas precedentes - para su abandono.

Capítulo 5

EL PROBLEMA H_n - T_1

5.1. INTRODUCCIÓN

El problema de optimización de un sistema hidrotérmico, cuando son varias las centrales hidráulicas, es muy complejo. No hay que olvidar que el problema variacional asociado está ligado a la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno. Su análisis profundo, desde un punto de vista análogo al realizado en el caso de una única central hidráulica, será sin duda uno de los objetos de futuros trabajos. Hemos ideado, no obstante, un algoritmo de resolución de este problema para casos en los que se cumplen determinadas hipótesis adicionales. Dicho algoritmo está inspirado en el denominado “método del descenso coordenado cíclico”, utilizado en la resolución de problemas de optimización en espacios de dimensión finita, y se ha revelado altamente satisfactorio a la hora de resolver nuestro problema en una amplia gama de modelos.

5.2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Definición 5.2.1. Llamaremos $\varphi\{F, \vec{b}\}$ al problema de minimizar el funcional

$$F(\vec{Z}(t)) = \int_0^T L(t, \vec{Z}(t), \vec{Z}'(t))dt$$

con L de la forma:

$$L(t, \vec{Z}(t), \vec{Z}'(t)) = \Psi \left(P_d(t) - H(t, \vec{Z}(t), \vec{Z}'(t)) \right)$$

siendo

$$\vec{Z}(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))$$

$$\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n \text{ (vector de volúmenes disponibles)}$$

dentro del conjunto

$$\Omega = \Omega_{b_1} \times \Omega_{b_2} \times \dots \times \Omega_{b_n}$$

donde

$$\Omega_{b_i} \subset \{z \in KC^1[0, T] / z(0) = 0, z(T) = b_i\}$$

Definición 5.2.2. Diremos que $\vec{Q}(t)$ es admisible para $\wp\{F, \vec{b}\}$ si $\vec{Q}(t) \in \Omega$.

Definición 5.2.3. Diremos que $\vec{Q}(t)$ es solución del problema $\wp\{F, \vec{b}\}$ si:

- i) $\vec{Q}(t)$ es admisible.
- ii) $F(\vec{Q}(t)) \leq F(\vec{Z}(t)) \forall \vec{Z}(t) \in \Omega$.

5.3. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Veamos, a continuación, de qué modo se puede resolver, en determinadas condiciones, un problema de tipo H_n-T_1 , a partir de la resolución de una sucesión de problemas de tipo H_1-T_1 .

Definición 5.3.1. Para cada $\vec{Q}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t)) \in \Omega$, consideraremos¹

$$H_i^{\vec{Q}}(t, z_i, z'_i) = H(t, q_1(t), \dots, q_{i-1}(t), z_i, q_{i+1}(t), \dots, q_n(t), q'_1(t), \dots, q'_{i-1}(t), z'_i, q'_{i+1}(t), \dots, q'_n(t))$$

y el funcional $F_i^{\vec{Q}}$ definido en Ω_i como

$$F_i^{\vec{Q}}(z_i(t)) = \int_0^T \Psi \left(P_d(t) - H_i^{\vec{Q}}(t, z_i(t), z'_i(t)) \right) dt$$

Definición 5.3.2. Diremos que F es pseudo-convexo en Ω si se verifican las condiciones siguientes:

- i) Para toda $\vec{Q} \in \Omega$ y $\forall i = 1, \dots, n$, existe un único mínimo de $F_i^{\vec{Q}}$ en Ω_i .
- ii) Si $\vec{Q} = (q_1, \dots, q_n) \in \Omega$ es tal que q_i es solución de $\wp\{F_i^{\vec{Q}}, b_i\} \forall i = 1, \dots, n$, entonces \vec{Q} es solución de $\wp\{F, \vec{b}\}$ con $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$.

¹ $H_i^{\vec{Q}}(t, z_i, z'_i)$ representa la potencia generada por el sistema hidráulico, como función del caudal y volumen turbinado de una de ellas, suponiendo un determinado comportamiento para las restantes.

Observación 5.3.3. Si $\vec{Q} = (q_1, \dots, q_n)$ con q_i solución de $\wp\{F_i^{\vec{Q}}, b_i\} \forall i = 1, \dots, n$, se verifican las ecuaciones de Euler

$$\frac{\partial L(t, \vec{Q}(t), \vec{Q}'(t))}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, \vec{Q}(t), \vec{Q}'(t))}{\partial z'_i} \right) = 0, \forall i = 1, \dots, n$$

y, por tanto, \vec{Q} será punto crítico de F y, por la condición ii), mínimo absoluto. De este modo imponemos que, sin ser necesariamente convexo el funcional, sean equivalentes los conceptos de punto crítico y mínimo absoluto.

Definición 5.3.4. Si F es pseudo-convexo en Ω , llamaremos *aplicación minimizadora i-ésima* a la aplicación $\Phi_i : \Omega \rightarrow \Omega$ definida del modo siguiente:

$$\Phi_i(\vec{Q}) = (q_1, \dots, \Upsilon_i^{\vec{Q}}, \dots, q_n)$$

donde $\vec{Q} = (q_1, \dots, q_n)$ y $\Upsilon_i^{\vec{Q}}$ es la única solución de $\wp\{F_i^{\vec{Q}}, b_i\}$.

Nota 5.3.5. Las aplicaciones minimizadoras i-ésimas están bien definidas en virtud de la condición i) de la definición de pseudo-convexidad.

Lema 5.3.6. Si F es pseudo-convexo en Ω , entonces

$$\Phi_i(\vec{Q}) = \vec{Q} \forall i = 1, \dots, n \iff \vec{Q} \text{ es solución de } \wp\{F, \vec{b}\}$$

Demostración)

\implies) Es consecuencia inmediata de la definición.

\impliedby) Es evidente. ▲

Lema 5.3.7. Si F es pseudo-convexo en Ω , las aplicaciones minimizadoras verifican

$$\Phi_i(\vec{Q}) \neq \vec{Q} \iff F(\Phi_i(\vec{Q})) < F(\vec{Q})$$

Demostración)

Es evidente sin más que tener en cuenta la definición de las aplicaciones minimizadoras i-ésimas. ▲

Definición 5.3.8. Llamaremos *sucesión minimizadora* de $\wp\{F, \vec{b}\}$ a toda sucesión

$$\{\vec{Q}_{i,k}\} \subset \Omega \text{ con } (i,k) \in \{1, \dots, n\} \times \mathbb{N}$$

definida por recurrencia de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\vec{Q}_{i,1} &= \vec{Q}^0 \in \Omega, \forall i = 1, \dots, n \\ \vec{Q}_{i+1,k} &= \Phi_{i+1}(\vec{Q}_{i,k}) \forall i = 1, \dots, n-1, \forall k \in \mathbb{N} \\ \vec{Q}_{1,k+1} &= \Phi_1(\vec{Q}_{n,k}) \forall k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Definición 5.3.9. Llamaremos *subsucesión minimizadora i -ésima* de $\{\vec{Q}_{i,k}\}$ a la sucesión resultante al fijar i

$$S_k^i = \vec{Q}_{i,k}$$

Teorema 5.3.10. Si el funcional F es pseudo-convexo en Ω , donde, con una cierta topología, se verifican las condiciones

- i) Las minimizadoras Φ_i son continuas² $\forall i = 1, \dots, n$.
- ii) La subsucesión minimizadora S_k^i es convergente $\forall i = 1, \dots, n$, entonces todas las subsucesiones minimizadoras convergen a una solución del problema $\varphi\{F, \vec{b}\}$.

Demostración)

Haremos $\vec{Q}_i = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k^i = \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{Q}_{i,k}$

$$\Phi_{i+1}(\vec{Q}_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{i+1}(S_k^i) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k^{i+1} = \vec{Q}_{i+1} \forall i = 1, \dots, n-1$$

$$\vec{Q}_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k^1 = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{k+1}^1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_1(S_k^n) = \Phi_1\left(\lim_{k \rightarrow \infty} S_k^n\right) = \Phi_1(\vec{Q}_n)$$

$$\vec{Q}_1 = \Phi_1(\vec{Q}_n) = \Phi_1(\Phi_n(\vec{Q}_{n-1})) = \dots = (\Phi_1 \circ \Phi_n \circ \Phi_{n-1} \circ \dots \circ \Phi_2)\vec{Q}_1$$

Teniendo en cuenta ahora que $\Phi_{i+1}(\vec{Q}_i) = \vec{Q}_{i+1}$, $\vec{Q}_1 = \Phi_1(\vec{Q}_n)$ y el lema 5.3.5,

$$F(\vec{Q}_1) \leq F(\vec{Q}_n) \leq F(\vec{Q}_{n-1}) \leq \dots \leq F(\vec{Q}_2) \leq F(\vec{Q}_1)$$

de modo que

$$F(\vec{Q}_1) = F(\vec{Q}_n) = F(\vec{Q}_{n-1}) = \dots = F(\vec{Q}_2)$$

y, por el lema 5.3.5, se deduce que todas las subsucesiones minimizadoras convergen al mismo límite \vec{Q} :

$$\vec{Q}_1 = \vec{Q}_n = \vec{Q}_{n-1} = \dots = \vec{Q}_2 = \vec{Q}$$

²La continuidad de las funciones Φ_i es razonable pues representa que, a pequeños cambios de \vec{Q} , corresponden pequeños cambios del mínimo de $F_i^{\vec{Q}}$ en Ω_i .

y, por tanto,

$$\Phi_i(\vec{Q}) = \vec{Q}, \forall i = 1, \dots, n$$

de modo que, por la pseudo-convexidad de F y el lema 5.3.4, \vec{Q} es solución del problema $\wp\{F, \vec{b}\}$.

▲

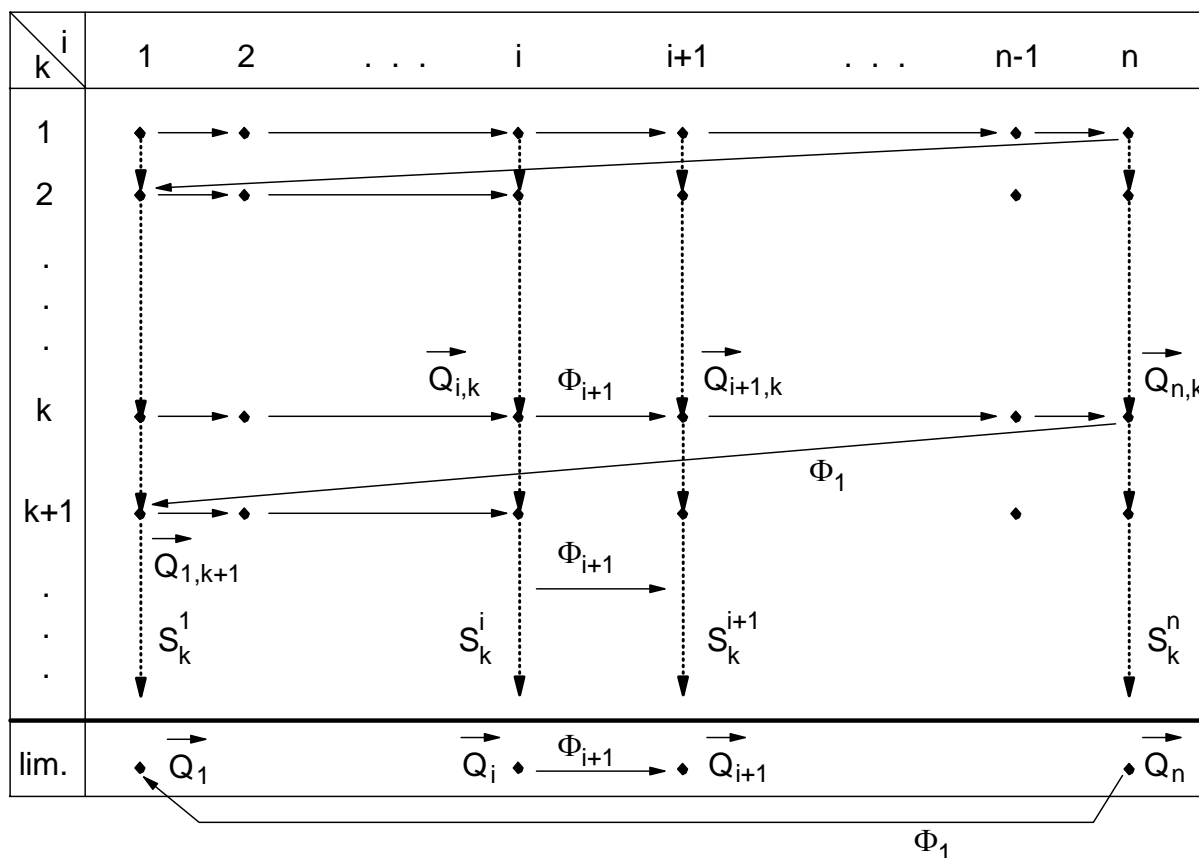


Figura 5.1: Subsucesiones minimizadoras

Nota 5.3.11. Una topología muy natural en Ω parece la inducida por la norma

$$\|\vec{q}(t)\| = \max_{i=1, \dots, n} \{\|q_i(t)\|_\infty\}$$

en cuyo caso la convergencia en Ω se traduce en la convergencia uniforme en cada uno de los espacios Ω_{b_i} .

Nota 5.3.12. La convergencia de las subsucesiones minimizadoras no está garantizada en problemas donde los caudales admisibles no están acotados, como es el caso de los problemas sin restricciones. De hecho, cualquier problema que conste de dos centrales hidráulicas de funciones de generación hidráulica efectiva respectivas

$$H_1(t, z_1, z'_1) = f(z_1) \cdot z'_1 \text{ y } H_2(t, z_2, z'_2) = g(t) \cdot z'_2$$

no tiene solución para ninguna pareja de volúmenes disponibles.

5.4. CONSTRUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN

La solución del problema (**ALGORITMO III**) la construiremos como el límite de una sucesión minimizadora que, en el caso de que se verifiquen las hipótesis del teorema, nos proporcionará, con la precisión que deseemos, una aproximación a la solución.

A partir de una cierta $\vec{Q}^0 = (z_1, \dots, z_n)$ admisible, se construye una sucesión a base de sucesivas y reiteradas actuaciones³ de $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$. Más concretamente, si hacemos

$$\Phi = (\Phi_n \circ \Phi_{n-1} \circ \dots \circ \Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1)$$

la solución⁴ será

$$\text{Solución} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi^k (\vec{Q}^0)$$

Desde el punto de vista algorítmico y computacional, se trata de un proceso iterativo que, en cada etapa, calcula el funcionamiento óptimo de una central hidráulica, suponiendo fijo el comportamiento de las restantes. De este modo, tenemos en cada etapa un régimen de funcionamiento de las centrales hidráulicas cada vez menos costoso y convergente al óptimo. En cada una de estas etapas, podemos utilizar las herramientas (algoritmos) propuestas en capítulos precedentes. Nótese, además, que, con el planteamiento que hemos realizado, quedan englobados todos los problemas, tanto si consideramos restricciones como si no.

³La actuación de cada Φ_i pasa por la resolución de un problema de tipo H_1-T_1 , que se estudió en capítulos anteriores.

⁴Si el funcional F no es pseudo-convexo, el algoritmo y la teoría que lo justifica mantendrían su validez, con la salvedad de que la solución que se obtuviera sería, posiblemente, solo local.

Capítulo 6

APORTACIONES, CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO

6.1. APORTACIONES Y CONCLUSIONES

Con el presente trabajo, se hacen aportaciones tanto desde el punto de vista matemático como tecnológico (Ingeniería Eléctrica). Veamos, a continuación, un resumen de las más importantes.

APORTACIONES A LA INGENIERÍA ELÉCTRICA:

- **Construcción de la térmica equivalente.** Se trata de un problema clásico, (véase, por ejemplo, la referencia [34] que citamos del prestigioso investigador El-Hawary) al que hemos dado un nuevo impulso. En primer lugar, con un replanteamiento del problema en el que no aparecen explícitamente las pérdidas por transmisión, se ha logrado una gran simplificación del problema resultante (hay que remarcar que, por supuesto, sí se consideran las pérdidas en el planteamiento inicial, lo que se consigue es que no aparezcan formalmente). En segundo lugar, se fundamenta teóricamente la térmica equivalente para modelos generales y se estudia de forma muy detallada el caso particular de funciones de costo polinómicas de segundo grado con la natural restricción de no negatividad. Sin duda, el aspecto más novedoso es su carácter polinómico de segundo grado “a trozos”, aspecto que hasta ahora había pasado desapercibido y que hacía que el trabajo de El-Hawary fuera incompleto.

- **Aplicabilidad a las Centrales de Bombeo.** Estas centrales han sido, hasta hace algunos años, las grandes olvidadas en los estudios de Coordinación Hidrotérmica. Tras exhaustiva búsqueda bibliográfica nos hemos encontrado con estudios que, con ciertas simplificaciones en el modelo, sí las asumen; sin embargo, nuestro estudio es más profundo y, sobretodo, más general. El Capítulo 3 (dedicado al problema sin restricciones),

es el marco matemático ideal para abordarlas de un modo general, sin simplificaciones, ni modelos excesivamente particulares. En el Capítulo 6, se presentan diversos modelos hidráulicos y se comparan, considerando la posibilidad de bombeo y sin ella.

- **Riguroso tratamiento de los problemas con restricciones.** Las restricciones de desigualdad para las potencias, volúmenes y caudales han sido tratadas hasta ahora usando herramientas como las funciones de penalización o los multiplicadores de Kuhn-Tucker, entre otras. Las funciones de penalización presentan problemas en la convergencia de la sucesión generada y los multiplicadores K-T se han usado de manera poco rigurosa, especialmente cuando la dimensión del problema conlleva la existencia de múltiples restricciones. A lo largo de todo el Capítulo 4, afrontamos de forma decisiva este problema y, mediante los correspondientes teoremas (destacando el que hemos denominado Teorema Fundamental de Coordinación 4.5.7), se sientan las bases para poder aplicar con garantías el Algoritmo II de la Sección 4.6 y obtener la solución del problema con restricciones.

- **Aplicabilidad a modelos muy generales.** Llevamos varios años estudiando el Problema de la Coordinación Hidrotérmica y cambiar de un modelo a otro siempre ha generado numerosos problemas. Si el modelo era lineal, podíamos utilizar ciertos métodos que quedaban invalidados al pasar a modelos no lineales; los de tipo cuadrático tienen unas características que se pierden en los exponenciales y, así, un largo número de inconvenientes. Con el tratamiento generalista que hemos llevado a cabo, prácticamente cualquier modelo de central térmica, de potencia demandada o de central hidráulica es válido; basta con que se satisfagan las hipótesis que se imponen en cada sección, las cuales están analizadas desde el punto de vista de la Ingeniería Eléctrica, para así mostrar su concordancia con la realidad. En el capítulo 6, se deja patente, con los modelos y ejemplos que se analizan, la extraordinaria versatilidad del estudio realizado y de la potencia del método de resolución que hemos propuesto.

APORTACIONES MATEMÁTICAS:

Con este trabajo, se incorpora a la Matemática Aplicada un problema de optimización de recursos que, hasta la fecha, no parece haber suscitado el interés que, a nuestro juicio, se merece. Se trata de un problema variacional que presenta unas especificidades que nos han permitido obtener resultados ciertamente interesantes no siempre válidos en contextos más generales. Por otra parte, a pesar de que en todo momento nos ha guiado el interés de resolver problemas variacionales inspirados en el problema hidrotérmico clásico, ello no ha sido óbice para obtener resultados que van más allá de este contexto y cuya importancia detallaré más adelante. Otro aspecto destacable del presente trabajo, que lo hace más meritorio, es el hecho de haber logrado utilizar exclusivamente herramientas matemáticas clásicas, que lo convierten en asequible a lectores no especialistas.

- **Capítulo II.** Este capítulo es imprescindible para formular el problema hidrotérmico clásico desprovisto de conceptos superfluos y de ligaduras innecesarias. Asimismo, hay que destacar el estudio detallado que se ha hecho de la “térmica equivalente” para el caso particular de funciones de costo polinómicas de segundo grado, con restricciones adicionales

de no negatividad. El resultado del estudio ha permitido concluir que la equivalente minimizadora es de clase C^1 y polinómica de segundo grado a trozos.

- **Capítulo III.** En este capítulo, se han establecido notables resultados de existencia y unicidad de extremales así como de existencia y unicidad de solución para ecuaciones diferenciales de segundo orden con condiciones de contorno, que provienen de la Ecuación de Euler asociada a un problema variacional. En este sentido, hay que señalar que un teorema tradicionalmente ligado a este tipo de cuestiones, como es el de Bernstein, se ha revelado insuficiente sin más que tener en cuenta, por ejemplo, los problemas en los que la función H es independiente de z . Existen otros teoremas que tratan estas cuestiones pero ninguno ha resultado eficaz. Es destacable, asimismo, la gran diferencia existente entre dichos teoremas, que manejan hipótesis que hacen referencia a la ecuación diferencial, y los nuestros que utilizan hipótesis que se refieren al funcional. La clave para las demostraciones de la mayor parte de los teoremas ha estado en la que hemos denominado segunda ecuación de coordinación.

- **Capítulo IV.** Aquí es donde hemos hecho, sin duda, las contribuciones matemáticas más notables. Así, el teorema de “ausencia de puntos angulares” constituye una mejora sustancial al resultado clásico que establece que las soluciones de la ecuación de Euler no puede presentar puntos angulares si $L_{z'z'}$ no se anula. Nuestro teorema establece que el extremo (mínimo) carece de puntos angulares siempre que se dé el carácter estrictamente creciente de $L_{z'}$ con respecto a z' , lo cual es más relajado que la hipótesis clásica, si tenemos en cuenta que, con la nuestra, se admite la posibilidad de que, en algún punto, $L_{z'z'}$ se anule. Además, nuestro teorema es válido tanto si se consideran restricciones adicionales como si no.

El resultado, a nuestro juicio, más importante es el que hemos denominado “Teorema Fundamental de Coordinación” con el que se resuelven de modo extraordinariamente sencillo problemas variacionales con restricciones de desigualdad no holónomas. Efectivamente, con el mencionado teorema se logra resolver los problemas variacionales con restricciones de un modo conceptualmente semejante a como se hace cuando carecen de ellas. Para estos problemas tradicionalmente se recurre a técnicas, como la formulación equivalente de Caratheodory, que si bien es interesante desde el punto de vista teórico, su utilidad práctica en nuestro problema es dudosa.

- **Capítulo V.** Constituye un primer paso ante un problema extremadamente complejo como es todo problema variacional multidimensional y, en definitiva, la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden con condiciones de contorno. Hemos establecido un teorema constructivo de existencia de solución, inspirado en el método del descenso coordinado cíclico, utilizando unas hipótesis cuya asunción es natural en muchos casos, aunque dista de resolver el problema de modo definitivo. Así y todo, desde el punto de vista práctico, el algoritmo propuesto y su implementación en Mathematica se ha revelado sumamente eficaz a la hora de resolver de modo aproximado (también exacto) una amplia clase de problemas.

6.2. PERSPECTIVAS DE FUTURO

Mostramos, a continuación, los problemas que solo hemos resuelto parcialmente y planteamos otros, que no se han abordado en este trabajo, pero que son, sin duda, la continuación natural del proyecto generalizador que hemos iniciado.

i) Caracterización de los funcionales convexos. Los problemas cuyo funcional asociado es convexo son los más tratables por ser condición necesaria y suficiente de mínimo la anulación de la diferencial de Gâteaux (verificación de la ecuación de Euler). Vimos que la concavidad de la función de generación hidráulica efectiva $H(t, z, z')$ respecto de (z, z') era condición suficiente para que el funcional fuera convexo. En el caso particular de que $H(t, z, z')$ no depende de z , el funcional es convexo; esto nos permite conjeturar que, cuando la dependencia de H respecto de z sea “pequeña”, el funcional podrá ser igualmente convexo. Así pues, parece interesante investigar cuándo y en qué sentido, esta dependencia será pequeña hasta el punto de que el funcional pueda ser convexo.

ii) Caracterización de los funcionales con aplicaciones de tiro crecientes. Hemos estudiado algunos casos en los que las aplicaciones de tiro son estrictamente crecientes. No hemos logrado, sin embargo, demostrarlo en otros casos donde tenemos evidencias empíricas o el íntimo convencimiento de que lo son. Será, por tanto, sumamente interesante caracterizar los funcionales cuyas aplicaciones de tiro son estrictamente crecientes.

iii) Problemas con Ψ no convexa. La convexidad de la función de costo Ψ se ha supuesto en la presente memoria por las razones que se comentaron en su momento. No obstante, el problema tendría perfecto sentido e interés si Ψ no fuera convexo. En este caso, la solución al problema requerirá, sin lugar a dudas, un tratamiento totalmente diferente.

iv) Problemas con $H_{z'z'} > 0$. Idéntico interés y tratamiento que el caso anterior.

v) Problemas con exceso de agua disponible. Cuando existe una función $\omega(t)$ tal que $H(t, \omega(t), \omega'(t)) = P_d(t)$ o, lo que es lo mismo, cuando la central hidráulica es capaz de asumir toda la demanda con un consumo de agua $\ell = \omega(T)$, ya observamos que, bajo ciertas condiciones, para todo volumen disponible menor que ℓ , el problema tiene solución. Puede suceder, no obstante, que con determinado reparto del agua se logre consumir una cantidad mayor que ℓ y el problema tenga solución para volúmenes disponibles mayores que ℓ .

vi) Estudio de la condición de influencia débil del volumen. Estamos convencidos de que la definición que se dio de *influencia débil* del volumen puede mejorarse y, con ello, mejorar también todos los teoremas en donde ésta interviene.

vii) Profundización en el problema H_n-T_1 . El problema hidrotérmico con varias centrales hidráulicas requiere una profundización que no hemos realizado en este trabajo. Una cuestión interesante es, sin duda, el estudio de los funcionales que hemos denominado pseudo-convexos; sospechamos que este concepto va a estar íntimamente relacionado, nuevamente, con la influencia del volumen en la función de generación hidráulica efectiva.

viii) Problemas con retraso en el transporte. Cuando el acoplamiento hidráulico entre centrales se considera con retraso en el transporte, se plantean problemas que no hemos abordado en este trabajo que, naturalmente, son de interés y que trataremos de estudiar en un futuro.

ix) Estudio numérico de los algoritmos. Los algoritmos que hemos propuesto tienen su justificación en teoremas constructivos de existencia de solución y su importancia es independiente de la implementación concreta que se haga de los mismos. Ahora bien, en el momento de su utilización, con el fin de lograr soluciones aproximadas, se suscitan cuestiones numéricas en las que no hemos entrado y que, naturalmente, presentan un indudable interés.

Capítulo 7

BIBLIOGRAFÍA

- [1] **Allan, R. N. ; Li, R. ; Elkateb, M. M.**
Modelling of pumped-storage generation in sequential Monte-Carlo production simulation.
IEEE Proceedings-Gener., Trans. and Distr., Vol. 145, nº 5, pp. 611-615, Sep. 1998.
- [2] **Allan, R. N. ; Li, R. ; Zheng, M.**
Reliability and economic assessment of pumped-storage in generation systems using sequential Monte-Carlo simulation.
Proceedings of Int. Power Eng. Conf. Singapore, Vol. 1, pp. 240-245, May 1997.
- [3] **Barquín J. ; Centeno, E. ; Malillos, E.**
Medium-term hydro operation in a competitive electricity market.
IEEE Power Tech'99 Conference, Budapest, 1999.
- [4] **Bayón, L. F. ; Suárez, P. M.**
Minimización de las emisiones contaminantes en un sistema hidrotérmico.
Actas del Congreso Internacional de Ingeniería de Proyectos, Oviedo, 1994.
- [5] **Bayón, L. F. ; Suárez, P. M. ; Otero, J. A. ; Dugnol, B.**
Optimización del coste de combustible en un sistema hidrotérmico.
Approximation and Optimization, Vol. 8, pp. 631-650, Frankfurt, 1995.
- [6] **Bayón, L. F.**
Optimización combinada de sistemas hidrotérmicos mediante métodos aproximados.
Cuaderno de Investigación nº 31, Universidad de Oviedo, 1998.
- [7] **Bayón, L. F. ; Suárez, P. M. ; Otero, J. A. ; Grau, J. M. ; Ruiz, M. M.**
Uso del cálculo variacional y el método de Han-Powel para la resolución de la coordinación hidrotérmica y el óptimo flujo de carga en un sistema hidrotérmico.
Proceedings IEEE - ANDESCON'99, Vol. 1, pp. 268-291, Venezuela, 1999.
- [8] **Bayón, L. F. ; Suárez, P. M. ; Otero, J. A. ; Grau, J. M. ; Ruiz, M. M.**
A new tool for control and diagnostic of electrical network.
Record of IEEE SDEMPED'99, Vol. 1, pp. 323-328, 1999.

- [9] **Bayón, L. F. ; Suárez, P. M. ; Otero, J. A. ; Grau, J. M. ; Ruiz, M. M.**
Optimización del coste de combustible en un sistema hidrotérmico, mediante el método de Ritz.
Información Tecnológica, Vol. 9, nº 5, pp. 213-220, Chile, 1998.
- [10] **Bayón, L. F. ; Suárez, P. M. ; Otero, J. A. ; Grau, J. M. ; Ruiz, M. M.**
Modelos y métodos matemáticos en optimización hidrotérmica.
Servicio de Publicaciones, Universidad de Oviedo, 1999.
- [11] **Bhatnagar, R. ; Rahman S.**
Dispatch of direct load control for fuel cost minimization.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. PWRS-1, nº 4, pp. 96-102, Nov. 1986.
- [12] **Borre, V. L. ; Kapoor, S. G.**
Application of a two-step optimization technique to an economic dispatch problem in a hydro-thermal-purchased power network.
Eng. Optim., Vol. 7, nº 2, pp. 91 - 103, 1984.
- [13] **Branlund, H. ; Sjelvgren, D. ; Andersson, N.**
Optimal short term operation planning of a large hydrothermal power system based on a nonlinear network flow concept.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. PWRS-1, nº 4, pp. 75-81, Nov. 1986.
- [14] **Brezis, H.**
Análisis funcional: teoría y aplicaciones.
Ed. Alianza, Madrid, 1984.
- [15] **Briozzo, A. C. ; Natale, M. F. ; Tarzia, D. A.**
Determination of unknown thermal coefficients through a free boundary problem for a nonlinear heat conduction equation with a convective term.
Int. Comm. in Heat and Mass Transfer, Vol. 24, nº 6, pp. 857-68, Oct. 1997.
- [16] **Burchett, R. C. ; Happ, H. H. ; Vierath, D. R. ; Wirgau, K. A.**
Developments in optimal power flow.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. PAS-101, nº 2, pp. 406-414, Feb. 1982.
- [17] **Calvo, M. ; Carnicer, J. M.**
Ecuaciones diferenciales.
Servicio de Publicaciones, Universidad de Zaragoza, 1994.
- [18] **Carneiro, A. ; Bond, P.**
A large scale application of an optimal deterministic hydrothermal scheduling algorithm.
IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 5, nº 3, pp. 823-830, Feb. 1990.
- [19] **Carneiro, A. A. F. M. ; Leite, P. T. ; Silva Filho, D.**
Generic algorithm applied to hydrothermal system scheduling.
Proceedings IEEE-POWERCON'98 1998 Inter. Confe. on Power System Tech. Vol. 1, pp. 547-551, New York, 1998.

- [20] **Carneiro, A. A. F. M. ; Leite, P. T.**
A generic algorithm approach to optimize the operation planning of hydrothermal system scheduling.
Proceedings 5th Brazilian Symp. on Neural Networks. IEEE Comput. Soc. pp. 253-258, 1998.
- [21] **Carpentier, J.**
Contribution a l'étude du dispatching économique.
Bull. Soc. Fr. Elec., Ser. 8, Vol. 3, pp. 433-447, Aug. 1962.
- [22] **Carvalho, M. F. ; Soares, S.**
An efficient hydrothermal scheduling algorithm.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. PWRS-2, n° 3, pp. 537-542, Aug. 1987.
- [23] **Christensen, G. S. ; Soliman, S. A.**
On the application of functional analysis to the optimization of the production of hydroelectric power.
IEEE Trans. Power Systems, Vol. PWRS-2, n° 4, pp. 841-847, Nov. 1987.
- [24] **Ciarlet, P.**
Introduction a l'analyse numérique matricielle et a l'optimisation.
Ed. Masson, París, 1990.
- [25] **Contaxis, G. C. ; Kavatza, S. D.**
Hydrothermal scheduling of a multireservoir power system with stochastic inflows.
IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 5, n° 3, pp. 766-773, Aug. 1990.
- [26] **Demartini, G. ; De Simone, T. R. ; Granelli, G. ; Montagna, M.; Robo, K.**
Dual programming methods for large-scale thermal generation scheduling.
IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 13, n° 3, pp. 857-863, Aug., 1998.
- [27] **Diekmann, O.** y otros.
Delay Equations: Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis.
Ed. Springer-Verlang, New York, 1995.
- [28] **Driver, R. D.**
Ordinary and delay differential equations.
Ed. Springer, New York, 1977.
- [29] **Eguíluz L.I.** y otros
Detection and classification of conducted disturbances in power systems using artificial intelligence.
Proceedings IEEE-ANDESCON'99, Vol 1, pp. 498-503, Venezuela, 1999.
- [30] **Eguíluz L.I.** y otros
Compensation for non-linear loads supplied by polyphase, non-sinusoidal, unbalanced voltages.
Proceedings IEEE-ANDESCON'99, Vol 1, pp. 529-534, Venezuela, 1999.

- [31] **El-Hawary, M. E. ; Christensen, G. S.**
Application of functional analysis to optimization of electric power systems.
Int. J. Control, Vol. 16, n° 6, pp. 1063-1072, 1972.
- [32] **El-Hawary, M. E. ; Christensen, G. S.**
Functional optimization of common-flow hydro-thermal systems.
IEEE Trans. on Power Systems, Vol. PAS. 91 n° 5, pp. 1833-1839, 1972.
- [33] **El-Hawary, M. E. ; Christensen, G. S.**
Optimal operation of multi-chain hydro-thermal power systems.
Can. Elec. Eng. J., Vol. 1, n° 2, pp. 52-62, 1976.
- [34] **El-Hawary, M. E. ; Christensen, G. S.**
Optimal economic operation of electric power systems.
Ed. Academic Press, 1979.
- [35] **El-Hawary, M. E. ; Mbamalu A. N.**
Modeling the incremental cost and water conversion functions for hydro-thermal coordination studies.
Elec. Mach. and Power Systems, Vol. 19, pp. 271-285, 1991.
- [36] **El-Hawary, M. E. ; Ravindranath, K. M.**
Optimal operation of variable head hydro-thermal systems using the Glimn-Kirchmayer model and the Newton-Raphson method.
Electric Power Systems Research, Vol. 14, pp. 11-22, 1988.
- [37] **El-Hawary, M. E. ; Ravindranath, K. M.**
Effects of hydro models on optimal operation of variable head hydro-thermal systems.
Can. J. Elect. & Comp. Eng., Vol. 13, n° 3-4, pp. 112-119, 1988.
- [38] **El-Hawary, M. E. ; Ravindranath, K. M.**
Combining loss and cost objectives in daily hydro-thermal economic scheduling.
IEEE Trans. Power Systems, Vol. 6, n° 3, pp. 1106-1112, Aug. 1991.
- [39] **El-Hawary, M. E. ; Ravindranath, K. M.**
Hydro-thermal power flow scheduling accounting for head variations.
IEEE Trans. Power Systems, Vol. 7, n° 3, pp. 1232-1238, Aug. 1992.
- [40] **El-Hawary, M. E. ; Kummur, M.**
Optimal parameter estimation for hydro-plant performance models in economic operation studies.
IEEE Trans. Power Systems, Vol. PWRS-1, n° 4, pp. 126-131, Nov. 1986.
- [41] **Elsgoltz, L.**
Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional.
Ed. MIR, Moscú, 1977.
- [42] **Ernan, X. ; Guan, X. ; Li, R. ; Jiaotong X.**
Scheduling hydrothermal power systems with cascaded and head-dependent reservoirs.
IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 14, pp. 1127-1132, 1999.

- [43] **Fabra, J.**
Ante el mercado de la electricidad.
Economistas, n° 77, pp. 72-78, 1998.
- [44] **Faure, P.**
Analyse numerique: notes d'optimisation.
École Polytechnique, París, 1988.
- [45] **Fox, C.**
An introduction to the calculus of variations.
Ed. Dover Publications, New York, 1987.
- [46] **Galeev, E. ; Tijomirov, V.**
Breve curso de la teoría de problemas extremales.
Ed. MIR, Moscú, 1991.
- [47] **Gavurin, M. K.**
Conferencias sobre los métodos de los cálculos.
Ed. MIR, Moscú, 1973.
- [48] **Garzillo, A ; Innorta, M. ; Cazzol M. V. ; Ricci, M.**
New prospects offered by interior point method for the hydro-thermal scheduling.
Energia Electrica, Vol. 75 n° 4 , pp. 216-224, 1998.
- [49] **Gelfan I. M. ; Fomin S. V.**
Calculus of variation.
Prentice-Hall, New Jersey, 1963.
- [50] **George, E. E. ; Page, H. W. ; Ward, J. W.**
Coordination of fuel cost and transmission loss by use of the network analyzer to determine plant loading schedules.
AIEE Trans., Vol. 68, Part II, pp. 1152-1160, 1949.
- [51] **Giaquinta, M. ; Hildebrandt, S.**
Calculus of variations (I-II).
Ed. Springer-Verlag, Berlín, 1996.
- [52] **Glowinski, R.** y otros.
Numerical analysis of variational inequalities.
Ed. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [53] **Glimm, A. F. ; Kirchmayer, L. K.**
Economic operation of variable head plants.
AIEE-Trans. Vol. 77, Part III, pp. 1070-1079, 1958.
- [54] **Gorenstin, B. ; Gorenstin, M. ; Pereira, M.**
Stochastic optimization of a hydrothermal system including network constraints.
IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 7, n° 2, pp. 1107-1113, May 1992.
- [55] **Habibollahzadeh, H. ; Bubenko, J. A.**
Application of decomposition techniques to short-term operation planning of hydrothermal power system.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. PWRS-1, n° 1, pp. 41-46, Feb. 1986.

- [56] **Hannett, L. N.** y otros.
Modeling of a pumped storage hydro plant for power system stability studies.
Proceedings of Int. Conf. on Power System Tech., Vol. 2, pp. 1300-4, New York, 1998.
- [57] **Hongwei, Z. ; Yuzhao, F. ; Xiaoqing, Z. ; Zhen, R.**
Hydro-thermal unit commitment considering pumped storage stations.
Proceedings of Int. Conf. on Power System Tech., Vol. 1, pp. 576-580, New York, 1998.
- [58] **Ibrahim, E. S.**
Dynamic hydro-thermal economic dispatch with water availability constraints and variable water head.
Computers & Electrical Engineering, Vol. 23, n° 1, pp. 15-23, Jan. 1997.
- [59] **Jingyan, Y. ; Zhikui, F. ; Ke, Z.**
A practical evaluation method of fault reserve benefits for pumped-storage power plants.
Power System Technology, Vol. 23, n° 1, pp. 70-73, Jan. 1999.
- [60] **Kantorovich, L. V. ; Krylov, V. I.**
Approximate methods of higher analysis.
P. Noordhoff, Holanda, 1964.
- [61] **Kartashov A. P. ; Rozhdenstvenski, M.**
Ecuaciones diferenciales ordinarias y fundamentos del cálculo variacional.
Ed. Reverté, Barcelona, 1980.
- [62] **King, T. D. ; El-Hawary, M. E. ; El-Hawary, F.**
Optimal environmental dispatching of electric power systems via an improved Hopfield neural network model.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. 10, n° 3, pp. 1559-1565, Aug. 1995.
- [63] **Kirchmayer, L. K. ; Stagg, G. W.**
Analysis of total and incremental losses in transmission systems.
AIEE Trans., Vol. 70, Part II, pp. 1197-1205, 1951.
- [64] **Kirchmayer, L. K.**
Economic operation of power systems.
Ed. Wiley, USA, 1958.
- [65] **Kolmogorov, A. N. ; Fomin, S. V.**
Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.
Ed. MIR, Moscú, 1978.
- [66] **Krasnov, M. L ; Makarelov, G. I ; Kiseliov, A. I.**
Cálculo variacional.
Ed. MIR, Moscú, 1976.
- [67] **Lee, B. Y. ; Park Y. M. ; Lee, K. Y.**
Optimal generation planning for a thermal system with pumped-storage based on analytical production costing model.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. PWRS-2, n° 2, pp. 486-493, May 1987.

- [68] **Luenberger, D.**
Programación lineal y no lineal.
Ed. Addison-Wesley, Wilmington, 1989.
- [69] **Lumb, D. ; Hawkins, N. T.**
Provision of power reserve from pumped storage hydro plant.
IEE Colloquium E.P.F.R.P.R.S., pp. 1-4, London, Feb. 1998.
- [70] **Marcellán, F. ; Casasús, L. ; Zarzo, A.**
Ecuaciones diferenciales.
Ed. McGraw-Hill, Madrid, 1990.
- [71] **Mbamalu, G. A. N. ; El-Hawary, M. E.**
Hydro-thermal power system loss minimization: a probabilistic perturbation approach.
Electric Machines and Power Systems, Vol. 24, nº 7, pp. 745-756, Oct. 1996.
- [72] **Mbamalu, G. A. N. ; El-Hawary, M. E. ; El-Hawary, F.**
Minimum emissions hydro-thermal power flow.
Electric Machines and Power Systems, Vol. 24, nº 8, pp. 833-845, Dec. 1996.
- [73] **Midttun, A.**
European electricity systems in transition.
Ed. Elsevier, Oxford, 1997.
- [74] **Mikhlin, S. G.**
The numerical performance of variational methods.
Ed. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1971.
- [75] **Mostafa, M. A.** y otros.
Steady-state load shedding schemes: a performance comparison.
Electric Power Systems Research, Vol. 38, nº 2, pp. 105-112, Aug. 1996.
- [76] **Mostafa, M. A.** y otros.
Performance evaluation of two optimal load shedding policies in electric power systems.
Electric Machines and Power Systems, Vol. 25, nº 2, pp. 199-213, March. 1997.
- [77] **Ohnishi, I. ; Imai, H.**
Modified hele-shaw moving boundary problem related to some phase transition phenomena.
Bulletin of Univ. of Electro-Communications, Vol. 11, nº 1, pp. 17-28, Tokyo, June 1998.
- [78] **Otero, J. A.**
Modelos y métodos matemáticos en un problema de coordinación hidrotérmica.
Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo, 1999.
- [79] **Pérez Donsión, M.** y otros
Explotación Óptima de Sistemas Hidrotérmicos Mediante Técnicas de Evolución Simulada.
IEEE-ANDESCON99 Proceedings. Vol I pp. 292-297 . Venezuela. 1999.
- [80] **Puntel, W. R.** y otros.
A probabilistic approach for the development of operating strategies for pumped-storage power plants.
Proceedings of Int. Conf. on Power System Tech., Vol. 2, pp. 900-904, New York, 1998.

- [81] **Ramos, A. ; Muñoz, L. ; Martínez, F. ; Martín, V.**
A medium term bulk production cost model based on decomposition techniques.
Int. Symposium on Elect. Power Eng., Vol. 5, pp. 110-116, New York, 1995.
- [82] **Ricard, J.**
The determination of optimum operating schedules for interconnected hydro and thermal stations.
Rev. Gen. Elec. pp. 167, France, 1940.
- [83] **Río, J.**
Optimización de la gestión de sistemas hidrotérmicos de energía eléctrica. Algoritmo del poliedro flexible con funciones de penalización.
Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo, 1998.
- [84] **Río, J.** y otros
Solución multiobjetivo del problema hidrotérmico en el nuevo mercado español de la electricidad.
CEPADE, Universidad Politécnica de Madrid, pp. 11, Madrid, 2000.
- [85] **Río, J.** y otros
La coordinación hidrotérmica en el nuevo mercado eléctrico español. Empleo del algoritmo del poliedro flexible con funciones de penalización.
Revista de Información Tecnológica, CIT. Chile (aceptado pendiente de publicación)
- [86] **Río, J.** y otros
Optimización económica de los sistemas de generación hidrotérmica mediante programación entera.
8-th International Conference on Present-Day Problems of power Engineering, Gdansk (Polonia), 1997.
- [87] **Ruzic, S. Rajacovik, N ; Vuckovic, A.**
Operational cost modeling improvement in short term hydrothermal coordination.
Proceedings IEEE-MELECON'98, Vol. 2, pp. 916-920, New York, 1998.
- [88] **Soliman, S. A. ; Christensen, G. S.**
New algorithm for optimal parameter estimation with linear constraints.
Journal of optimization theory and applications, Vol. 66, n° 3, pp. 503-513, Sept. 1990.
- [89] **Soliman, S. A. ; Christensen, G. S. ; Rouhi, A. H.**
Power system state estimation with equality constraints.
Electric Machines & Power Systems, Vol. 20, pp. 183-202, 1992.
- [90] **Stevenson, W. D.**
Análisis de sistemas eléctricos de potencia.
Ed. McGraw-Hill, 1982.
- [91] **Suárez, P. M.**
Optimización del coste de combustible en un sistema hidrotérmico mediante técnicas del análisis funcional.
Cuaderno de investigación n° 11, Depto. Matemáticas, Univ. Oviedo, 1989.

- [92] **Surrey, J.**
The british electricity experiment.
Ed. Earthscan, London, 1996.
- [93] **Talaq, J. H. ; El-Hawary, F. ; El-Hawary, M. E.**
Minimum emissions power flow.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. 9, n° 1, pp. 429-435, Feb. 1994.
- [94] **Talaq, J. H. ; El-Hawary, F. ; El-Hawary, M. E.**
A summary of environmental economic dispatch algorithms.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. 9, n° 3, pp. 1508-1516, Aug. 1994.
- [95] **Talaq, J. H. ; El-Hawary, F. ; El-Hawary, M. E.**
Minimum emissions power flow using Newton's method and its variants.
Electric Power Systems Research, Vol. 39, n° 3, pp. 233-239, Dec. 1996.
- [96] **Troutman J. L.**
Variational calculus with elementary convexity.
Ed. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [97] **Tufegdizic, N. ; Hyslop, P.**
An optimal real-time short term operation of independent hydro generator company in the open electricity market.
Electric Power Systems Research, Vol. 41, n° 1, pp. 5-11, April 1997.
- [98] **Vázquez, C. ; Rivier, M. ; Pérez, J. I.**
Revisión de los modelos de casación de ofertas del mercado eléctrico.
6ª Jornadas Hispano-Lusas de Ingeniería Eléctrica, Lisboa, 1999.
- [99] **Wang, C. ; Shahidehpour, S.**
Power generation scheduling for multi-area hydrothermal systems with tie line constraints, cascaded reservoirs and uncertain data.
IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 8, n° 3, pp. 1090-1097, Aug. 1993.
- [100] **Wang, C. ; Shahidehpour, S. ; Nian-De X.**
Power systems marginal cost curve and its applications.
IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 10, n° 3, pp. 1112-1121, Aug. 1995.
- [101] **Wood, W. G.**
Spinning reserve constrained static and dynamic economic dispatch.
IEEE Trans., Vol. PAS-101, n° 2, pp. 381-388, Feb. 1982.
- [102] **Ying, X. ; Yonghua, Y. ; Jianbo, G.**
Short-term scheduling of pumped-storage plant using multiobjective fuzzy dynamic programming.
Power System Technology, Vol. 21, n° 10, pp. 15-18, Oct. 1997.
- [103] **Young, L. C.**
Calculus of variations and optimal control theory.
Ed. Chelsea Publishing Company, New York, 1980.