

# MODELOS Y METODOS MATEMATICOS EN UN PROBLEMA DE COORDINACION HIDROTERMICA

## 1 Introducción

En esta tesis resolvemos un problema de coordinación hidrotérmica en un modelo multinodal de red eléctrica, incorporando restricciones de desigualdad en las potencias generadas y estudiando con detalle las pérdidas de transmisión producidas en las líneas.

El problema se aborda en dos etapas que representamos en el esquema siguiente:

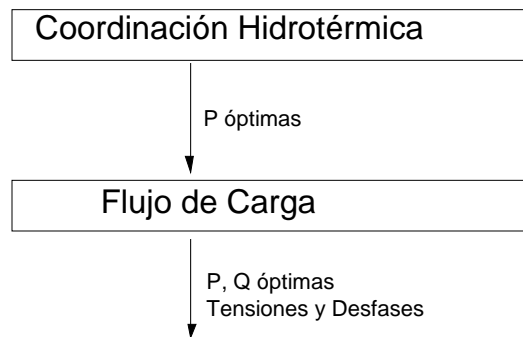


Fig. 1 Esquema general.

Tras revisar los fundamentos matemáticos que utilizaremos en este capítulo, probaremos con el correspondiente teorema la existencia de solución, para a continuación proceder a su localización. Para ello, en primer lugar, se incorporan las restricciones de desigualdad al funcional a través de una función de penalización.

El problema variacional resultante tendrá su tratamiento adecuado por medio de la ecuación de Euler y la teoría de los sistemas discretos con condiciones de contorno. Para asegurar la unicidad de solución el proceso es como sigue:

- Se calculan los puntos críticos que verifican la ecuación de Euler.
- Necesariamente los puntos óptimos han de ser críticos.
- Asegurado un único punto crítico, este se confirmará como el óptimo.

La introducción de las funciones de penalización plantea, al aplicar el ya conocido algoritmo del punto fijo modificado, problemas de convergencia tanto porque cambian las expresiones de los multiplicadores como por el hecho de tener que dar al parámetro de penalización valores altos.

Esto unido a que posteriormente se tratará la optimización combinada y que, en este problema, tampoco se han encontrado valores de  $V$  (punto 3.6) que proporcionen buenos resultados nos lleva a introducir como algoritmo de resolución de los sistemas de ecuaciones no lineales un método cuasi-Newton. Hemos elegido el ya conocido método LSB.

Posteriormente, apoyados en este estudio, se analiza la influencia de las pérdidas de potencia a lo largo de la red en el problema. Plantearemos así la optimización del flujo de carga que resolvemos a través del método de Han-Powell. Con los resultados obtenidos recalculamos los coeficientes de pérdidas e introducimos estos datos de nuevo en el problema inicial. La optimización se realiza instante a instante.

Por último, trabajaremos con un funcional de costo que considere diversos objetivos a minimizar: costo de combustible, costo de las emisiones contaminantes y las pérdidas de transmisión de potencia activa, es decir, un problema de optimización combinada.

Como vemos las principales novedades de esta tesis consisten en que se tienen en cuenta las restricciones de desigualdad, se considera el modelo multinodal de red eléctrica, se aborda el problema del óptimo flujo de carga y en que se formaliza el problema con un lenguaje más riguroso que el usual en la bibliografía del tema, lo cual nos conducirá al estudio de un teorema de existencia y unicidad de solución.

## 2 Fundamentos matemáticos

A continuación veremos los fundamentos matemáticos que utilizaremos en esta tesis en la resolución del problema, y que no hayan sido desarrollados con anterioridad. Así, por ejemplo, se utilizan también en este desarrollo el teorema del punto fijo, y el método LSB, ya introducidos en tesis anteriores, y que por tanto no resumimos aquí.

### 2.1 Cálculo variacional: Ecuación de Euler

Se llaman funcionales a las magnitudes variables cuyos valores se determinan mediante la elección de una o de varias funciones:

$$v: \begin{array}{l} C[f] \longrightarrow R \\ y(x) \longrightarrow v[y(x)] \end{array}$$

siendo  $C[f]$  una cierta clase de funciones.

Los problemas en que se exige investigar el máximo o el mínimo de un funcional, se denominan problemas variacionales.

Se llama incremento o variación  $\delta y$  del argumento  $y(x)$  de la funcional  $v[y(x)]$  a la diferencia entre dos funciones  $\delta y = y(x) - y_1(x)$ . Aquí se supone que  $y(x)$  varía arbitrariamente en cierta clase de funciones.

El funcional  $v[y(x)]$  se dice continuo, si a una pequeña variación de  $y(x)$  le corresponde una pequeña variación de éste.

Se llama funcional lineal al funcional  $L[y(x)]$  que satisface las siguientes condiciones:

- i)  $L[cy(x)] = cL[y(x)]$ , siendo  $c$  una constante arbitraria, y
- ii)  $L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$

Si el incremento del funcional  $\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)]$  puede representarse en la forma:

$$\Delta v = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y) \max |\delta y|$$

donde  $L[y(x), \delta y]$  es un funcional lineal con respecto a  $\delta y$  y  $\beta(y(x), \delta y) \rightarrow 0$  cuando  $\max |\delta y| \rightarrow 0$ , entonces la parte del incremento lineal con respecto a  $\delta y$ , es decir,  $L[y(x), \delta y]$ , se llama variación del funcional y se designa por  $\delta v$ . De este modo, la variación del funcional es la parte principal del incremento lineal con respecto a  $\delta y$ .

Se verifica el siguiente teorema [32]:

*Teorema 1.* Si el funcional  $v[y(x)]$ , que posee variación, alcanza su máximo o su mínimo para  $y = y_0(x)$ , siendo  $y_0(x)$  un punto interior de la región de definición del funcional, entonces para  $y = y_0(x)$  será  $\delta v = 0$ .

Analizamos el extremo del funcional:

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$$

si los puntos frontera de las curvas admisibles están fijos:  $y(x_0) = y_0$  e  $y(x_1) = y_1$ . La función  $F(x, y, y')$  se considerará derivable tres veces.

Se cumple [32]:

*Teorema 2.* Los extremos del funcional:

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$$

se encuentran entre las curvas integrales de la ecuación:

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$$

o bien en forma desarrollada:

$$F'_y - F''_{y'x} - F''_{y'y'} y' - F''_{y'y'} y'' = 0$$

Esta ecuación se denomina ecuación de Euler. Las curvas integrales de la ecuación de Euler  $y = y(x, C_1, C_2)$  se llaman extremales y sólo en ellas se puede alcanzar un extremo del funcional  $v$  de trabajo:

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

Sólo entre aquellas que satisfacen las condiciones de frontera  $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$  se podrá obtener un extremo.

Recordemos que el problema de frontera:

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

no siempre tiene solución, y, si existe, puede no ser única. Algunas veces la unicidad se deduce de la naturaleza física o geométrica del problema.

Se llaman problemas variacionales sobre un extremo condicionado a los problemas en los que se pide hallar el extremo de un funcional  $v$ , y a las funciones de las cuales depende el funcional  $v$  se les imponen ciertos enlaces o restricciones. Por ejemplo, se pide investigar el extremo del funcional:

$$v[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$$

bajo las condiciones:

$$\phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad m < n).$$

Recordemos cómo se resuelve un problema análogo al estudiar el extremo de la función  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  con los enlaces:

$$\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad m < n)$$

El método consiste en formar la nueva función auxiliar:

$$z^* = f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi_i$$

donde  $\lambda_i$  son ciertos factores constantes; después, se estudia el extremo incondicional de la función  $z^*$ , es decir, se escribe el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial z^*}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

completado con las ecuaciones de los enlaces  $\phi_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), del cual se determinan las  $m + n$  incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ .

El problema sobre un extremo condicional para los funcionales también puede ser resuelto en forma completamente análoga. Más precisamente, si

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$$

y

$$\phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad m < n)$$

entonces se forma el funcional:

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left( F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \phi_i \right) dx, \quad \text{o bien} \quad v^* = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx,$$

donde:

$$F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \phi_i,$$

para el que se estudia el extremo incondicional, es decir, se resuelve el sistema de ecuaciones de Euler:

$$\left. \begin{aligned} F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \\ \phi_i &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \right\} \quad (5.2.1.1)$$

completado con las ecuaciones de los enlaces:

El número  $m + n$  de ecuaciones es, en general, suficiente para determinar las  $m + n$  funciones incógnitas  $y_1, y_2, \dots, y_n$  y  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ; las condiciones de frontera  $y_j(x_0) = y_{j0}$  e  $y_j(x_1) = y_{j1}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), que no han de ser contradictorias con las ecuaciones de los enlaces, permiten, en general, determinar las  $2n$  constantes arbitrarias en la solución general del sistema de ecuaciones de Euler.

Es evidente que las curvas halladas por este método, en las que el funcional  $v^*$  tiene un mínimo o un máximo, serán también soluciones del problema variacional inicial. En efecto, para las funciones obtenidas del sistema (5.2.1.1), todas las  $\phi_i = 0$  y, por consiguiente,  $v^* = v$ .

Además, si para  $y_j = y_j(x)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) determinadas del sistema (5.2.1.1) se alcanza un extremo incondicional del funcional  $v^*$ , es decir, un extremo con respecto a todas las curvas cercanas (tanto las que satisfagan las ecuaciones de los enlaces como las que no las satisfagan) entonces, en particular, se alcanza un extremo con respecto a la clase más restringida de las curvas que satisfacen las ecuaciones de los enlaces.

Sin embargo, de este razonamiento no se deduce de ningún modo que todas las soluciones del problema original sobre un extremo condicional darán un extremo incondicional del funcional  $v^*$  y, en consecuencia, falta aclarar si por este método se pueden localizar todas las soluciones. Lo que podemos afirmar es:

*Teorema 3.* Las funciones  $y_1, y_2, \dots, y_n$  que realizan un extremo del funcional:

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$$

con las condiciones:

$$\phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad m < n)$$

satisfacen, con una elección adecuada de los factores  $\lambda_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), las ecuaciones de Euler para el funcional:

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left( F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \phi_i \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx.$$

Las funciones  $\lambda_i(x)$  e  $y_j(x)$  se determinan de las ecuaciones de Euler:

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{y } \phi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

En el problema (5.2.1.1) se han considerado enlaces finitos. Supongamos ahora que las ecuaciones de los enlaces son ecuaciones diferenciales:

$$\phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

En este caso también se puede demostrar la regla de los factores, que consiste en que el extremo condicional del funcional  $v$  se alcanza en las mismas curvas que realizan el extremo incondicional del funcional  $v^*$ .

No obstante, nos basta una afirmación más débil:

*Teorema 4.* Las curvas en las cuales se alcanza un extremo condicional del funcional  $v$  son, bajo una elección adecuada de los  $\lambda_i(x)$ , extremales del funcional  $v^*$ .

## 2.2 Método de penalización

El método de penalización aproxima problemas de optimización con restricciones por otros sin restricciones. La aproximación se logra añadiendo a la función objetivo un término que prescribe un alto costo por la violación de las restricciones. En este término aparece un parámetro  $c$  que determina la severidad de la penalización y, en consecuencia, el grado en que el nuevo problema se aproxima desde el exterior de las restricciones activas al problema original.

Considérese el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & x \in S \end{array} \quad (5.2.2.1)$$

donde  $f$  es función continua en  $E^n$  y  $S$  un conjunto de restricciones en  $E^n$ .

La idea del método de la función de penalización es sustituir (5.2.2.1) por un problema sin restricciones de la forma:

$$\text{minimizar } f(x) + cP(x) \quad (5.2.2.2)$$

donde  $c$  es constante positiva y  $P$  es una función en  $E^n$  que satisface:

- i)  $P$  es continua
- ii)  $P(x) \geq 0 \quad \forall x \in E^n$
- iii)  $P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in S$

La bondad de la aproximación es esencial al examinar si, cuando el parámetro  $c$  aumenta hacia infinito, la solución del problema sin restricciones converge a una solución del problema restringido.

Cabe destacar una cuestión importante desde el punto de vista práctico: cuando  $c$  se incrementa produce un buen problema de aproximación, sin embargo, la estructura del problema sin restricciones resultante se hace cada vez más desfavorable, con lo que se retarda la tasa de convergencia de muchos algoritmos susceptibles de ser aplicados en la resolución.

El procedimiento para resolver (5.2.2.1) con el método de la función de penalización es el siguiente:

Sea  $\{c_k\}$ ,  $k=1,2,\dots$ , una sucesión que tiende a infinito tal que para cada  $k$ ,  $c_k \geq 0$ ,  $c_{k+1} > c_k$ .

Defínase la función:

$$q(c, x) = f(x) + cP(x)$$

Para cada  $k$ , resolver el problema:

$$\text{minimizar } q(c_k, x) \quad (5.2.2.3)$$

y obténgase un punto solución  $x_k$ .

La convergencia global del método de penalización queda garantizada en el siguiente teorema [49]:

*Teorema 5.* Sea  $\{x_k\}$  una sucesión generada por el método de penalización. Entonces, cualquier punto límite de la sucesión es una solución de (5.2.2.1).

El conjunto de restricciones se define implícitamente por cierto número de restricciones funcionales. Se considera el problema de la forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) \\ &\text{sujeto a } g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (5.2.2.4)$$

En esta situación la función de penalización  $P(x)$  se formula de acuerdo a las funciones de restricción auxiliares:

$$g_i^+(x) = \max[0, g_i(x)], \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Es evidente que así  $P$  será función sólo de restricciones violadas, siendo  $P(x) = 0$  en el interior de la región de restricción. Expresando por  $g^+(x)$  el vector  $p$ -dimensional formado por las  $g_i^+(x)$  se tiene la clase general de funciones de penalización dada por:

$$P(x) = \gamma(g^+(x))$$

siendo  $\gamma$  una función continua de  $E^p$  a los números reales, definida para que  $P$  satisfaga los requerimientos exigidos a una función de penalización.

Como se ha indicado el método de penalización resuelve el problema de minimizar  $f(x) + c_k P(x)$  para varias  $c_k$ . La mayoría de los algoritmos requieren que la función objetivo tenga primeras derivadas parciales continuas. Se supondrá que  $f$ ,  $g$  y  $P$  son de clase  $C^1$ .

Se define:

$$\nabla g_i^+(x) = \begin{cases} \nabla g_i(x) & \text{si } g_i(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } g_i(x) < 0 \end{cases}$$

donde  $\nabla g^+(x)$  es la matriz cuyas filas son las  $\nabla g_i^+$ . Para garantizar que  $P$  sea  $C^1$  y debido al hecho de que  $\nabla g^+$  puede ser discontinua en puntos donde  $g_i^+(x) = 0$  para algún  $i=1,2,\dots,p$ , se debe imponer alguna restricción a  $\gamma$ . Siendo  $\gamma \in C^1$  se tiene que  $\nabla[\gamma(g^+(x))]$  puede escribirse como  $\nabla\gamma(g^+(x)) \nabla g(x)$ .

### 2.3 El método de Han-Powell

El método de Han-Powell [49] es una excelente síntesis de varios conceptos de optimización. Muy apropiado para problemas con restricciones de igualdad y de desigualdad, combina el enfoque cuasi-Newton con la función de penalización de valor absoluto y la programación cuadrática recursiva.

Este método resuelve la necesidad de trabajar con matrices definidas positivas al considerar una aproximación  $B$ , definida positiva, al hessiano del lagrangiano  $L$ ; actualizando dicha matriz en cada paso mediante una modificación de la fórmula de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) estándar [49].

Por otro lado, queda garantizada una convergencia superlineal utilizando tamaños de paso unitarios en tanto que  $(B-L)$  tienda a cero en la variedad tangente al dominio.

Además, la compatibilidad de la función de penalización de valor absoluto y la programación cuadrática recursiva garantiza que la dirección del movimiento sea una dirección de descenso por lo que se garantiza una convergencia global.

Para describir el método se considera el problema con restricciones de desigualdad:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & g(x) \leq 0 \end{array}$$



Los pasos son los siguientes:

1. Se toma un punto inicial  $x_0$  y una matriz definida positiva  $B_0$ . Hágase  $k = 0$ .

2. Resolver el programa cuadrático:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \frac{1}{2}d^T B_k d + \nabla f(x_k)d \\ &\text{sujeto a} && \nabla g(x_k)d + g(x_k) \leq 0 \end{aligned}$$

Si  $d = 0$  es una solución, el punto actual satisface las condiciones necesarias de primer orden para una solución al problema original.

3. Con el vector  $d$  hallado en el paso anterior, efectúese una búsqueda lineal en la dirección  $d$  utilizando la función de penalización de valor absoluto.

4. Actualícese  $B_k$  según la fórmula:

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k p_k p_k^T B_k}{p_k^T B_k p_k} + \frac{r_k r_k^T}{p_k^T r_k}$$

$$p_k = x_{k+1} - x_k$$

$$q_k = \nabla l(x_{k+1}, \lambda_{k+1})^T - \nabla l(x_k, \lambda_{k+1})^T$$

$$r_k = \Theta_k q_k + (1 - \Theta_k) B_k p_k$$

siendo  $\lambda_{k+1}$  el vector multiplicador de Lagrange del problema cuadrático y

$$\Theta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } p_k^T q_k \geq (0.2) p_k^T B_k p_k \\ \frac{(0.8) p_k^T B_k p_k}{p_k^T B_k p_k - p_k^T q_k} & \text{si } p_k^T q_k \geq (0.2) p_k^T B_k p_k \end{cases}$$

El escalar  $\Theta_k$  se introduce para asegurar que  $p_k^T r_k > 0$ , de modo que la definición positiva se preservará de  $B_k$  a  $B_{k+1}$ . Se ha comprobado que los parámetros 0.2 y 0.8 proporcionan buenos resultados de convergencia.

Como se observa el método combina varios conceptos para la optimización: métodos cuasi Newton, programación cuadrática recursiva y funciones de penalización. Se dará, a continuación, un breve resumen de los mismos y se demostrará la compatibilidad entre ellos.

Un programa cuadrático general se puede expresar como:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \frac{1}{2}x^T Q x + x^T c \\ &\text{sujeto a} && a_i^T x = b_i \quad i \in E \\ &&& a_i^T x \leq b_i \quad i \in I \end{aligned}$$

siendo  $E$  e  $I$  conjuntos de índices para restricciones de igualdad y desigualdad y la matriz  $Q$  simétrica y semidefinida positiva (cuando no definida positiva).

El método de Newton para resolver sistemas de ecuaciones no lineales se basa en la resolución de una versión linealizada del sistema en cada iteración:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeto a} && h(x) = 0 \end{aligned}$$

Consideramos el funcional aumentado  $F(x, \lambda) = f(x) + \lambda h(x)$  y aplicamos Newton a las ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{aligned} \nabla l(x, \lambda) &= 0 \\ h(x) &= 0 \end{aligned}$$

resolviendo de manera recursiva la versión linealizada. Esto es, dados  $x_k, \lambda_k$ , el punto nuevo  $x_{k+1}, \lambda_{k+1}$ , se determina por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \nabla l(x_k, \lambda_k)^T + L(x_k, \lambda_k)d_k + \nabla h(x_k)^T y_k &= 0 \\ h(x_k) + \nabla h(x_k)d_k &= 0 \end{aligned}$$

al hacer  $x_{k+1} = x_k + d_k, \lambda_{k+1} = \lambda_k + y_k$ , siendo  $l$  el lagrangiano y  $L$  el hessiano del lagrangiano.

A veces, se sustituye el problema linealizado por una aproximación: método de Newton modificado estructurado. El término estructurado se deduce del hecho de que en el sistema original de ecuaciones sólo se aproxima la información de segundo orden, la información de primer orden permanece intacta.

Una ventaja importante del método de Newton modificado es que  $B_k$  (aproximación de  $L_k = L(x_k, \lambda_k)$ ) se puede tomar definida positiva aunque  $L_k$  no lo sea.

El método se aplica resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} B_k d_k + \nabla h(x_k)^T \lambda_{k+1} &= -\nabla f(x_k)^T \\ \nabla h(x_k)d_k &= -h(x_k) \end{aligned}$$

entonces  $x_{k+1} = x_k + d_k$  y  $\lambda_{k+1}$  se halla directamente como solución del sistema anterior.

Estos métodos se pueden aplicar como un cuasi-Newton actualizando la matriz  $B_k$  en cada iteración.

Un paso individual del método cuasi-Newton equivale a resolver un problema de programación cuadrática. Esta es la razón por la cual el método se puede ampliar a problemas con restricciones de desigualdad mediante la programación cuadrática recursiva.

Considérese el problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeto a} && g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Dado un punto solución estimado  $x_k$  y los multiplicadores de Lagrange estimados  $\lambda_k, \mu_k$ , se resuelve el programa cuadrático:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \nabla f(x_k)d_k + \frac{1}{2}d_k^T L_k d_k \\ \text{sujeto a} \quad & \nabla g(x_k)d_k + g(x_k) \leq 0 \end{aligned}$$

El punto nuevo se determina por  $x_{k+1} = x_k + d_k$  y los nuevos multiplicadores de Lagrange son los multiplicadores del programa cuadrático.

Si trabajamos con  $B_k$  definida positiva como aproximación de  $L_k$ , el problema a minimizar es:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \nabla f(x_k)d_k + \frac{1}{2}d_k^T B_k d_k & (5.2.3.1) \\ \text{sujeto a} \quad & \nabla g(x_k)d_k + g(x_k) \leq 0 \end{aligned}$$

Las condiciones necesarias de primer orden para una solución de este problema son:

$$\begin{aligned} \nabla f(x_k)^T + B_k d_k + \nabla g(x)^T \mu &= 0 \\ \mu^T [\nabla g(x_k)d_k + g(x_k)] &= 0 \\ \nabla g(x_k)d_k + g(x_k) &\leq 0 \\ \mu &\geq 0 \end{aligned}$$

Obsérvese que si la solución tiene  $d_k = 0$ , entonces el punto  $x_k$ , junto con  $\mu$  satisface las condiciones necesarias de primer orden para el problema original aproximado.

La compatibilidad de los métodos de la función de penalización de valor absoluto y de la programación cuadrática para determinar la dirección del movimiento queda probado en el siguiente teorema:

*Teorema 6.* Sea  $d, \mu$  (con  $d \neq 0$ ) una solución del programa cuadrático (5.2.3.1). Entonces si  $c \geq \max_j (\mu_j)$ , el vector  $d$  es una dirección de descenso para la función de penalización:

$$P(x) = f(x) + c \sum_{j=1}^r g_j(x)^+$$

Esta proposición nos proporciona una base para establecer la convergencia global de los métodos de Newton modificados incluyendo la programación cuadrática recursiva.

## 2.4 Teorema de Existencia de Solución

El problema que plantearemos a continuación será localizar el mínimo de un funcional de la forma:

$$J = \int_0^{T_f} F(t, \bar{x}(t)) dt$$

donde  $F$  es de clase  $C^2$  en  $[0, T_f] \times R^m$ , entre las funciones  $\bar{x} \in C^2([0, T_f], R^m)$ .

Aunque el conjunto de restricciones sobre el que vamos a actuar en este capítulo, va a incluir restricciones de desigualdad, podemos en primera instancia plantear el problema tal como lo vimos en los capítulos III y IV, es decir, trabajando exclusivamente con restricciones de igualdad, y obtener para ese caso un teorema de existencia de solución. Con posterioridad será inmediato obtener el correspondiente teorema para el caso más general. Por tanto, en primer lugar, vamos a minimizar el funcional anterior sobre el conjunto:

$$S = \bigcap_{i=1}^r \{ (\bar{x}, \bar{y}) / g_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \}$$

donde  $g_i$  son funciones de clase  $C^2$  en  $R^m \times R^s$ , e  $\bar{y} \in C^2([0, T_f], R^s)$ .

Por la particularidad de  $F$ , el problema se puede escribir matricialmente como sigue:

$$J = \int_0^{T_f} (X^T A X + X^T B + C) dt$$

siendo:

$$X = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_m(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \quad C = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$$

con  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in R$   $i = 1, \dots, m$ . Observaremos más tarde que  $\gamma_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , luego la forma cuadrática  $X^T A X$  es definida positiva.

Además, veremos que la variable vectorial  $Y$ , que aparece en las restricciones, depende, en dimensión, del número y categoría de las centrales en que se trabaja:

$$Y = \begin{pmatrix} P_i(t) \\ Q_i(t) \\ \dot{Q}_i(t) \end{pmatrix} \quad (i \in R_{hCA})$$

$$Y = \begin{pmatrix} P_i(t) \\ Q_i(t) \\ \dot{Q}_i(t) \\ Y_{iw}(t) \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad Y_{iw}(t) = \text{col}[Y_j(t, \tau_j), j \in R_{hi}] \quad (i \in R_{hID})$$

Por la naturaleza física de sus elementos la variable  $Y$  puede considerarse acotada.

*Teorema 7.* El problema de obtener el mínimo de

$$F(X, Y) = X^T A X + X^T B + C$$

sobre el conjunto  $S = \bigcap_{i=1}^r \{(X, Y) / g_i(X, Y) = 0\} \neq \emptyset$

donde  $A$  es matriz simétrica de orden  $n$ ,  $X^T A X$  es una forma cuadrática definida positiva,  $Y$  está acotado y las funciones  $g_i$  son de clase  $C^2$ , tiene solución.

*Dem.* Por ser  $A$  simétrica es diagonalizable:

$$\forall Y, \quad X^T A X = \sum_{i=1}^n a_{ii} X_i^2$$

donde estamos suponiendo que  $a_{ii}$  son los valores propios de  $A$ .

Sea  $\alpha$  el menor de los valores propios de  $A$ , entonces:

$$|X^T A X| = \left| \sum_{i=1}^n a_{ii} X_i^2 \right| \geq \left| \sum_{i=1}^n \alpha X_i^2 \right| = \alpha \sum_{i=1}^n X_i^2 = \alpha \|X\|^2$$

Teniendo en cuenta que se verifica que  $|a+b| \geq ||a| - |b|| \geq |a| - |b|$

$$|F(X, Y)| = |X^T A X + X^T B + C| \geq |X^T A X| - |X^T B + C|$$

Notemos que  $|X^T B + C| \leq |X^T B| + |C|$  y por la desigualdad de Cauchy-Schwartz:  $|X^T B| \leq \|B\| \|X\|$ , entonces:

$$|X^T B + C| \leq |X^T B| + |C| \leq \|B\| \|X\| + \|C\|$$

Por tanto:

$$|F(X, Y)| \geq |X^T A X| - |X^T B + C| \geq \alpha \|X\|^2 - \|B\| \|X\| - \|C\|$$

y entonces:

$$\forall Y, \quad \lim_{\|X\| \rightarrow \infty} F(X, Y) = +\infty \quad (5.2.4.1)$$

Tomemos  $(X_0, Y_0) \in \text{Dom}(F) \cap S$  y su correspondiente  $F(X_0, Y_0)$ .

Consideremos  $F(X_0, Y_0) + 1$ .

De (5.2.4.1) tenemos que:  $\exists N \in \mathbb{R}^+ / \forall X \quad \|X\| \geq N, |F(X, Y)| \geq F(X_0, Y_0) + 1$

Como  $Y$  está acotado  $\exists M \in \mathbb{R}^+ / \|Y\| \leq M$ . Además,  $\|(X, Y)\| \geq \|X\|$ , luego:

$$\forall (X, Y) \quad \text{con} \quad \|(X, Y)\| \geq N' \Rightarrow \|X\| + \|Y\| \geq N' \Rightarrow \|X\| \geq N' - \|Y\| \geq N' - M$$

Tomemos  $N' / N' - M \geq N$ , entonces:

$$\forall (X, Y) \in [\bar{B}(0, N')]^c \quad \|X\| \geq N \Rightarrow |F(X, Y)| \geq F(X_0, Y_0) + 1$$

Comprobamos que el punto en que se alcanza el mínimo de  $F$  está en el interior del conjunto  $S \cap \bar{B}(0, N')$ .

Como  $F$  es una función continua y  $S$  un conjunto cerrado (Nótese que cada  $S_i = \{(X, Y)/g_i(X, Y) = 0\}$  es cerrado por ser antiimagen de un cerrado por una aplicación continua y la intersección de cerrados  $S = \bigcap_{i=1}^r S_i$  es cerrado),  $F$  está definida y es continua sobre el conjunto

compacto  $S \cap \bar{B}(0, N')$ , entonces alcanza el mínimo en dicho conjunto.

Además, sabemos que si  $\|(X, Y)\| = N' \Rightarrow |F(X, Y)| \geq F(X_0, Y_0) + 1$ . Ahora bien, el mínimo será menor que  $F(X_0, Y_0)$  luego no se alcanza en la frontera y si en el interior.

c.q.d

El modelo de sistema hidrotérmico se ajusta más a la realidad si se consideran unos intervalos de variación para las potencias ya que, en realidad, la potencia producida por cada central está sujeta a unas consideraciones técnicas que limitan su generación y que no quedan reflejadas en las restricciones impuestas hasta ahora. Es por esto que en este capítulo modelizaremos el sistema incorporando unas restricciones de desigualdad que expresarán los límites de variación de las potencias.

El objetivo ahora es localizar el mínimo del funcional de la forma:

$$J = \int_0^{T_f} F(t, \bar{x}(t)) dt$$

bajo las mismas condiciones que en el teorema anterior, siendo en este caso

$$S = \bigcap_{i=1}^r \{(\bar{x}, \bar{y}) / g_i(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0\}$$

La existencia de mínimo queda garantizada por el siguiente teorema:

*Teorema 8.* El problema de obtener el mínimo de:

$$F(X, Y) = X^T A X + X^T B + C$$

$$\text{sobre el conjunto } S = \bigcap_{i=1}^r \{(X, Y)/g_i(X, Y) \leq 0\} \neq \emptyset$$

donde  $A$  es matriz simétrica,  $X^T A X$  es una forma cuadrática definida positiva,  $Y$  está acotado y las funciones  $g_i$  son de clase  $C^2$ , tiene solución.

Se deduce fácilmente que la demostración es idéntica al caso en que las restricciones eran:

$$\bigcap_{i=1}^r \{(X, Y)/g_i(X, Y) = 0\}$$

ya que se basa en el hecho de que este conjunto es cerrado y lo mismo sucede con el conjunto:

$$S = \bigcap_{i=1}^r \{(X, Y) / g_i(X, Y) \leq 0\}$$

### 3 Planteamiento del problema

El objetivo perseguido en este capítulo es minimizar un funcional con múltiples costes, sujeto a unas determinadas restricciones, que como ya hemos comentado van a incluir condiciones de desigualdad. No obstante, por simplificar la exposición, vamos a comenzar por el problema clásico de minimizar el coste de combustible en un sistema hidrotérmico, para extender de modo muy sencillo al final del capítulo (en el punto 5.4.4) el método a optimizaciones combinadas.

La red de transmisión constituye un elemento importante en el tratamiento de la coordinación hidrotérmica. Dependiendo del modelo de red eléctrica elegido, surgen modelos distintos.

El problema planteado es el siguiente: estudiamos un modelo multinodal de red eléctrica, considerando las restricciones de la red y la variación admisible de las potencias generadas, y buscaremos la solución de mínimo coste, determinando la optimización del correspondiente flujo de carga del sistema. El problema se va a completar con la optimización combinada del costo de combustible, contaminación y pérdidas de transmisión.

Vamos a suponer que el sistema consta de  $W$  cuencas hidráulicas. Como en los capítulos anteriores trabajaremos con una sola cuenca y al final extenderemos el resultado a todo el sistema.

Supongamos que hay en conjunto  $n$  centrales eléctricas, de las cuales  $m$  son térmicas y  $n-m$  hidráulicas, pertenecientes a una sola cuenca. Las centrales hidráulicas se sitúan como se indica en la figura 2.9, esto es, existirá acoplamiento hidráulico y consideramos el retraso en el transporte.

El modelo planteado en este problema considera unos intervalos de variación para las potencias que dan lugar a algunas restricciones de desigualdad:

$$P_{imín} \leq P_i(t) \leq P_{imáx} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

También exigiremos que la solución de mínimo coste cumpla los requisitos del flujo de carga del sistema. Así, considerando una red eléctrica de  $N$  nodos, las ecuaciones de equilibrio en cada nodo son:

$$P_{Gi} = P_{Di} + |V_i| \sum_{j=1}^N |V_j| (G_{ij} \cos \delta_{ij} + C_{ij} \sin \delta_{ij})$$

$$Q_{Gi} = Q_{Di} + |V_i| \sum_{j=1}^N |V_j| (G_{ij} \sin \delta_{ij} - C_{ij} \cos \delta_{ij})$$

y también se imponen intervalos de variación para tensiones, ángulos de fase, potencias activas y reactivas, que originan otras restricciones de desigualdad:

$$V_{imín} \leq V_i \leq V_{imáx}$$

$$\delta_{imín} \leq \delta_i \leq \delta_{imáx}$$

$$P_{imín} \leq P_i(t) \leq P_{imáx}$$

$$Q_{imín} \leq Q_i(t) \leq Q_{imáx} \quad i = 1, \dots, N$$

Para determinar la optimización de flujo de carga entre centrales, nos encontramos con la necesidad de considerar las pérdidas en las líneas de transmisión. De ahí, que sea de interés el considerar un modelo de pérdidas en el que aparecen además de los coeficientes propios  $B_{ii}$  de cada nodo los mutuos entre nodos  $B_{ij}$ . La forma de la ecuación de pérdidas como ya mencionamos es:

$$P_L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} P_i P_j$$

Por tanto, la ecuación de equilibrio, en este caso, queda expresada por:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} P_i(t) P_j(t) + P_D(t) - \sum_{i=1}^n P_i(t) = 0$$

Aparecerán también las restricciones relativas al funcionamiento de las centrales hidráulicas, ya vistas en anteriores capítulos.

Por tanto, el problema a resolver es el siguiente:

$$\text{minimizar} \quad J = \int_0^{T_f} \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i P_i(t) + \gamma_i P_i^2(t)) dt$$

con las condiciones:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} P_i(t) P_j(t) + P_D(t) - \sum_{i=1}^n P_i(t) = 0$$

$$P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) + B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + C_{m+i} \dot{Q}_{m+i}^2(t) = 0 \quad (i \in R_{hCA})$$

$$P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) - B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j) + B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + C_{m+i} \dot{Q}_{m+i}^2(t) = 0 \quad (i \in R_{hD})$$

$$Y_j^2(t, \tau_j) - \begin{cases} \Psi_j^2(t, \tau_j) & 0 \leq t \leq \tau_j \\ \Psi_j^2(\tau_j, \tau_j) + Q_j^2(t - \tau_j) + 2\Psi_j(\tau_j, \tau_j) Q_j(t - \tau_j) & \tau_j < t \leq T_j \end{cases} = 0 \quad (j \in R_{hi})$$

$$P_{imín} \leq P_i(t) \leq P_{imáx} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$Q_{m+i}(0) = 0 \quad \text{y} \quad Q_{m+i}(T_f) = b_{m+i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n - m$$

para posteriormente utilizando las potencias óptimas obtenidas para las hidráulicas resolver el problema:



$$\text{minimizar } J = \int_0^{T_f} \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i P_i(t) + \gamma_i P_i^2(t)) dt$$

sujeto a las ecuaciones de equilibrio en cada nodo:

$$P_{Gi} = P_{Di} + |V_i| \sum_{j=1}^N |V_j| (G_{ij} \cos \delta_{ij} + C_{ij} \sin \delta_{ij})$$

$$Q_{Gi} = Q_{Di} + |V_i| \sum_{j=1}^N |V_j| (G_{ij} \sin \delta_{ij} - C_{ij} \cos \delta_{ij}) \quad i = 1, \dots, N$$

y a los intervalos de variación de las potencias, tensiones y ángulos de fase:

$$Q_{imin} \leq Q_i(t) \leq Q_{imax}$$

$$P_{imin} \leq P_i(t) \leq P_{imax}$$

$$V_{imin} \leq V_i \leq V_{imax}$$

$$\delta_{imin} \leq \delta_i \leq \delta_{imax} \quad i = 1, \dots, N$$

#### 4 Solución Óptima

Reflejamos, en el siguiente esquema, el problema completo de coordinación hidrotérmica y óptimo flujo de carga:

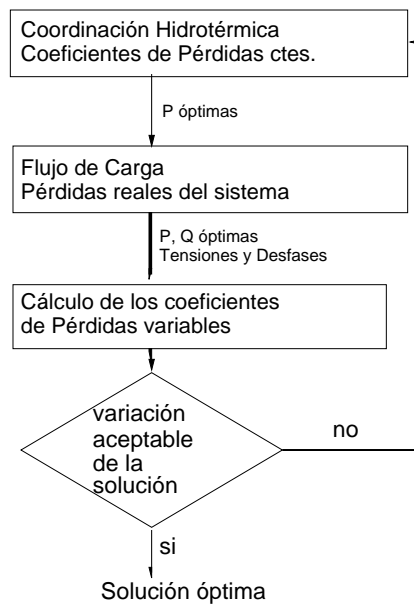


Fig. 2 Algoritmo de optimización.

Como se puede observar, en primer lugar, se resuelve un problema de coordinación hidrotérmica considerando los coeficientes de pérdidas constantes. Obtenemos las potencias térmicas e hidráulicas óptimas, tomando como dato para la resolución del problema de flujo de carga las potencias activas en las centrales hidráulicas. Además de obtener como resultado de este problema las potencias activas y reactivas óptimas, también aparecen los módulos de las tensiones y los ángulos de fase en cada instante de funcionamiento, que permiten el cálculo de los coeficientes de pérdidas.

Estos coeficientes de pérdidas que dependen en cada instante de los valores obtenidos en el problema de flujo de carga, sirven para realimentar el sistema al ser introducidos como datos en el problema de coordinación hidrotérmica. Iteramos este método hasta llegar a una variación de la solución que se considere aceptable.

Comenzamos desarrollando el proceso de localización del mínimo para el problema de coordinación hidrotérmica.

#### 4.1 Problema de Coordinación Hidrotérmica

Se trata de:

$$\text{minimizar } J = \int_0^{T_f} \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i P_i(t) + \gamma_i P_i^2(t)) dt$$

con las condiciones:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} P_i(t) P_j(t) + P_D(t) - \sum_{i=1}^n P_i(t) = 0$$

$$P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) + B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + C_{m+i} \dot{Q}_{m+i}^2(t) = 0 \quad (i \in R_{hCA})$$

$$P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) - B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j) + B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + C_{m+i} \dot{Q}_{m+i}^2(t) = 0$$

$$(i \in R_{hID})$$

$$Y_j^2(t, \tau_j) - \begin{cases} \Psi_j^2(t, \tau_j) & 0 \leq t \leq \tau_j \\ \Psi_j^2(\tau_j, \tau_j) + Q_j^2(t - \tau_j) + 2\Psi_j(\tau_j, \tau_j) Q_j(t - \tau_j) & \tau_j < t \leq T_j \end{cases} = 0 \quad (j \in R_{hi})$$

$$P_{imín} \leq P_i(t) \leq P_{imáx} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

y verificando:

$$Q_{m+i}(0) = 0 \quad \text{y} \quad Q_{m+i}(T_f) = b_{m+i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n - m$$

Aplicamos el método de penalización únicamente para incorporar las restricciones de desigualdad.

Consideremos la siguiente función de penalización:

$$P(x) = \int_0^{T_f} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\text{máx}^2(0, P_{imín} - P_i(t)) + \text{máx}^2(0, P_i(t) - P_{imáx})] dt$$

con  $x = (P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t))$ .

El objetivo es, para cada  $r$ , minimizar el problema:

$$J + c_r P(x) = \int_0^{T_f} \left\{ \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i P_i(t) + \gamma_i P_i^2(t)) + c_r \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [máx^2(0, P_{i\min} - P_i(t)) + máx^2(0, P_i(t) - P_{i\max})] \right\} dt$$

sujeto a las restricciones:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} P_i(t) P_j(t) + P_D(t) - \sum_{i=1}^n P_i(t) = 0$$

$$P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) + B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + C_{m+i} \dot{Q}_{m+i}^2(t) = 0 \quad (i \in R_{hCA})$$

$$P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) - B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j) + B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + C_{m+i} \dot{Q}_{m+i}^2(t) = 0$$

$$(i \in R_{hID})$$

$$Y_j^2(t, \tau_j) - \begin{cases} \Psi_j^2(t, \tau_j) & 0 \leq t \leq \tau_j \\ \Psi_j^2(\tau_j, \tau_j) + Q_j^2(t - \tau_j) + 2\Psi_j(\tau_j, \tau_j) Q_j(t - \tau_j) & \tau_j < t \leq T_f \end{cases} = 0 \quad (j \in R_{hi})$$

y satisfaciendo:

$$Q_{m+i}(0) = 0 \quad \text{y} \quad Q_{m+i}(T_f) = b_{m+i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n - m$$

Para tener en cuenta estas restricciones introducimos unas funciones multiplicadoras, que denotamos por  $l(t)$ ,  $n_i(t)$ , y  $r_i(t)$ , para cada una de ellas, respectivamente. Incluyendo en el funcional estos multiplicadores, y las restricciones correspondientes, obtenemos el nuevo funcional de costo, que será el siguiente:

$$(J + c_r P(x))^* = \int_0^{T_f} \left\{ \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i P_i(t) + \gamma_i P_i^2(t)) + c_r \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [máx^2(0, P_{i\min} - P_i(t)) + máx^2(0, P_i(t) - P_{i\max})] \right\} +$$

$$+ l(t) \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} P_i(t) P_j(t) + P_D(t) - \sum_{i=1}^n P_i(t) \right] +$$

$$+ \sum_{i \in R_{hCA}} n_{m+i}(t) [P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) + B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + C_{m+i} \dot{Q}_{m+i}^2(t)] +$$

$$+ \sum_{i \in R_{hID}} n_{m+i}(t) \left[ P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) - B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j) + B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + C_{m+i} \dot{Q}_{m+i}^2(t) \right] +$$

$$+ \sum_{i \in R_{hID}} \sum_{j \in R_{hi}} r_j(t) Y_j^2(t, \tau_j) dt - \sum_{i \in R_{hID}} \sum_{j \in R_{hi}} \int_0^{\tau_j} r_j(t) \Psi_j^2(t, \tau_j) dt -$$

$$- \sum_{i \in R_{hID}} \sum_{j \in R_{hi}} \int_{\tau_j}^{T_f} r_j(t) [\Psi_j^2(\tau_j, \tau_j) + Q_j^2(t - \tau_j) + 2\Psi_j(\tau_j, \tau_j) Q_j(t - \tau_j)] dt$$

En esta expresión, prescindiremos del término  $\Psi_j(t, \tau_j)$  pues, al no depender explícitamente del vector de control en el intervalo  $[0, T_f]$ , no es una variable susceptible de optimizar.

A continuación, hacemos una serie de transformaciones en el último término del funcional de costo modificado, que no influyen en el proceso de minimización y producen una expresión más simplificada y sin retraso en la variable  $Q(t)$ .

Mediante el cambio  $t - \tau_j = z$  en la integral:

$$\int_{\tau_j}^{T_f} r_j(t) [\Psi_j^2(\tau_j, \tau_j) + Q_j^2(t - \tau_j) + 2\Psi_j(\tau_j, \tau_j)Q_j(t - \tau_j)] dt$$

obtenemos:

$$\int_0^{T_f - \tau_j} r_j(z + \tau_j) [\Psi_j^2(\tau_j, \tau_j) + Q_j^2(z) + 2\Psi_j(\tau_j, \tau_j)Q_j(z)] dz$$

Seguidamente introducimos una nueva variable auxiliar:

$$\theta_i(t, \tau_i) = \begin{cases} r_i(t + \tau_i) & 0 \leq t \leq T_f - \tau_i \\ 0 & T_f - \tau_i < t \leq T_f \end{cases}$$

que nos permite expresar la integral anterior como:

$$\int_0^{T_f} \theta_j(t, \tau_j) [\Psi_j^2(\tau_j, \tau_j) + Q_j^2(t) + 2\Psi_j(\tau_j, \tau_j)Q_j(t)] dt$$

Con estas transformaciones podemos expresar el funcional en la forma:

$$(J + c_r P(x))^* = \int_0^{T_f} I dt \quad \text{donde:}$$

$$\begin{aligned} I = & \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i P_i(t) + \gamma_i P_i^2(t)) + c_r \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [máx^2(0, P_{i\min} - P_i(t)) + máx^2(0, P_i(t) - P_{i\max})] + \\ & + I(t) \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} P_i(t) P_j(t) + P_D(t) - \sum_{i=1}^n P_i(t) \right] + \\ & + \sum_{i \in R_{hCA}} n_{m+i}(t) [P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) + B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + C_{m+i} \dot{Q}_{m+i}^2(t)] + \\ & + \sum_{i \in R_{hDD}} n_{m+i}(t) \left[ P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) - B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j) + B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + C_{m+i} \dot{Q}_{m+i}^2(t) \right] + \\ & + \sum_{i \in R_{hDD}} \sum_{j \in R_{hi}} r_j(t) Y_j^2(t, \tau_j) - \sum_{i \in R_{hDD}} \sum_{j \in R_{hi}} \theta_j(t, \tau_j) [\Psi_j^2(\tau_j, \tau_j) + Q_j^2(t) + 2\Psi_j(\tau_j, \tau_j)Q_j(t)] \end{aligned}$$

junto con las condiciones:

$$Q_{m+i}(0) = 0 \quad y \quad Q_{m+i}(T_f) = b_{m+i} \quad i = 1, 2, \dots, n - m$$

Observemos que:

$$I = f(t, P_k(t), P_{hm+i}(t), Q_{m+i}(t), Y_j(t, \tau_j), \dot{Q}_{m+i}(t)) \quad k = 1, \dots, m \quad i = 1, \dots, n - m \quad j \in R_{hi}$$

Aplicando la ecuación de Euler (teorema 2) al funcional  $I$ , resulta el siguiente sistema:

Respecto de  $P_k$ :

$$\beta_k + 2Y_k P_k(t) + c_r \left\{ \begin{array}{ll} -(P_{k\min} - P_k(t)) & \text{si } P_{k\min} - P_k(t) \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{k\min} - P_k(t) < 0 \end{array} \right\} + c_r \left\{ \begin{array}{ll} P_k(t) - P_{k\max} & \text{si } P_k(t) - P_{k\max} \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_k(t) - P_{k\max} < 0 \end{array} \right\} +$$

$$+ 2B_{kk} P_k(t) l(t) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m B_{kj} P_j(t) l(t) - l(t) = 0 \quad k = 1, \dots, m \quad (5.4.1.1)$$

Respecto de  $P_{hm+i}$ :

$$c_r \left\{ \begin{array}{ll} -(P_{hm+i\min} - P_{hm+i}(t)) & \text{si } P_{hm+i\min} - P_{hm+i}(t) \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{hm+i\min} - P_{hm+i}(t) < 0 \end{array} \right\} +$$

$$+ c_r \left\{ \begin{array}{ll} P_{hm+i}(t) - P_{hm+i\max} & \text{si } P_{hm+i}(t) - P_{hm+i\max} \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{hm+i}(t) - P_{hm+i\max} < 0 \end{array} \right\} +$$

$$+ 2B_{m+im+i} P_{hm+i}(t) l(t) + 2 \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq m+i}}^n B_{m+ij} P_{hj}(t) l(t) - l(t) + n_{m+i}(t) = 0 \quad i = 1, \dots, n-m \quad (5.4.1.2)$$

Respecto de  $Y_j$ :

$$-n_{kj}(t) B_{kj} \dot{Q}_{kj}(t) + 2r_j(t) Y_j(t, \tau_j) = 0 \quad (5.4.1.3)$$

donde designamos por  $kj$  la central inmediatamente aguas abajo de cada central de trabajo  $j$ .

Respecto de  $Q_{m+i}$ :

$$\frac{d}{dt} [2C_{m+i} n_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) + A_{m+i}(t) n_{m+i}(t)] + B_{m+i} \dot{n}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) = 0$$

$$(i \in R_{hA}) \quad (5.4.1.4)$$

$$\frac{d}{dt} [2C_{m+i} n_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) + A_{m+i}(t) n_{m+i}(t)] + B_{m+i} \dot{n}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) +$$

$$+ 2\theta_{m+i}(t, \tau_{m+i})(Q_{m+i}(t) + \Psi_{m+i}(\tau_{m+i}, \tau_{m+i})) = 0 \quad (i \in R_{hC}) \quad (5.4.1.5)$$

$$\frac{d}{dt} [2C_{m+i} n_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) + A_{m+i}(t) n_{m+i}(t)] + B_{m+i} \dot{n}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) +$$

$$+ 2\theta_{m+i}(t, \tau_{m+i})(Q_{m+i}(t) + \Psi_{m+i}(\tau_{m+i}, \tau_{m+i})) - \frac{d}{dt} [B_{m+i} n_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hm+i}} Y_j(t, \tau_j)] = 0$$

$$(i \in R_{hI}) \quad (5.4.1.6)$$

$$\frac{d}{dt} [2C_{m+i} n_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) + A_{m+i}(t) n_{m+i}(t)] + B_{m+i} \dot{n}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) -$$

$$- \frac{d}{dt} [B_{m+i} n_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hm+i}} Y_j(t, \tau_j)] = 0 \quad (i \in R_{hD}) \quad (5.4.1.7)$$

De (5.4.1.1) obtenemos las ecuaciones de las potencias térmicas óptimas:

$$P_k(t) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\beta_k + c_r \begin{cases} -(P_{k\min} - P_k(t)) & \text{si } P_{k\min} - P_k(t) \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{k\min} - P_k(t) < 0 \end{cases} + c_r \begin{cases} P_k(t) - P_{k\max} & \text{si } P_k(t) - P_{k\max} \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_k(t) - P_{k\max} < 0 \end{cases}}{\gamma_k + B_{kk}l(t)} + \frac{\left( 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m B_{kj} P_j(t) - 1 \right) l(t)}{\gamma_k + B_{kk}l(t)} \right] \quad k = 1, \dots, m$$

De (5.4.1.2) obtenemos las ecuaciones de las potencias hidráulicas óptimas:

$$P_{hm+i}(t) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{c_r \begin{cases} -(P_{hm+i\min} - P_{hm+i}(t)) & \text{si } P_{hm+i\min} - P_{hm+i}(t) \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{hm+i\min} - P_{hm+i}(t) < 0 \end{cases}}{B_{m+im+i}l(t)} + \frac{c_r \begin{cases} P_{hm+i}(t) - P_{hm+i\max} & \text{si } P_{hm+i}(t) - P_{hm+i\max} \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{hm+i}(t) - P_{hm+i\max} < 0 \end{cases}}{B_{m+im+i}l(t)} + \frac{n_{m+i}(t) + \left( 2 \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq m+i}}^n B_{m+ij} P_{hj}(t) - 1 \right) l(t)}{B_{m+im+i}l(t)} \right] \quad i = 1, 2, \dots, n-m$$

De (5.4.1.3), tenemos que:

$$n_{kj}(t) B_{kj} \dot{Q}_{kj}(t) = 2r_j(t) Y_j(t, \tau_j) = 2r_j(t) \begin{cases} \Psi_j(t, \tau_j) & 0 \leq t < \tau_j \\ \Psi_j(\tau_j, \tau_j) + Q_j(t - \tau_j) & \tau_j \leq t \leq T_j \end{cases}$$

Realizando el cambio de variable  $t - \tau_j = t$ ,

$$2r_j(t + \tau_j) \begin{cases} \Psi_j(t + \tau_j, \tau_j) & -\tau_j \leq t < 0 \\ \Psi_j(\tau_j, \tau_j) + Q_j(t) & 0 \leq t \leq T_j - \tau_j \end{cases} = n_{kj}(t + \tau_j) B_{kj} \dot{Q}_{kj}(t + \tau_j)$$

Como además:

$$\theta_j(t, \tau_j) = \begin{cases} r_j(t + \tau_j) & 0 \leq t \leq T_j - \tau_j \\ 0 & T_j - \tau_j < t \leq T_j \end{cases}$$

nos queda:

$$2\theta_j(t, \tau_j) (Q_j(t) + \Psi_j(\tau_j, \tau_j)) = \begin{cases} B_{kj} n_{kj}(t + \tau_j) \dot{Q}_{kj}(t + \tau_j) & 0 \leq t \leq T_j - \tau_j \\ 0 & T_j - \tau_j < t \leq T_j \end{cases}$$

Sustituyendo esta expresión en (5.4.1.5) y (5.4.1.6), nos queda el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden expresado del modo siguiente:

$$\frac{d}{dt} [2C_{m+i} n_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) + A_{m+i}(t) n_{m+i}(t)] + B_{m+i} \dot{n}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) = 0 \quad (i \in R_{hA}) \quad (5.4.1.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [2C_{m+i}n_{m+i}(t)\dot{Q}_{m+i}(t) + A_{m+i}(t)n_{m+i}(t) + B_{m+i}\dot{n}_{m+i}(t)Q_{m+i}(t) + \\ & + \left\{ \begin{array}{ll} B_{km+i}n_{km+i}(t+\tau_{m+i})\dot{Q}_{km+i}(t+\tau_{km+i}) & 0 \leq t \leq T_f - \tau_{m+i} \\ 0 & T_f - \tau_{m+i} < t \leq T_f \end{array} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (i \in R_{hC}) \quad (5.4.1.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [2C_{m+i}n_{m+i}(t)\dot{Q}_{m+i}(t) + A_{m+i}(t)n_{m+i}(t) + B_{m+i}\dot{n}_{m+i}(t)Q_{m+i}(t) - \\ & - \frac{d}{dt} \left[ B_{m+i}n_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hm+i}} Y_j(t, \tau_j) \right] + \left\{ \begin{array}{ll} B_{km+i}n_{km+i}(t+\tau_{m+i})\dot{Q}_{km+i}(t+\tau_{km+i}) & 0 \leq t \leq T_f - \tau_{m+i} \\ 0 & T_f - \tau_{m+i} < t \leq T_f \end{array} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (i \in R_{hI}) \quad (5.4.1.10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [2C_{m+i}n_{m+i}(t)\dot{Q}_{m+i}(t) + A_{m+i}(t)n_{m+i}(t) + B_{m+i}\dot{n}_{m+i}(t)Q_{m+i}(t) - \\ & - \frac{d}{dt} \left[ B_{m+i}n_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hm+i}} Y_j(t, \tau_j) \right] = 0 \end{aligned} \quad (i \in R_{hD}) \quad (5.4.1.11)$$

Si denotamos por:

$$\begin{aligned} g_{m+i}(t) &= 0 \quad (i \in R_{hA}) \\ g_{m+i}(t) &= \left\{ \begin{array}{ll} B_{km+i}n_{km+i}(t+\tau_{m+i})\dot{Q}_{km+i}(t+\tau_{km+i}) & 0 \leq t \leq T_f - \tau_{m+i} \\ 0 & T_f - \tau_{m+i} < t \leq T_f \end{array} \right\} \quad (i \in R_{hC}) \\ g_{m+i}(t) &= -\frac{d}{dt} \left[ B_{m+i}n_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hm+i}} Y_j(t, \tau_j) \right] + \left\{ \begin{array}{ll} B_{km+i}n_{km+i}(t+\tau_{m+i})\dot{Q}_{km+i}(t+\tau_{km+i}) & 0 \leq t \leq T_f - \tau_{m+i} \\ 0 & T_f - \tau_{m+i} < t \leq T_f \end{array} \right\} \quad (i \in R_{hI}) \\ g_{m+i}(t) &= -\frac{d}{dt} \left[ B_{m+i}n_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hm+i}} Y_j(t, \tau_j) \right] \quad (i \in R_{hD}) \end{aligned}$$

el sistema a resolver se expresa como sigue:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [2C_{m+i}n_{m+i}(t)\dot{Q}_{m+i}(t) + A_{m+i}(t)n_{m+i}(t) + B_{m+i}\dot{n}_{m+i}(t)Q_{m+i}(t) + g_{m+i}(t) = 0 \\ & Q_{m+i}(0) = 0 \quad Q_{m+i}(T_f) = b_{m+i} \\ & i = 1, 2, \dots, n - m \end{aligned}$$

teniendo que cumplirse además (para poder hallar los multiplicadores  $l(t)$  y  $n_{m+i}(t)$ ):

$$\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n B_{is} P_i(j) P_s(j) + P_D(j) - \sum_{i=1}^n P_i(j) = 0 \quad (5.4.1.12)$$

$$P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t)\dot{Q}_{m+i}(t) + B_{m+i}\dot{Q}_{m+i}(t)Q_{m+i}(t) + C_{m+i}\dot{Q}_{m+i}^2(t) = 0 \quad (i \in R_{hCA})$$

$$P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t)\dot{Q}_{m+i}(t) - B_{m+i}\dot{Q}_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j) + B_{m+i}\dot{Q}_{m+i}(t)Q_{m+i}(t) + C_{m+i}\dot{Q}_{m+i}^2(t) = 0$$

$$(i \in R_{hD}) \quad (5.4.1.13)$$

Discretizando el problema y realizando un desarrollo análogo al del capítulo 3, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones en sumas:

$$z_{m+i}^1(j) = \frac{b_{m+i}j}{q} + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{k(q-j)}{q} f_{m+i}(k) + \sum_{k=j}^{q-1} \frac{j(q-k)}{q} f_{m+i}(k)$$

$$z_{m+i}^2(j) = \frac{b_{m+i}}{q} + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{-k}{q} f_{m+i}(k) + \sum_{k=j}^{q-1} \frac{(q-k)}{q} f_{m+i}(k)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-m \quad ; \quad j \in \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$$

Al cual debemos añadir las ecuaciones de las potencias óptimas generadas:

$$P_k(j) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\beta_k + c_r \begin{cases} -(P_{kmin} - P_k(j)) & \text{si } P_{kmin} - P_k(j) \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{kmin} - P_k(j) < 0 \end{cases} + c_r \begin{cases} P_k(j) - P_{kmax} & \text{si } P_k(j) - P_{kmax} \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_k(j) - P_{kmax} < 0 \end{cases}}{\gamma_k + B_{kk}l(j)} + \frac{\left( 2 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^m B_{ks} P_s(j) - 1 \right) l(j)}{\gamma_k + B_{kk}l(j)} \right] \quad k = 1, \dots, m$$

$$P_{hm+i}(j) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{c_r \begin{cases} -(P_{hm+imin} - P_{hm+i}(j)) & \text{si } P_{hm+imin} - P_{hm+i}(j) \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{hm+imin} - P_{hm+i}(j) < 0 \end{cases}}{B_{m+im+i}l(j)} + \frac{c_r \begin{cases} P_{hm+i}(j) - P_{hm+imax} & \text{si } P_{hm+i}(j) - P_{hm+imax} \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{hm+i}(j) - P_{hm+imax} < 0 \end{cases}}{B_{m+im+i}l(j)} + \frac{n_{m+i}(j) + \left( 2 \sum_{\substack{s=m+1 \\ s \neq m+i}}^n B_{m+is} P_{hs}(j) - 1 \right) l(j)}{B_{m+im+i}l(j)} \right] \quad i = 1, 2, \dots, n-m$$

y de las restricciones (5.4.1.12) y (5.4.1.13):

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} P_i(t) P_j(t) + P_D(t) - \sum_{i=1}^n P_i(t) = 0$$

$$P_{hm+i}(j) + A_{m+i}(j)\dot{Q}_{m+i}(j) + B_{m+i}\dot{Q}_{m+i}(j)Q_{m+i}(j) + C_{m+i}\dot{Q}_{m+i}^2(j) = 0 \quad (i \in R_{hCA})$$

$$P_{hm+i}(j) + A_{m+i}(j)\dot{Q}_{m+i}(j) - B_{m+i}\dot{Q}_{m+i}(j) \sum_{s \in R_{hi}} Y_s(j, \tau_s) + B_{m+i}\dot{Q}_{m+i}(j)Q_{m+i}(j) + C_{m+i}\dot{Q}_{m+i}^2(j) = 0 \quad (i \in R_{hD})$$

Aplicamos el método LSB para obtener la solución del sistema planteado, que generalizando a  $W$  cuencas hidráulicas se expresa:



$$[z_{m+i}^1(j)]^T = \frac{b_{m+i}^T j}{q} + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{k(q-j)}{q} f_{m+i}^T(k) + \sum_{k=j}^{q-1} \frac{j(q-k)}{q} f_{m+i}^T(k)$$

$$[z_{m+i}^2(j)]^T = \frac{b_{m+i}^T}{q} + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{-k}{q} f_{m+i}^T(k) + \sum_{k=j}^{q-1} \frac{(q-k)}{q} f_{m+i}^T(k)$$

$$i = 1, 2, \dots, n^T - m$$

$$P_k(j) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\beta_k + c_r \begin{cases} -(P_{k\min} - P_k(j)) & \text{si } P_{k\min} - P_k(j) \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{k\min} - P_k(j) < 0 \end{cases} + c_r \begin{cases} P_k(j) - P_{k\max} & \text{si } P_k(j) - P_{k\max} \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_k(j) - P_{k\max} < 0 \end{cases}}{\gamma_k + B_{kk}l(j)} + \frac{\left( 2 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^m B_{ks} P_s(j) - 1 \right) l(j)}{\gamma_k + B_{kk}l(j)} \right]$$

$$k = 1, 2, \dots, m$$

$$P_{hm+i}^T(j) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{c_r \begin{cases} -(P_{hm+i\min} - P_{hm+i}^T(j)) & \text{si } P_{hm+i\min} - P_{hm+i}^T(j) \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{hm+i\min} - P_{hm+i}^T(j) < 0 \end{cases}}{B_{m+im+i}^T l(j)} + \frac{c_r \begin{cases} P_{hm+i}^T(j) - P_{hm+i\max} & \text{si } P_{hm+i}^T(j) - P_{hm+i\max} \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{hm+i}^T(j) - P_{hm+i\max} < 0 \end{cases}}{B_{m+im+i}^T l(j)} + \frac{n_{m+i}^T(j) + \left( 2 \sum_{\substack{s=m+1 \\ s \neq m+i}}^n B_{m+is}^T P_{hs}^T(j) - 1 \right) l(j)}{B_{m+im+i}^T l(j)} \right]$$

$$i = 1, 2, \dots, n^T - m$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^m B_{is} P_i(j) P_s(j) + \sum_{i=1}^{n^T-m} \sum_{s=1}^{n^T-m} B_{is}^T P_i^T(j) P_s^T(j) + P_D(j) - \sum_{i=1}^m P_i(j) - \sum_{i=1}^{n^T-m} P_i^T(j) = 0$$

$$P_{hm+i}^T(j) + A_{m+i}^T(j) \dot{Q}_{m+i}^T(j) + B_{m+i}^T \dot{Q}_{m+i}^T(j) Q_{m+i}^T(j) + C_{m+i}^T [\dot{Q}_{m+i}^2(j)]^T = 0 \quad (i \in R_{hCA})$$

$$P_{hm+i}^T(j) + A_{m+i}^T(j) \dot{Q}_{m+i}^T(j) - B_{m+i}^T \dot{Q}_{m+i}^T(j) \left[ \sum_{s \in R_{hi}} Y_s(j, \tau_s) \right]^T + B_{m+i}^T \dot{Q}_{m+i}^T(j) Q_{m+i}^T(j) + C_{m+i}^T [\dot{Q}_{m+i}^2(j)]^T = 0 \quad (i \in R_{hLD})$$

$$T = 1, 2, \dots, W$$

$$j \in \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$$

Una vez resuelto el problema de coordinación hidrotérmica, planteamos el problema de flujo de carga tomando como datos para su resolución las potencias activas en las centrales hidráulicas.

## 4.2 Problema de Optimo Flujo de Carga

El flujo de carga tiene una gran importancia en los sistemas eléctricos de distribución de energía. La principal información que se obtiene del flujo es el módulo y el ángulo de todas las tensiones en todos los nodos de la red y, a partir de esto, las potencias activas y reactivas que circulan por cada línea que forma parte de dicha red eléctrica.

En el problema de optimización del flujo de carga, buscamos las potencias óptimas que minimizan el funcional de costo. Se deben cumplir las condiciones de seguridad de la red de transmisión, es decir, se imponen unos intervalos admisibles de variación de ángulos de fase y tensiones.

Así, el problema a resolver expresado para aplicar directamente el método de Han-Powell toma la forma:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad J &= \int_0^{T_f} \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i P_i(t) + \gamma_i P_i^2(t)) dt \\ P_{Gi} - P_{Di} - |V_i| \sum_{j=1}^N |V_j| (G_{ij} \cos \delta_{ij} + C_{ij} \sin \delta_{ij}) &= 0 \\ Q_{Gi} - Q_{Di} - |V_i| \sum_{j=1}^N |V_j| (G_{ij} \sin \delta_{ij} - C_{ij} \cos \delta_{ij}) &= 0 \quad i = 1, \dots, N \\ Q_{imin} - Q_i(t) &\leq 0 \\ Q_i(t) - Q_{imax} &\leq 0 \\ P_{imin} - P_i(t) &\leq 0 \\ P_i(t) - P_{imax} &\leq 0 \\ V_{imin} - V_i &\leq 0 \\ V_i - V_{imax} &\leq 0 \\ \delta_{imin} - \delta_i &\leq 0 \\ \delta_i - \delta_{imax} &\leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

Una vez resuelto este problema conocemos las tensiones y ángulos de fase en cada instante de funcionamiento, hecho que nos permitirá el cálculo de los coeficientes de pérdidas.

## 4.3 Cálculo de los coeficientes de pérdidas

Los coeficientes  $B_{ij}$  proporcionan las pérdidas de transmisión en el problema de Coordinación Hidrotérmica. Es de interés, por tanto, el cálculo de estos coeficientes en cada instante para mejorar la optimización. Veamos como se pueden obtener ecuaciones sencillas, basadas en diversas suposiciones, para sistemas con cualquier número de cargas y de centrales.

Se desarrollan las ecuaciones para un sistema formado por dos centrales generadoras y un número indefinido de cargas. Las ecuaciones se pueden extender fácilmente y satisfacer un sistema con cualquier número de centrales.

Se consideran dos centrales generadoras, unidas a una red de transmisión con un número arbitrario de cargas. Dentro del sistema, a una línea se la designa por una rama  $k$ .

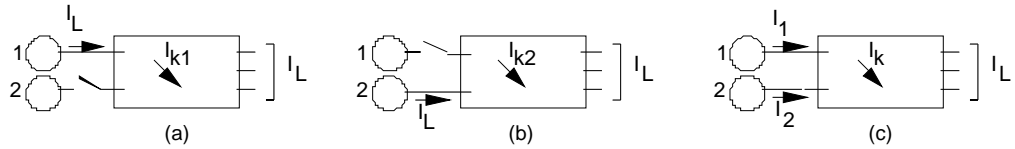


Fig. 3 Coeficientes de pérdidas.

En la figura (a), el sistema se alimenta solamente por la fuente 1, pero están conectadas todas las cargas. La corriente total de carga  $I_L$  es suministrada solo por la fuente 1, siendo la corriente de línea  $k$ ,  $I_{k1}$ . Se define:

$$N_{k1} = \frac{I_{k1}}{I_L}$$

y, de igual forma, con la fuente 2 suministrando toda la carga, como en la figura (b):

$$N_{k2} = \frac{I_{k2}}{I_L}$$

donde  $N_{k1}$  y  $N_{k2}$  se llaman factores de distribución de corriente.

Por el principio de superposición, con las dos fuentes conectadas, como en la figura (c), la corriente en  $k$ , será:

$$I_k = N_{k1}I_1 + N_{k2}I_2 \quad (5.4.3.1)$$

siendo  $I_1$  e  $I_2$  las corrientes desde las centrales 1 y 2 respectivamente.

Se consideran las dos hipótesis siguientes:

1. La relación  $\frac{X}{R}$  es la misma para todas las ramas de la red.
2. Todas las corrientes de carga tienen el mismo ángulo de fase.

Estas hipótesis significan que los factores de distribución de corriente son reales, en lugar de complejos. Si la red es alimentada por más de una central, las diversas corrientes en las ramas no están necesariamente en fase, aunque los factores de distribución de corriente pueden ser reales. Si ponemos:

$$I_1 = |I_1| \cos \sigma_1 + j |I_1| \sin \sigma_1$$

$$I_2 = |I_2| \cos \sigma_2 + j |I_2| \sin \sigma_2$$

siendo  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  los ángulos de fase de  $I_1$  e  $I_2$ , respecto a una referencia común, obtenemos de la ecuación (5.4.3.1) (con  $N_{k1}$  y  $N_{k2}$  reales):

$$|I_k|^2 = (N_{k1}|I_1|\cos\sigma_1 + N_{k2}|I_2|\cos\sigma_2)^2 + (N_{k1}|I_1|\sin\sigma_1 + N_{k2}|I_2|\sin\sigma_2)^2$$

y desarrollando y simplificando:

$$|I_k|^2 = N_{k1}^2|I_1|^2 + N_{k2}^2|I_2|^2 + 2N_{k1}N_{k2}|I_1||I_2|\cos(\sigma_1 - \sigma_2)$$

Sustituyendo ahora:

$$|I_1| = \frac{P_1}{\sqrt{3}|V_1|pf_1}$$

y

$$|I_2| = \frac{P_2}{\sqrt{3}|V_2|pf_2}$$

denotando por  $P_1$  y  $P_2$  las potencias generadas por las centrales 1 y 2 respectivamente,  $V_1$  y  $V_2$  las tensiones en las barras y por  $pf_1$  y  $pf_2$  los factores de potencia siendo  $pf_i = \cos(V_i, I_i)$ . Denotando por  $R_k$  la resistencia en la rama  $k$ , obtenemos para la pérdida total por transmisión:

$$P_L = \sum_k 3|I_k|^2 R_k = \frac{P_1^2}{|V_1|^2 (pf_1)^2} \sum_k N_{k1}^2 R_k + \frac{2P_1P_2\cos(\sigma_1 - \sigma_2)}{|V_1||V_2|pf_1pf_2} \sum_k N_{k1}N_{k2}R_k + \frac{P_2^2}{|V_2|^2 (pf_2)^2} \sum_k N_{k2}^2 R_k$$

en la que el sumatorio se extiende a todas las ramas. Como la pérdida de potencia se expresa por la ecuación:

$$P_L = B_{11}P_1^2 + 2B_{12}P_1P_2 + B_{22}P_2^2$$

entonces, los coeficientes de pérdidas se expresan por:

$$B_{11} = \frac{1}{|V_1|^2 (pf_1)^2} \sum_k N_{k1}^2 R_k$$

$$B_{12} = \frac{\cos(\sigma_1 - \sigma_2)}{|V_1||V_2|pf_1pf_2} \sum_k N_{k1}N_{k2}R_k$$

$$B_{22} = \frac{1}{|V_2|^2 (pf_2)^2} \sum_k N_{k2}^2 R_k$$

La generalización de las fórmulas de los coeficientes de pérdida para un sistema de cualquier número de cargas y de centrales se obtiene de manera inmediata:

$$B_{mn} = \frac{\cos(\sigma_m - \sigma_n)}{|V_m||V_n|pf_mpf_n} \sum_k N_{km}N_{kn}R_k$$

Estos coeficientes de pérdidas recalculados servirán para realimentar el sistema al ser introducidos como datos en el problema de coordinación hidrotérmica.

#### 4.4 Optimización combinada

Para estudiar la optimización combinada, minimizamos un funcional de costo que incluye: el costo de combustible, el costo asignado a las emisiones contaminantes de las centrales térmicas y las pérdidas de transmisión de potencia activa.

Realizamos en principio la exposición, suponiendo una única cuenca de trabajo, para generalizar el estudio a las  $W$  cuencas. El desarrollo inicial es similar al ya realizado en el punto 4.5 del capítulo anterior.

Como se vio en el capítulo II, el coste de la contaminación es un fenómeno físico que sigue un modelo cuadrático respecto a la potencia generada en cada central térmica de la forma:

$$E_i(P_i(t)) = \varepsilon_i P_i(t) + \sigma_i P_i(t)^2 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Utilizamos las tasas de penalización que se emplean en la Comunidad Autónoma de Galicia, con lo que expresamos dicho coste en unidades monetarias, al igual que el coste de combustible.

Para las pérdidas de potencia activa por transmisión, utilizamos la fórmula:

$$P_L(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i(t) B_{ij} P_j(t) \quad (5.4.4.1)$$

siendo  $n$  el número total de centrales presentes en el sistema.

Expresamos estas pérdidas en unidades monetarias, haciendo uso del factor de conversión  $\phi$ , descrito por El-Hawary y Ravindranath [29]. Dicho factor, expresa las pérdidas en coste de generación, y considerando la fórmula de pérdidas (5.4.4.1), hallando  $\phi$  como el costo incremental convencional de generación, se tiene:

$$\phi_i = \frac{\beta_i + 2\gamma_i P_i}{1 - 2 \sum_{j=1}^n B_{ij} P_j} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Se halla el valor de  $\phi_i$  en cada instante como la media de los costos incrementales de todas las centrales. A continuación, el valor medio de  $\phi$  se halla promediando los  $\phi_i$  en todos los instantes.

Para poder optimizar de forma conjunta estos factores, incluimos los tres costes en el funcional considerando unas funciones peso  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ , y  $\kappa_3$ , que cumplen:  $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 1$ , y de esta forma asignamos valores relativos a los tres componentes del funcional.

Así el funcional se expresa por:

$$J = \int_0^{T_f} \left\{ \kappa_1 \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i P_i(t) + \gamma_i P_i^2(t)) + \kappa_2 \sum_{i=1}^m (\varepsilon_i P_i(t) + \sigma_i P_i^2(t)) + \kappa_3 \phi \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (B_{ij} P_i(t) P_j(t)) \right\} dt$$

agrupando términos de manera que el primero incluya la parte térmica, y el segundo aporte únicamente el costo de las pérdidas de las centrales hidráulicas, el problema a resolver será:

$$\text{minimizar } J = \int_0^{T_f} \left\{ \sum_{i=1}^m \left[ \kappa_1 \alpha_i + \left( \kappa_1 \beta_i + \kappa_2 \varepsilon_i + \kappa_3 \phi \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m B_{ij} P_j(t) \right) P_i(t) + (\kappa_1 \gamma_i + \kappa_2 \sigma_i + \kappa_3 \phi B_{ii}) P_i^2(t) \right] + \sum_{i=n-m}^n \left( \kappa_3 \phi B_{ii} P_i^2(t) + \kappa_3 \phi \sum_{\substack{j=n-m \\ j \neq i}}^n B_{ij} P_i(t) P_j(t) \right) \right\} dt$$

con las condiciones:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} P_i(t) P_j(t) + P_D(t) - \sum_{i=1}^n P_i(t) = 0$$

$$P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) + B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + C_{m+i} \dot{Q}_{m+i}^2(t) = 0 \quad (i \in R_{hCA})$$

$$P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) - B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j) + B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + C_{m+i} \dot{Q}_{m+i}^2(t) = 0$$

$$(i \in R_{hID})$$

$$Y_j^2(t, \tau_j) - \begin{cases} \Psi_j^2(t, \tau_j) & 0 \leq t \leq \tau_j \\ \Psi_j^2(\tau_j, \tau_j) + Q_j^2(t - \tau_j) + 2\Psi_j(\tau_j, \tau_j) Q_j(t - \tau_j) & \tau_j < t \leq T_j \end{cases} = 0 \quad (j \in R_{hi})$$

$$P_{\text{imín}} \leq P_i(t) \leq P_{\text{imáx}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

y verificando:

$$Q_{m+i}(0) = 0 \quad \text{y} \quad Q_{m+i}(T_f) = b_{m+i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-m$$

El procedimiento a seguir es el realizado en el apartado 5.4.1 de este capítulo. Para no alargar en exceso la exposición presentaremos el esquema de resolución, los cambios que se producen con relación a las ecuaciones ya obtenidas en el apartado mencionado y los resultados de cada paso.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Función de penalización.
2. Funcional aumentado.
3. Ecuación de Euler.
4. Resolución del problema de ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno.
5. Aplicación del método LSB.

1. Para incorporar las restricciones de desigualdad, la función de penalización utilizada es:

$$P(x) = \int_0^{T_f} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\text{máx}^2(0, P_{\text{imín}} - P_i(t)) + \text{máx}^2(0, P_i(t) - P_{\text{imáx}})] dt$$

donde  $x = (P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t))$

2. Al incorporar las condiciones y expresando en un primer sumando la parte térmica el funcional aumentado resulta:

$$(J + c_r P(x))^* = \int_0^{T_f} I dt$$

donde:

$$\begin{aligned} I = & \sum_{i=1}^m \left[ \kappa_1 \alpha_i + \left( \kappa_1 \beta_i + \kappa_2 \varepsilon_i + \kappa_3 \phi \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m B_{ij} P_j(t) \right) P_i(t) + (\kappa_1 \gamma_i + \kappa_2 \sigma_i + \kappa_3 \phi B_{ii}) P_i^2(t) \right] + \\ & + c_r \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m [máx^2(0, P_{imín} - P_i(t)) + máx^2(0, P_i(t) - P_{imáx})] + l(t) \sum_{i=1}^m \left[ B_{ii} P_i^2(t) + \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m B_{ij} P_j(t) - 1 \right) P_i(t) \right] + \\ & + \sum_{i=1}^{n-m} \left[ \kappa_5 \phi B_{m+im+i} P_{hm+i}^2(t) + \kappa_5 \phi \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-m} B_{m+im+j} P_{hm+j}(t) P_{hm+i}(t) \right] + \\ & + c_r \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m [máx^2(0, P_{hm+imín} - P_{hm+i}(t)) + máx^2(0, P_{hm+i}(t) - P_{hm+imáx})] + \\ & + l(t) \sum_{i=1}^m \left[ B_{m+im+i} P_{hm+i}^2(t) + \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-m} B_{m+im+j} P_{hm+j}(t) - 1 \right) P_{m+i}(t) \right] + l(t) P_D(t) + \\ & + \sum_{i \in R_{hCA}} n_{m+i}(t) [P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) + B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + C_{m+i} \dot{Q}_{m+i}^2(t)] + \\ & + \sum_{i \in R_{hID}} n_{m+i}(t) \left[ P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) - B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j) + B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + C_{m+i} \dot{Q}_{m+i}^2(t) \right] + \\ & + \sum_{i \in R_{hID}} \sum_{j \in R_{hi}} r_j(t) Y_j^2(t, \tau_j) - \sum_{i \in R_{hID}} \sum_{j \in R_{hi}} \theta_j(t, \tau_j) [\Psi_j^2(\tau_j, \tau_j) + Q_j^2(t) + 2\Psi_j(\tau_j, \tau_j) Q_j(t)] \end{aligned}$$

junto con las condiciones:

$$Q_{m+i}(0) = 0 \quad \text{y} \quad Q_{m+i}(T_f) = b_{m+i} \quad i = 1, 2, \dots, n-m$$

3. Si aplicamos la ecuación de Euler al funcional  $I$ , se observa que las únicas ecuaciones que cambian son las relativas a las potencias térmicas  $P_i$  e hidráulicas  $P_{hm+i}$ .

La ecuación que obtenemos respecto de cada  $P_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) es:

$$\begin{aligned} & \kappa_1 \beta_i + \kappa_2 \varepsilon_i + 2\kappa_3 \phi \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m B_{ij} P_j(t) + 2(\kappa_1 \gamma_i + \kappa_2 \sigma_i + \kappa_3 \phi B_{ii}) P_i(t) + \\ & + 2B_{ii} P_i(t) l(t) + \left( 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m B_{ij} P_j(t) - 1 \right) l(t) + \\ & + c_r \left\{ \begin{array}{ll} -(P_{imín} - P_i(t)) & \text{si } P_{imín} - P_i(t) \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{imín} - P_i(t) < 0 \end{array} \right\} + \\ & + c_r \left\{ \begin{array}{ll} P_i(t) - P_{imáx} & \text{si } P_i(t) - P_{imáx} \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_i(t) - P_{imáx} < 0 \end{array} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Así, las potencias térmicas óptimas son:

$$P_i(t) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\kappa_1 \beta_i + \kappa_2 \varepsilon_i + 2\kappa_3 \phi \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m B_{ij} P_j(t) + \left( 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m B_{ij} P_j(t) - 1 \right) l(t)}{\kappa_1 \gamma_i + \kappa_2 \sigma_i + (\kappa_3 \phi + l(t)) B_{ii}} + \right. \\ \left. + \frac{c_r \left\{ \begin{array}{ll} -(P_{imín} - P_i(t)) & \text{si } P_{imín} - P_i(t) \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{imín} - P_i(t) < 0 \end{array} \right\} + c_r \left\{ \begin{array}{ll} P_i(t) - P_{imáx} & \text{si } P_i(t) - P_{imáx} \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_i(t) - P_{imáx} < 0 \end{array} \right\}}{\kappa_1 \gamma_i + \kappa_2 \sigma_i + (\kappa_3 \phi + l(t)) B_{ii}} \right] \\ i = 1, \dots, m$$

La ecuación respecto de cada  $P_{hm+i}$  ( $i = 1, \dots, n-m$ ) es:

$$c_r \left\{ \begin{array}{ll} -(P_{hm+imín} - P_{hm+i}(t)) & \text{si } P_{hm+imín} - P_{hm+i}(t) \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{hm+imín} - P_{hm+i}(t) < 0 \end{array} \right\} + c_r \left\{ \begin{array}{ll} P_{hm+i}(t) - P_{hm+imáx} & \text{si } P_{hm+i}(t) - P_{hm+imáx} \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{hm+i}(t) - P_{hm+imáx} < 0 \end{array} \right\} + \\ + n_{m+i}(t) + 2\kappa_3 \phi B_{m+im+i} P_{hm+i}(t) + \\ + 2\kappa_3 \phi \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-m} B_{m+im+j} P_{hm+j}(t) + 2B_{m+im+i} P_{hm+i}(t) l(t) + \left( 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-m} B_{m+im+j} P_{hm+j}(t) - 1 \right) l(t) = 0$$

Así, las potencias hidráulicas óptimas son:

$$P_{hm+i}(t) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{c_r \left\{ \begin{array}{ll} -(P_{hm+imín} - P_{hm+i}(t)) & \text{si } P_{hm+imín} - P_{hm+i}(t) \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{hm+imín} - P_{hm+i}(t) < 0 \end{array} \right\}}{(\kappa_3 \phi + l(t)) B_{m+im+i}} + \right. \\ \left. \frac{c_r \left\{ \begin{array}{ll} P_{hm+i}(t) - P_{hm+imáx} & \text{si } P_{hm+i}(t) - P_{hm+imáx} \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{hm+i}(t) - P_{hm+imáx} < 0 \end{array} \right\}}{(\kappa_3 \phi + l(t)) B_{m+im+i}} + \right. \\ \left. \frac{n_{m+i}(t) + 2\kappa_3 \phi \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-m} B_{m+im+j} P_{hm+j}(t) + \left( 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-m} B_{m+im+j} P_{hm+j}(t) - 1 \right) l(t)}{(\kappa_3 \phi + l(t)) B_{m+im+i}} \right] \\ i = 1, 2, \dots, n-m$$

El resto de las ecuaciones se expresan por el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden con dos condiciones de contorno:

$$\frac{d}{dt} [2C_{m+i} n_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) + A_{m+i}(t) n_{m+i}(t)] + B_{m+i} \dot{n}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + g_{m+i}(t) = 0$$

$$Q_{m+i}(0) = 0$$

$$Q_{m+i}(T_f) = b_{m+i}$$

$$i = 1, 2, \dots, n-m$$

teniendo que cumplirse las restricciones siguientes para poder hallar los multiplicadores  $l(t)$  y  $n_{m+i}(t)$  aún incógnitas:



$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} P_i(t) P_j(t) + P_D(t) - \sum_{i=1}^n P_i(t) = 0$$

$$P_{hm+i}(j) + A_{m+i}(j) \dot{Q}_{m+i}(j) + B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(j) Q_{m+i}(j) + C_{m+i} \dot{Q}_{m+i}^2(j) = 0 \quad (i \in R_{hCA})$$

$$P_{hm+i}(j) + A_{m+i}(j) \dot{Q}_{m+i}(j) - B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(j) \sum_{s \in R_{hi}} Y_s(j, \tau_s) + B_{m+i} \dot{Q}_{m+i}(j) Q_{m+i}(j) + C_{m+i} \dot{Q}_{m+i}^2(j) = 0$$

$$(i \in R_{hID})$$

4. La solución de este sistema nos conduce a un nuevo sistema de ecuaciones en sumas:

$$z_{m+i}^1(j) = \frac{b_{m+i} j}{q} + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{k(q-j)}{q} f_{m+i}(k) + \sum_{k=j}^{q-1} \frac{j(q-k)}{q} f_{m+i}(k)$$

$$z_{m+i}^2(j) = \frac{b_{m+i}}{q} + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{-k}{q} f_{m+i}(k) + \sum_{k=j}^{q-1} \frac{(q-k)}{q} f_{m+i}(k)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-m \quad ; \quad j \in \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$$

Al cual debemos añadir las ecuaciones de las potencias óptimas generadas:

$$P_i(j) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\kappa_1 \beta_i + \kappa_2 \varepsilon_i + 2\kappa_3 \phi \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^m B_{is} P_s(j) + \left( 2 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^m B_{is} P_s(j) - 1 \right) l(j)}{\kappa_1 \gamma_i + \kappa_2 \sigma_i + (\kappa_3 \phi + l(j)) B_{ii}} + \right.$$

$$\left. + \frac{c_r \left\{ \begin{array}{ll} -(P_{i\min} - P_i(j)) & \text{si } P_{i\min} - P_i(j) \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{i\min} - P_i(j) < 0 \end{array} \right\} + c_r \left\{ \begin{array}{ll} P_i(j) - P_{i\max} & \text{si } P_i(j) - P_{i\max} \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_i(j) - P_{i\max} < 0 \end{array} \right\}}{\kappa_1 \gamma_i + \kappa_2 \sigma_i + (\kappa_3 \phi + l(j)) B_{ii}} \right]$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$P_{hm+i}(j) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{c_r \left\{ \begin{array}{ll} -(P_{hm+i\min} - P_{hm+i}(j)) & \text{si } P_{hm+i\min} - P_{hm+i}(j) \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{hm+i\min} - P_{hm+i}(j) < 0 \end{array} \right\}}{(\kappa_3 \phi + l(j)) B_{m+im+i}} + \right.$$

$$\left. \frac{c_r \left\{ \begin{array}{ll} P_{hm+i}(j) - P_{hm+i\max} & \text{si } P_{hm+i}(j) - P_{hm+i\max} \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{hm+i}(j) - P_{hm+i\max} < 0 \end{array} \right\}}{(\kappa_3 \phi + l(j)) B_{m+im+i}} + \right.$$

$$\left. \frac{n_{m+i}(j) + 2\kappa_3 \phi \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{n-m} B_{m+im+s} P_{hm+s}(j) + \left( 2 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{n-m} B_{m+im+s} P_{hm+s}(j) - 1 \right) l(j)}{(\kappa_3 \phi + l(j)) B_{m+im+i}} \right]$$

$$i = 1, 2, \dots, n-m$$

y de las restricciones:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n B_{is} P_i(j) P_s(j) + P_D(j) - \sum_{i=1}^n P_i(j) = 0$$

$$P_{hm+i}(j) + A_{m+i}(j)\dot{Q}_{m+i}(j) + B_{m+i}\dot{Q}_{m+i}(j)Q_{m+i}(j) + C_{m+i}\dot{Q}_{m+i}^2(j) = 0 \quad (i \in R_{hCA})$$

$$P_{hm+i}(j) + A_{m+i}(j)\dot{Q}_{m+i}(j) - B_{m+i}\dot{Q}_{m+i}(j) \sum_{s \in R_{hi}} Y_s(j, \tau_s) + B_{m+i}\dot{Q}_{m+i}(j)Q_{m+i}(j) + C_{m+i}\dot{Q}_{m+i}^2(j) = 0$$

$$(i \in R_{hD})$$

5. Por tanto, el sistema a resolver mediante el método LSB, generalizando el estudio a las W cuencas hidráulicas es:

$$[z_{m+i}^1(j)]^T = \frac{b_{m+i}^T j}{q} + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{k(q-j)}{q} f_{m+i}^T(k) + \sum_{k=j}^{q-1} \frac{j(q-k)}{q} f_{m+i}^T(k)$$

$$[z_{m+i}^2(j)]^T = \frac{b_{m+i}^T}{q} + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{-k}{q} f_{m+i}^T(k) + \sum_{k=j}^{q-1} \frac{(q-k)}{q} f_{m+i}^T(k)$$

$$i = 1, 2, \dots, n^T - m$$

$$P_i(j) = -\frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} \kappa_1 \beta_i + \kappa_2 \varepsilon_i + 2\kappa_3 \phi \sum_{s=1}^{n^T-m} \end{array} \right]$$

$$P_{hm+i}^T(j) = -\frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} c_r \left\{ \begin{array}{ll} -(P_{hm+imín} - P_{hm+i}^T(j)) & \text{si } P_{hm+imín} - P_{hm+i}^T(j) \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{hm+imín} - P_{hm+i}^T(j) < 0 \end{array} \right\} \\ (\kappa_3 \phi + l(j)) B_{m+im+i}^T \end{array} \right] +$$

$$c_r \left\{ \begin{array}{ll} P_{hm+i}^T(j) - P_{hm+imáx} & \text{si } P_{hm+i}^T(j) - P_{hm+imáx} \geq 0 \\ 0 & \text{si } P_{hm+i}^T(j) - P_{hm+imáx} < 0 \end{array} \right\} \\ (\kappa_3 \phi + l(j)) B_{m+im+i}^T \end{array} \right] +$$

$$\left[ \frac{n_{m+i}^T(j) + 2\kappa_3 \phi \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{n^T-m} B_{m+im+s}^T P_{hm+s}^T(j) + \left( 2 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{n^T-m} B_{m+im+s}^T P_{hm+s}^T(j) - 1 \right) l(j)}{(\kappa_3 \phi + l(j)) B_{m+im+i}^T} \right]$$

$$i = 1, 2, \dots, n^T - m$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^m B_{is} P_i(j) P_s(j) + \sum_{i=1}^{n^T-m} \sum_{s=1}^{n^T-m} B_{is}^T P_i^T(j) P_s^T(j) + P_D(j) - \sum_{i=1}^m P_i(j) - \sum_{i=1}^{n^T-m} P_i^T(j) = 0$$

$$P_{hm+i}^T(j) + A_{m+i}^T(j)\dot{Q}_{m+i}^T(j) + B_{m+i}^T\dot{Q}_{m+i}^T(j)Q_{m+i}^T(j) + C_{m+i}^T[\dot{Q}_{m+i}^2(j)]^T = 0 \quad (i \in R_{hCA})$$

$$P_{hm+i}^T(j) + A_{m+i}^T(j) \dot{Q}_{m+i}^T(j) - B_{m+i}^T \dot{Q}_{m+i}^T(j) \left[ \sum_{s \in R_{hi}} Y_s(j, \tau_s) \right]^T + B_{m+i}^T \dot{Q}_{m+i}^T(j) Q_{m+i}^T(j) + C_{m+i}^T [\dot{Q}_{m+i}^2]^T(j) = 0$$

$(i \in R_{hD})$

$$T = 1, 2, \dots, W$$

$$j \in \{0, 1, 2, \dots, q-1\} \quad (5.4.4.2)$$

Y así obtenemos la solución en el caso más general.

## 5 Existencia y unicidad de solución

En el punto 5.2.4 hemos desarrollado un teorema que garantiza la existencia de solución para el problema planteado. Por otro lado, y tras todo el desarrollo efectuado, también hemos visto la forma de la solución óptima, que viene expresada por medio de un sistema no lineal de ecuaciones, como el (5.4.4.2) obtenido en el caso más general de optimización combinada y  $W$  cuencas hidráulicas. Vamos ahora a mostrar que la solución del problema es única.

Para ello, el primer paso consiste en ver que las ecuaciones anteriores (5.4.4.2) las podemos expresar en forma matricial:

$$z(j) = T[j, z(j)]$$

con:

$$z(j) = \text{col}(n_{m+1}(j) \quad \dots \quad n_{n-m}(j) \quad l(j) \quad z_{m+1}^1(j) \quad z_{m+1}^2(j) \quad \dots \quad z_n^1(j) \quad z_n^2(j))$$

Como vimos,  $z_{m+i}^1(j)$  y  $z_{m+i}^2(j)$  ya se encuentran escritas en esta forma. Para despejar los multiplicadores  $l(t)$  y  $n_{m+i}(t)$  basta sustituir las potencias óptimas en las ecuaciones de restricción que deben verificarse, obteniendo directamente  $n_{m+i}(t)$  y pudiendo despejar  $l(t)$  de una ecuación de segundo grado, a similitud de lo ya visto en el punto 3.6, al desarrollar el algoritmo de optimización para el problema, aplicando el teorema de la norma mínima.

Si existe un elemento  $z^*$  que cumpla la ecuación anterior, a este elemento se le llama punto fijo de  $T$ . Ya vimos en el capítulo 3 que una forma eficaz de resolver este tipo de problemas, y de garantizar la unicidad de solución, era la construcción del algoritmo de contracción del punto fijo modificado (teorema 5 del capítulo 3).

Como se ha visto en [22] y [67] una buena elección de  $V$  para aplicar el algoritmo del punto fijo modificado en:

$$z(j)_{l+1} = [I - V]^{-1} [T(j, z(j)_l) - V(z(j)_l)]$$

para  $l = 0, 1, 2, \dots$  hasta donde se satisfaga es:

$$V = v \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{2(n-m)} \end{pmatrix}_{3(n-m)+1}$$

siendo  $I_{2(n-m)}$  la matriz unidad de orden  $2(n-m)$  y el escalar  $v$  el valor de corrección.

Al aplicar lo anterior a nuestro problema tenemos que:

*Teorema 9.* Existe un único punto crítico del problema variacional

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left( F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \phi_i \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx.$$

Y por tanto queda garantizado el siguiente corolario.

*Corolario.* El problema planteado tiene mínimo único.

## 6 Conclusiones

En este capítulo se estudian dos tipos de sistemas hidrotérmico: uninodal y multinodal, siendo éste último una novedad con respecto a los capítulos anteriores.

Se desarrolla el estudio de programación óptima de un sistema hidrotérmico a corto plazo (HTSSR), considerando múltiples objetivos, mediante la ecuación de Euler lo que nos permite de una forma sencilla incluir restricciones de desigualdad.

En el modelo multinodal de red se realiza la optimización del flujo de carga correspondiente. La técnica de resolución de este problema se aborda en dos etapas:

1. En primer lugar se trata la coordinación hidrotérmica sin incorporar las restricciones del flujo de carga de la red. Las restricciones de desigualdad se solventan mediante funciones de penalización. Se aplica el algoritmo LSB que permite realizar fácilmente optimizaciones de múltiples factores, a diferencia de métodos anteriores.
2. En segundo lugar, se optimiza el flujo de carga a través del método de Han-Powell. Se obtienen así valores para los coeficientes de pérdidas en cada instante que vuelven a introducirse en el problema de coordinación hidrotérmica.

A partir del algoritmo que hemos elaborado, se realizó y patentó un programa en lenguaje FORTRAN 90 denominado "OPTIMIZA". Dicho programa se presenta en entorno Windows y para crearlo se escogió el compilador Microsoft Visual Basic. Algunas de las ventajas de este programa son:

- Su fácil manejo ya que a través de ventanas mantiene una comunicación sencilla y fluida con el usuario, de tal forma que no se precisan conocimientos especiales para utilizarlo.
- Dispone de un módulo de dibujo que permite realizar un diseño gráfico de la red e introducir las características técnicas de cada elemento, es decir los datos de que se disponen.

Su tiempo de ejecución es muy bajo y las necesidades de memoria son reducidas. Así mismo los valores iniciales que se utilizan para iniciar el algoritmo no necesitan estar próximos a la solución exacta, con lo que se asegura la convergencia en la mayoría de los casos.

Se presentan los resultados de forma cómoda, sencilla y concisa para el usuario, para que no le resulte pesado la asimilación de los resultados obtenidos por el programa.