La primera condición de Weierstrass-Erdmann en problemas variacionales con restricciones de inclusión diferencial

Bayón, L.[1] Grau, J.M.[2] Ruiz, M.M.[3] Suárez, P.M.[4]

1-2-3-4 Departamento de Matemáticas. Universidad de Oviedo. E.U.I.T.I. C./ Manuel Llaneza 75. Gijón. Asturias. 33208 Spain. e-mail: bayon@correo.uniovi.es

Resumen

Los problemas variacionales en los cuales las derivadas de las funciones admisibles deben estar sujetas a ciertas restricciones de desigualdad (inclusiones diferenciales $z' \in f(t, z)$) han sido tratados tradicionalmente recurriendo a diversas técnicas (ver por ejemplo [1]). Por otro lado, las condiciones de Weiertrass-Erdmann (W-E) [2] son de vital importancia para estudiar extremales quebradas [3] y permiten en ocasiones asegurar su no existencia.

En este trabajo se continúa un estudio anterior de los autores [4] sobre las extremales quebradas en problemas variacionales con restricciones. En dicho trabajo, sus autores exponían una demostración novedosa de la primera condición de W-E. Esta demostración era extensible a problemas con restricciones de un determinado tipo, las cuales quedaban descritas en términos de lo que denominaron conjuntos suavizables. Para estas restricciones se presentó una condición necesaria de extremal quebrada, la llamada primera condición generalizada de W-E:

Si $L(t, z, z') \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^2)$, Ω *es suavizable en* t_0 *y* q *proporciona un mínimo local débil para* $F(z) = \int_a^b L(t, z(t), z'(t))dt$ *sobre* $D = \Omega \cap \{z \in KC^1[a, b] \mid z(a) = \alpha \wedge z(b) = \beta\}$ *entonces:*

$$(q'(t_{0-}) - q'(t_{0+})) \cdot (L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0-})) - L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0+}))) \leq 0$$

También se encontraron condiciones suficientes para que la primera condición generalizada de W-E se convirtiera en la clásica primera condición de W-E, así como condiciones suficientes de convexidad para poder asegurar que el mínimo se alcanza en funciones de clase C^1.

Por último se demostró que el clásico problema del obstáculo y los problemas con velocidad restringida pueden ser descritos en términos de estos conjuntos.

En el presente estudio se amplia notablemente la clase de restricciones suavizables y se demuestra que, dadas las funciones G_1, G_2 de clase C^1, el conjunto

$$\{z \in KC^1[a, b] | G_1(t, z(t)) \leq z'(t) \leq G_2(t, z(t)), \forall t \in [a, b] \text{ a.e.}\}$$

es suavizable para cada t.

Asimismo, se presentan dos ejemplos de aplicación. El primero un ejemplo numérico de fácil interpretación geométrica. Consideraremos el problema de minimizar

$$F(z) = \int_0^1 L(z'(t))dt$$

sobre

$$D = \Omega \cap \{z \in KC^1[0,1] \mid z(0) = 0 \ , \ z(1) = k\}$$
$$\Omega := \{z \in KC^1[0,1] \mid z(t) + t \leq z'(t) \leq z(t) + t + 2, \forall t \in [0,1]\}$$

siendo $L \in C^1[\mathbb{R}]$, con L' estrictamente creciente. El segundo es una muy notable aplicación a un problema clásico de Ingeniería: El problema de la Optimización de sistemas hidrotérmicos. Se trata de calcular el mínimo del funcional

$$F(z) = \int_0^T \Psi\left(P_d(t) - H\left(t, z(t), z'(t)\right)\right) dt$$

donde Ψ es la función de costo de la térmica equivalente, $P_d(t)$ es la potencia demandada y $H(t, z(t), z'(t))$ es la potencia aportada en el instante t por la planta hidráulica. Denotamos $z(t)$ el volumen descargado hasta el instante t, y $z'(t)$ el caudal. Asumiendo que b es el volumen de agua que se debe gastar durante el intervalo de optimización $[0, T]$, tendremos las siguientes condiciones de contorno:$z(0) = 0$, $z(T) = b$, y por tanto en este caso

$$D = \Omega \cap \{z \in KC^1[0,T] \mid z(0) = 0 \ , \ z(T) = b\}$$
$$\Omega := \{z \in KC^1[0,T] \ / \ 0 \leq \ H(t, z(t), z'(t)) \leq P_d(t)\}$$

Referencias

[1] F. H. Clarke, Inequality constraints in the calculus of variations, Canad. J. Math. 29, no. 3 (1977), 528–540.

[2] M. Cesar, Reformulation of the second Weierstrass-Erdmann condition, Bol. Soc. Brasil. Mat., 13(1982), no. 1, 19–23.

[3] J. Noble, H. Schättler, On sufficient conditions for a strong local minimum of broken extremals in optimal control, Res. Notes Math., 396(1999), 171-179.

[4] L. Bayón; J. M. Grau; P. M. Suárez, A Necessary Condition for Broken Extremals in Problems Involving Inequality Constraints, Journal of Inequalities and Applications. (Aceptado, 2003).