

# OPTIMIZACION COMBINADA DE SISTEMAS HIDROTERMICOS MEDIANTE METODOS APROXIMADOS

## 1 Introducción

En esta tesis vamos a resolver un problema de programación óptima en un sistema hidrotérmico a corto plazo (HTSSR), considerando múltiples objetivos. El sistema hidrotérmico que vamos a estudiar consta de  $m$  centrales térmicas y  $(n-m)$  hidráulicas, estando estas últimas distribuidas en varias cuencas ramificadas.

Utilizaremos los modelos que vimos en el capítulo II, y por tanto el coste de combustible en cada central térmica viene dado por:

$$F_i(P_{si}) = \alpha_i + \beta_i P_{si} + \gamma_i P_{si}^2$$

en donde  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\gamma$  son parámetros conocidos para cada central, y  $P_{si}$  es la potencia generada en dicha central.

El coste asociado a la contaminación producida por las centrales térmicas será:

$$E_i(P_{si}) = \theta_i + \varepsilon_i P_{si} + \sigma_i P_{si}^2$$

en donde  $\theta$ ,  $\varepsilon$ , y  $\sigma$  serán parámetros conocidos para cada unidad.

Las pérdidas de transmisión las asumimos mediante la fórmula [67]:

$$P_L = K_{LO} + \sum_{i=1}^n B_{io} P_{si} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{si} B_{ij} P_{sj}$$

donde  $K_{LO}$ ,  $B_{io}$  y  $B_{ij}$  son parámetros de la red.

Al trabajar con centrales de carga variable, la potencia generada en cada central hidráulica es función tanto del caudal de descarga  $q(t)$ , como de la altura efectiva de agua  $h(t)$  en el embalse, y de acuerdo al modelo que ya vimos, viene dada por:

$$P_{hi}(t) = \frac{q_i(t)h_i(t)}{G_i}$$

donde  $G_i$  es la eficiencia de la central hidráulica  $i$ -ésima y es también un dato conocido.

Por último, el agua descargada en cada central hidráulica durante el intervalo de optimización, deberá satisfacer la siguiente restricción de volumen de agua:

$$\int_0^{T_f} q_i(t) dt = b_i$$

El objetivo del presente capítulo es realizar una planificación a corto plazo de un sistema hidrotérmico, con múltiples objetivos, con el fin de minimizar conjuntamente el costo de generación, las emisiones contaminantes de las plantas térmicas, y las pérdidas de potencia activa por transmisión.

Para minimizar la funcional cuadrática heterogénea objeto del problema, se utilizará el método aproximado de Ritz que combina la suficiente precisión en la solución del problema, con un ahorro notable en la complejidad de la formulación y por tanto en su posterior resolución computacional. Además permitirá posteriores modificaciones del funcional de una forma sencilla.

## 2 Fundamentos Matemáticos

En este punto, vamos a exponer, en primer lugar, un breve resumen sobre los métodos aproximados y más detalladamente sobre el método de Ritz y en segundo lugar el método de resolución de sistemas no lineales llamado método de convergencia global por retroceso (LSB). Se trata de los dos aparatos matemáticos que aplicaremos posteriormente para la elaboración de nuestro algoritmo de optimización. Comenzaremos con una exposición concisa de la teoría general de los métodos aproximados y a continuación desarrollaremos los denominados métodos de proyección y nos centraremos en el conocido como método energético o de Ritz. Se tratarán diversas consideraciones referentes a su convergencia que nos serán de utilidad en nuestro problema de optimización.

### 2.1 Mínimo de una Funcional cuadrática heterogénea

En este momento nos ocuparemos de los métodos de minimización de la funcional  $F$ , de dominio  $D(F) \subseteq H$ , siendo  $H$  un espacio Euclídeo. Veamos de forma somera, los fundamentos del método y las ecuaciones a las que da lugar, dejando para más adelante el estudio de la convergencia para la que deberemos introducir la noción de espacio energético.

Se supone que  $F(x)$  alcanza su valor mínimo  $F_0$  precisamente en el punto  $x^*$ . Entonces se busca un elemento  $x$  que de a  $F$  un valor, en lo posible, próximo a  $F_0$ . Se puede esperar que tal elemento sea próximo al elemento  $x^*$  que da a  $F$  el valor  $F_0$ .

Sea  $G(u, v)$  la funcional bilineal simétrica determinada en  $D(F)$ . A través de  $g(u)$  designamos la funcional cuadrática:  $g(u) = G(u, u)$ , correspondiente a  $G$ .

Observemos que es válida la fórmula análoga a la del cuadrado de la suma:

$$g(x_1 + x_2) = g(x_1) + 2G(x_1, x_2) + g(x_2)$$

Sea  $l$  la funcional lineal, también definida en  $D(F)$  (no es imprescindible que sea acotada). Supongamos que la funcional se ha definido por la fórmula:

$$F(x) = g(x) - 2lx \quad (4.2.1.1)$$

con la particularidad de que la funcional cuadrática homogénea  $g(x)$  es definida positiva, esto es:

$$g(x) > 0 \quad \text{para } x \neq 0, \quad x \in D(F) \quad (4.2.1.2)$$

Además, para que tome sentido el problema de su minimización, presuponemos que  $F$  está acotada inferiormente. El siguiente teorema [35] nos expone el caso en que es fácil comprobar la validez de esta última suposición.

*Teorema 1.* Si la funcional cuadrática  $g$  es coerciva, es decir, si con cierta  $m_0 > 0$  es válida la desigualdad:

$$g(x) \geq m_0 \|x\|^2 \quad (x \in D(F)) \quad (4.2.1.3)$$

y si la funcional  $l$  es acotada, entonces la funcional  $F$  está acotada inferiormente.

Será fundamental en el desarrollo posterior la siguiente definición:

La sucesión  $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$  de los elementos  $D(F)$  se llama minimizadora para la funcional  $F$ , si:

$$F(x^{(n)}) \rightarrow F_0 = \inf F(x)$$

Con este concepto, ya podemos enunciar los siguientes teoremas [35] acerca del comportamiento de la aproximación.

*Teorema 2.*

1) Sea  $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$  la sucesión minimizadora para la funcional (4.2.1.1). Entonces:

$$g(x^{(n)} - x^{(m)}) \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$$

2) Supongamos que además, la funcional  $F$  alcance el valor mínimo en cierto punto  $x^* \in D(F)$ . Entonces:

$$g(x^{(n)} - x^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Corolario.* Si en lugar de la condición (4.2.1.2) se cumple la condición (4.2.1.3), en este caso:

1) si  $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$  es la sucesión minimizadora, entonces:

$$\|x^{(m)} - x^{(n)}\| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$$

2) si además,  $F$  alcanza el mínimo en el elemento  $x^* \in D(A)$ , entonces:

$$x^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^*$$

*Teorema 3.* Si  $F(x)$  alcanza su mínimo en cierto punto  $x^* \in D(F)$ , entonces:

1)  $G(x^*, \xi) = l\xi \quad (\xi \in D(F));$

2)  $F(x^* + \xi) = F(x^*) + g(\xi) \quad (\xi \in D(F));$

3) el mínimo es absoluto, es decir, para cualquier  $x$  de  $D(F)$ , distinto de  $x^*$ ,

$$F(x) > F(x^*)$$

## 2.2 El método de Ritz

Uno de los procedimientos de construcción de la sucesión minimizadora es el proceso de Ritz, a cuya descripción vamos a pasar.

Elegimos el sistema linealmente independiente  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$  de los elementos  $D(F)$ . Daremos a este sistema el nombre de sistema de coordenadas, aunque también es frecuente el nombre de funciones de forma. Introduciremos los subespacios:

$$H^{(n)} = L(u_1, \dots, u_n) \in D(F)$$

donde  $L$  es el símbolo de la clausura lineal.

Se pueden comprobar [36] los siguientes teoremas.

*Teorema 4.* Las funcionales  $g(x)$  y  $lx$  son continuas en cada uno de los espacios  $H^{(n)}$ .

*Teorema 5.* La funcional  $g(x)$  es coerciva en cada uno de los espacios  $H^{(n)}$ , es decir, existen tales constantes positivas  $m_n$  que:

$$g(x) \geq m_n \|x\|^2 \quad (x \in H^{(n)})$$

*Teorema 6.* Sea:

$$F_n = \inf_{x \in H^{(n)}} F(x)$$

Entonces a cada  $n$  en  $H^{(n)}$  hay un elemento  $y$ , además, único, en el que  $F$  adquiere el valor de  $F_n$ .

El proceso de Ritz reside en la construcción de la sucesión  $\{x^{(n)}\}$  por el procedimiento indicado:  $x^{(n)}$  es el elemento que minimiza  $F$  en  $H^{(n)}$ .

Pasemos a la cuestión sobre el modo de hallar  $x^{(n)}$ . Cualquier elemento  $x \in H^{(n)}$  admite la representación:

$$x = \sum_{i=1}^n a_i u_i$$

Si se coloca esta expresión en  $F$ , entonces  $F$  se convierte en la función de los  $n$  argumentos reales  $a_1, \dots, a_n$  para la cual conservamos la misma asignación de  $F$ :

$$F\left(\sum_{i=1}^n a_i u_i\right) = F(a_1, \dots, a_n)$$

En este caso:

$$F(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j G(u_i, u_j) - 2 \sum_{i=1}^n a_i l u_i$$

Es conocido (teorema 6) que esta función alcanza el mínimo en un único punto del espacio  $R^n$ , en el punto  $(a_i^*)_{i=1}^n$ , donde  $a_i^*$  son coeficientes en el desarrollo de  $x^{(n)}$  por los elementos de la base  $(u_1, \dots, u_n)$ . Este punto puede hallarse por el método ordinario, igualando a cero las derivadas de  $F$  respecto a las variables independientes  $a_1, \dots, a_n$ :

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial F}{\partial a_k} &= \sum_{j=1}^n a_j G(u_k, u_j) + \sum_{i=1}^n a_i G(u_i, u_k) - 2l u_k = \\ &= 2 \left[ \sum_{i=1}^n a_i G(u_i, u_k) - l u_k \right] \quad (1 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

Por consiguiente, la determinación de los coeficientes  $a_i^*$  se reduce a la resolución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\sum_{i=1}^n a_i G(u_i, u_k) = l u_k \quad (1 \leq k \leq n) \quad (4.2.2.1)$$

La existencia de solución para este sistema se deduce de los razonamientos antecedentes, para demostrar la unicidad basta establecer que el determinante de la matriz:

$$\Gamma_n \equiv (G(u_i, u_k))_{i,k=1}^n$$

es distinto de cero (con esto será confirmada de nuevo la existencia de solución). Tomemos el espacio lineal  $D(F)$  e introduzcamos en él el producto escalar:

$$(x^{(1)}, x^{(2)})_G = G(x^{(1)}, x^{(2)})$$

Es fácil comprobar que se cumplen las condiciones ordinarias:

$$(x^{(1)}, x^{(2)})_G = (x^{(2)}, x^{(1)})$$

$$(t x^{(1)}, x^{(2)})_G = t (x^{(1)}, x^{(2)})_G \text{ para cualquier } t \in R$$

$$(x, x)_G > 0 \text{ si } x \neq 0.$$

La matriz:

$$\Gamma_n = ((u_i, u_k)_G)_{i,k=1}^n$$

es la matriz de Gramm del sistema de los elementos linealmente independientes  $u_1, \dots, u_n$  y, por eso, su determinante es distinto de cero.

Así, el proceso de Ritz reside en que para cada  $n$  se resuelve el sistema dado y si  $(a_i^*)_{i=1}^n$  es su solución, entonces:

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^n a_i^* u_i$$

Es evidente que todos los resultados de este párrafo son válidos para las funciones de tipo más general:

$$F(x) = g(x) - 2lx + c$$

donde  $c$  es un número real arbitrario.

### 2.3 Convergencia del método de Ritz

En este punto vamos a tratar la convergencia del método de Ritz, aspecto hasta ahora obviado. Para resumir de forma breve este concepto, introduciremos la noción de espacio energético y modificaremos, levemente, la notación utilizada hasta ahora, usando la letra  $u$  para designar el vector de control y  $u_i$  para el sistema de coordenadas. A partir de ahora supondremos que el dominio de definición de  $F$  es un subconjunto de  $H$  y que éste es un espacio de Hilbert.

Consideremos la funcional:

$$F(x) = (Ax, x) - 2(y^*, x) \quad (x \in D(A)) \quad (4.2.3.1)$$

llamada funcional de energía. Se supone que:

a) el operador  $A$  es simétrico, es decir, que para cualesquiera  $u, v \in D(A)$  tiene lugar la relación:

$$(Au, v) = (u, Av) \quad (4.2.3.2)$$

b) la forma bilineal asociada al operador  $A$  es coerciva, esto es, existe el número  $m_0 > 0$  tal que para cualquier  $u \in D(A)$

$$(Au, u) \geq m_0 \|u\|^2 \quad (4.2.3.3)$$

c)  $y^* \in R(A)$

Si suponemos que  $D(F) = D(A)$ ,  $G(u, v) = (Au, v)$ ,  $lu = (u, y^*)$  para  $u, v \in D(F)$ , entonces vemos que a la funcional  $F$  es aplicable lo examinado en 4.2.1 sobre el mínimo de una funcional cuadrática y podemos escribir también:

$$F(x) = g(x) - 2lx$$

Para construir la sucesión minimizadora elegimos el método de Ritz. Tomamos el sistema de coordenadas  $\{u_i\}_{i=1}^\infty \subset D(A)$  y construimos, valiéndonos del proceso de Ritz la sucesión de los elementos  $x^{(n)}$ . En este caso,  $x^{(n)}$  es el elemento  $H^{(n)} = L(u_1, \dots, u_n)$ , en el que  $F$  alcanza el mínimo. El elemento  $x^{(n)}$  lo representaremos de la forma:

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^n a_i^* u_i \quad (4.2.3.4)$$

donde los coeficientes  $a_i^*$  se determinan del sistema:

$$\sum_{i=1}^n a_i (A u_i, u_j) = (y^*, u_j) \quad (1 \leq j \leq n) \quad (4.2.3.5)$$

como puede deducirse a partir del desarrollo general que condujo a la fórmula (4.2.2.1).

Este método se suele conocer con el nombre de método energético combinado con el proceso de Ritz o simplemente método de Ritz, y en él, por el resultado aproximado de  $x^{(n)}$  se adopta el elemento que minimiza la funcional de energía (4.2.3.1) en  $H^{(n)}$ .

Este elemento puede presentarse en la forma (4.2.3.4), donde los coeficientes se hallan del sistema (4.2.3.5).

En este punto hemos hecho tres suposiciones (4.2.3.2), (4.2.3.3) e  $y^* \in R(A)$  que nos van a permitir obtener resultados notables en cuanto a la convergencia del método.

Para estudiar el método energético es muy útil la noción del espacio energético a cuya descripción pasamos.

Definimos el producto escalar energético de la siguiente forma:

$$[u, v] = (A u, v) \text{ para } u, v \in D(A)$$

el cual se comprueba que verifica las propiedades que caracterizan a todo producto escalar:

- 1)  $[v, u] = [u, v]$
- 2)  $[w_1 + w_2, v] = [w_1, v] + [w_2, v]$
- 3)  $[c u, v] = c [u, v] \quad c \in R$
- 4)  $[u, u] \geq 0$

Este producto escalar induce la norma energética:

$$\| u \| = [u, u]^{1/2} \quad (4.2.3.6)$$

y con ambos conceptos  $D(A)$  se convierte en un espacio euclídeo, en general, no completo. Sea  $H_A$  el llenado o completado de  $D(A)$  en la métrica  $\| \cdot \|$ .

El espacio  $H_A$  es un espacio de Hilbert y se le llama espacio energético del operador  $A$ , y de la definición se deduce que  $D(A)$  forma en  $H_A$  un conjunto denso. Además, en virtud de que  $u_i \in D(A)$  se tiene:

$$H^{(n)} \subset D(A) \subset H_A \quad (4.2.3.7)$$

En la figura 1 se ha representado de manera esquemática la relación que existe entre los distintos espacios que han ido apareciendo en este punto. No obstante, hay que hacer constar que tan sólo hemos pretendido ofrecer un pequeño acercamiento al tema, obviando algunos aspectos, de cierta influencia, como puede ser la estabilidad del método.

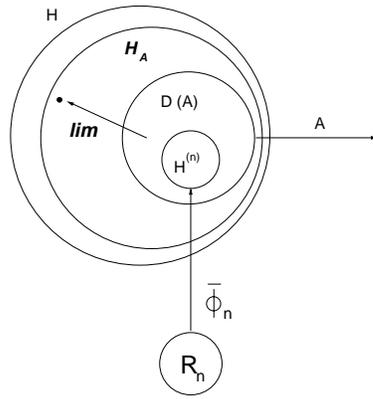


Fig. 1 Esquema del método de Ritz.

Con las definiciones y suposiciones realizadas se pueden demostrar los siguientes teoremas:

*Teorema 7.* La funcional de energía  $F$  alcanza su mínimo en  $H^{(n)}$  en el elemento:

$$x^{(n)} = P_{H^{(n)}}^{H_A} x^*$$

donde  $P_{H^{(n)}}^{H_A}$  es el operador de la proyección ortogonal sobre  $H^{(n)}$  en el espacio energético  $H_A$ .

*Teorema 8.* Sea el sistema de coordenadas completo en  $H_A$ . Entonces  $x^{(n)}$  converge hacia  $x^*$  tanto en la métrica  $H$  como en la métrica  $H_A$ .

## 2.4 El método LSB

La forma general de un sistema de ecuaciones no lineales es:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

donde cada función es una aplicación de un vector  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$  del espacio n-dimensional  $R^n$  en la recta real  $R$ . Alternativamente, el sistema puede representarse definiendo una función  $F$ , de  $R^n$  en  $R^n$  por:

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))^t$$

Usando notación vectorial para representar las variables, el sistema asume la forma:

$$F(x) = 0 \quad (4.2.4.1)$$

La definición de punto fijo que vimos en el capítulo anterior (punto 3.2.8) es básica para resolver ciertos sistemas no lineales.

Aún cuando algunos sistemas pueden transformarse fácilmente en un formato de punto fijo, esto no sucede frecuentemente. En este punto consideraremos un procedimiento algorítmico que puede usarse para realizar la transformación para un problema general.

Sea  $A(x)$  una matriz donde cada una de las componentes  $a_{ij}(x)$  es una función de  $R^n$  a  $R$ :

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} \quad (4.2.4.2)$$

El procedimiento que vamos a desarrollar requiere que se encuentre una matriz  $A(x)$  tal que:

$$G(x) = x - A(x)^{-1}F(x) \quad (4.2.4.3)$$

dé convergencia cuadrática a la solución de (4.2.4.1), siempre que  $A(x)$  sea no singular en el punto fijo de  $G$ . El siguiente teorema [33] verifica que este enfoque puede usarse para motivar la elección de  $A$ .

*Teorema 9.* Supóngase que  $p$  es una solución de  $G(x) = x$  para alguna función  $G = (g_1, g_2, \dots, g_n)^t$  de  $R^n$  en  $R^n$ . Si existe un número  $\delta > 0$  con la propiedad de que:

- i)  $\partial g_i / \partial x_j$  es continua en  $N_\delta = \{x / \|x - p\| < \delta\}$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $j = 1, 2, \dots, n$
- ii)  $\partial^2 g_i(x) / (\partial x_j \partial x_k)$  es continua y  $|\partial^2 g_i(x) / (\partial x_j \partial x_k)| \leq M$  para alguna constante  $M$ , siempre que  $x \in N_\delta$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  y  $k = 1, 2, \dots, n$ .
- iii)  $\partial g_i(p) / \partial x_j = 0$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $j = 1, 2, \dots, n$ .

entonces existe un número  $\bar{\delta} \leq \delta$  tal que la sucesión generada por  $x^{(k)} = G(x^{(k-1)})$  converge cuadráticamente a  $p$  para cualquier  $x^{(0)}$  siempre que  $\|x^{(0)} - p\| < \bar{\delta}$ . Además:

$$\|x^{(k)} - p\|_\infty \leq \frac{n^2 M}{2} \|x^{(k-1)} - p\|_\infty^2 \text{ para cada } k \geq 1$$

Para utilizar este teorema, supongamos que  $A(x)$  es una matriz de  $n \times n$  de funciones de  $R^n$  a  $R$  en la forma de la ecuación (4.2.4.2), donde las componentes se escogerán más adelante. Supongamos, además que  $A(x)$  es no singular cerca de una solución  $p$  de  $F(x) = 0$  y denotemos por  $b_{ij}(x)$  a la componente de  $A(x)^{-1}$  en la  $i$ -ésima fila y en la  $j$ -ésima columna. Como:

$$G(x) = x - A(x)^{-1}F(x)$$

$$g_i(x) = x_i - \sum_{j=1}^n b_{ij}(x)f_j(x)$$

así que:

$$\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_k} = \begin{cases} 1 - \sum_{j=1}^n \left( b_{ij}(x) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(x) f_j(x) \right) & \text{si } i = k \\ - \sum_{j=1}^n \left( b_{ij}(x) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(x) f_j(x) \right) & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

El teorema 9 implica que necesitamos tener  $\partial g_i(p)/\partial x_k = 0$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $k = 1, 2, \dots, n$ . Esto significa que para  $i = k$ :

$$0 = 1 - \sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)$$

así que:

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) = 1 \quad (4.2.4.4)$$

y cuando  $k \neq i$ :

$$0 = - \sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(p)$$

por lo tanto:

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(p) = 0 \quad (4.2.4.5)$$

Definiendo la matriz  $J(x)$  como:

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4.2.4.6)$$

vemos que las condiciones (4.2.4.4) y (4.2.4.5) requieren que  $A(p)^{-1}J(p) = I$ , siendo  $I$  la matriz identidad, de modo que:

$$A(p) = J(p)$$

Una elección apropiada para  $A(x)$  es consecuentemente  $A(x) = J(x)$ , ya que la condición (iii) del teorema 9 se satisface con esta elección. La función  $G$  se define como:

$$G(x) = x - J(x)^{-1}F(x)$$

y el procedimiento de iteración funcional surge de seleccionar  $x^{(0)}$  y de generar, para  $k \geq 1$ :

$$x^{(k)} = G(x^{(k-1)}) = x^{(k-1)} - J(x^{(k-1)})^{-1}F(x^{(k-1)}) \quad (4.2.4.7)$$

Este es el método de Newton para sistemas no lineales y se espera que generalmente dé convergencia cuadrática siempre y cuando se conozca un valor inicial lo suficientemente exacto y que  $J(p)^{-1}$  exista. A la matriz  $J(x)$  se la llama matriz Jacobiana.

Una debilidad clara del procedimiento del método de Newton surge de la necesidad de invertir la matriz  $J(x)$  en cada paso. En la práctica, el método se realiza generalmente en dos etapas. Primero se encuentra un vector  $y$  que satisfaga  $J(x^{(k)})y = -F(x^{(k)})$ . Después de que se ha logrado esto, la nueva aproximación  $x^{(k+1)}$ , puede obtenerse sumando:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + y \quad (4.2.4.8)$$

Volvamos al comienzo y a nuestro sistema de partida:

$$F(x) = 0 \quad (4.2.4.9)$$

Por desgracia el método de Newton tiene cierta tendencia a no converger a la solución si el valor inicial no está lo suficientemente cerca de dicha solución. Un método global es aquel que converge a la solución para casi cualquier punto de partida. El que vamos a describir a continuación lo denominaremos LSB, método global de convergencia por retroceso [58], y combina la rápida convergencia local del método de Newton con una estrategia de convergencia global que garantiza algún progreso hacia la solución en cada iteración.

Acabamos de ver que el paso de Newton y o bien  $\delta x$  podemos construirlo como:

$$\delta x = -J^{-1}F \quad (4.2.4.10)$$

¿Cómo decidiremos si aceptamos el paso de Newton?. Una estrategia razonable es imponer que el paso disminuya  $|F|^2 = F.F$ . Esta es la misma imposición que si estuviéramos intentando minimizar la función auxiliar  $f$ :

$$f = \frac{1}{2}F.F \quad (4.2.4.11)$$

Cada solución de (4.2.4.9) minimiza (4.2.4.11), pero puede haber mínimos locales de (4.2.4.11) que no sean soluciones de (4.2.4.9). Notemos también que el paso de Newton es una dirección de descenso para la función  $f$ , y así su derivada direccional en la dirección de este paso es negativa:

$$\nabla f . \delta x = (F.F) . (-J^{-1}.F) = -F.F < 0$$

De modo que nuestra estrategia será bastante simple: primero siempre probaremos el paso entero de Newton, ya que una vez que estemos suficientemente cerca de la solución conseguiremos convergencia cuadrática. Sin embargo, comprobaremos en cada iteración que el

paso propuesto reduce  $f$ . Si no es así, retrocederemos a lo largo de la dirección de Newton hasta encontrar un paso aceptable. Debido a que el paso de Newton es una dirección de descenso para  $f$ , tenemos garantizado encontrar un paso aceptable por retroceso.

Cuando no estemos demasiado cerca del mínimo de  $f$ , tomando el paso entero de Newton  $p = \delta x$ , no necesariamente disminuye la función. Todo lo que tenemos garantizado es que inicialmente  $f$  disminuye al moverse en la dirección de Newton. De modo que el objetivo es pasar a un nuevo punto  $x_n$ , a partir del antiguo  $x_a$ , a lo largo de la dirección  $p$ , pero no necesariamente todo el paso:

$$x_n = x_a + \lambda p \quad 0 < \lambda \leq 1$$

El objetivo es encontrar  $\lambda$  de modo que  $f(x_a + \lambda p)$  haya disminuido lo suficiente. Hasta la década de los 70, la práctica habitual era elegir  $\lambda$  de modo que  $x_n$  minimizara exactamente  $f$  en la dirección  $p$ . Desgraciadamente, esta es una tarea que requiere un gran número de evaluaciones. Parece un mejor camino el siguiente.

Definimos:

$$g(\lambda) = f(x_a + \lambda p)$$

de modo que:

$$g'(\lambda) = \nabla f \cdot p$$

Primero probaremos el paso entero:  $\lambda = 1$ . Si  $f(x_n)$  no cumple nuestro criterio, retrocederemos a lo largo de la dirección  $p$ , probando valores menores de  $\lambda$  hasta encontrar un punto aceptable. Como la dirección de Newton es una dirección de descenso, tenemos garantizado disminuir  $f$  para valores suficientemente pequeños de  $\lambda$ .

Si necesitamos retroceso, modelizaremos  $g$  (o la aproximaremos) según la información más reciente que dispongamos, y elegiremos  $\lambda$  de modo que minimice este modelo. Comenzamos conociendo  $g(0)$  y  $g'(0)$ . El primer paso es siempre  $\lambda = 1$ . Si este paso no es aceptable, conocemos también  $g(1)$ . Por tanto, podemos modelizar  $g(\lambda)$  en forma cuadrática:

$$g(\lambda) = [g(1) - g(0) - g'(0)]\lambda^2 + g'(0)\lambda + g(0)$$

Derivando este polinomio de segundo grado, encontramos el mínimo cuando:

$$\lambda = -\frac{g'(0)}{2(g(1) - g(0) - g'(0))}$$

En el segundo y en los sucesivos retrocesos, modelizamos  $g$  según un polinomio de tercer grado en  $\lambda$ , usando el valor previo  $g(\lambda_1)$  y el valor más reciente  $g(\lambda_2)$ :

$$g(\lambda) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + g'(0)\lambda + g(0) \quad (4.2.4.12)$$

Un esquema del proceso seguido para modelizar  $g(\lambda)$  podemos verlo en la figura 2. A la izquierda aparece el primer polinomio de tercer grado que se basa en  $\lambda = 1$ . Y a la derecha el segundo polinomio, el cual usa los valores más recientes calculados.

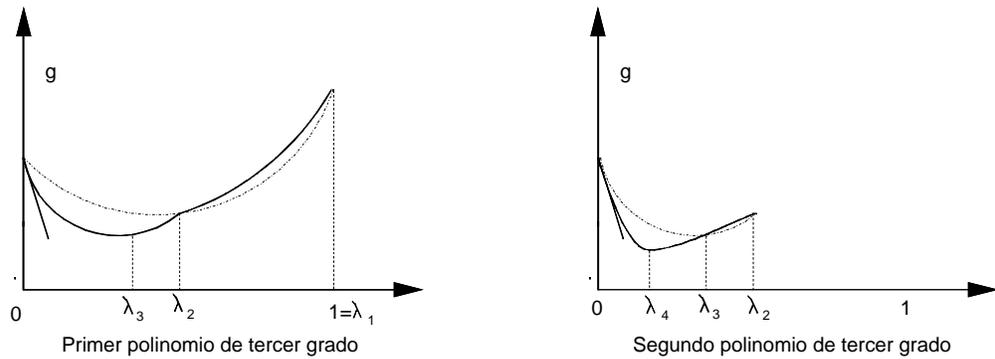


Fig. 2 Esquema del método LSB.

Imponiendo que este polinomio pase por los dos últimos puntos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se obtienen los valores de los coeficientes incógnita  $a$  y  $b$ :

$$a = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( \frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2} \right) [g(\lambda_1) - g'(\lambda_1)\lambda_1 - g(0)]$$

$$b = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2} \right) [g(\lambda_2) - g'(\lambda_2)\lambda_2 - g(0)]$$

Y el mínimo de (4.2.4.12) se obtiene cuando:

$$\lambda = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ag'(0)}}{3a}$$

El proceso continua con el polinomio cúbico hasta superar la tolerancia del criterio.

En cuanto al criterio para aceptar un determinado paso, debemos tener en cuenta que no es suficiente imponer tan sólo que:  $f(x_n) < f(x_a)$ . Este criterio puede fallar de dos maneras.

Primero, es posible construir una secuencia de pasos que satisfaga el criterio anterior, pero que decrezca  $f$  demasiado despacio. En segundo lugar, la sucesión puede tomar pasos demasiado pequeños.

Una manera de evitar el primer problema es imponer una tasa media de disminución de  $f$  de acuerdo a cierta fracción  $\alpha$  del decrecimiento inicial  $\nabla f.p$ :

$$f(x_n) \leq f(x_a) + \alpha \nabla f.p$$

El segundo problema no se produce en la práctica, ya que nuestro algoritmo incorporará una especificación que impedirá tomar pasos demasiado pequeños.

Con esta teoría se elaboró un programa de ordenador en lenguaje FORTRAN 90, que nos permitió resolver sistemas de ecuaciones no lineales de grandes dimensiones (más de 300 ecuaciones) sin tener especial cuidado en elegir los valores iniciales. Sobre este tema se incide en el punto 4.7, al comentar el ejemplo resuelto.

### 3 Planteamiento del problema

Veamos a continuación, en qué espacios funcionales nos moveremos y qué tipo de operadores de trabajo van aplicarse entre ellos para el planteamiento del problema en términos de minimizar un cierto funcional de costo.

#### 3.1 Espacios y Operadores

Recordemos que un espacio de Hilbert, es un espacio vectorial  $E$  en el que se ha definido un producto escalar  $(E, [ \cdot, \cdot ])$  (espacio prehilbertiano), y que además es completo respecto a la norma asociada a dicho producto escalar.

Recordemos también que un operador lineal es una aplicación entre dos espacios:

$$T: X \rightarrow Y$$
$$x \rightarrow T(x)$$

que cumple la propiedad de que:

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad y \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in R$$
$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2)$$

y que el operador está acotado si se verifica que:

$$\|T(x)\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in X$$

Definimos para su posterior utilización los siguientes espacios de Hilbert y los siguientes operadores:

1) Espacio  $R^n$

Sus elementos son de la forma:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

En cuanto al producto escalar definido en este espacio, es el conocido producto escalar euclídeo que viene dado por:

$$\langle x, y \rangle = x^T y$$
$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

2) Espacio  $L^n[0, T_f] \equiv H$

Los elementos de este espacio de Hilbert son vectores de  $n$  componentes, cada una de ellas funciones del tiempo, de cuadrado integrable en el intervalo  $[0, T_f]$ :

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \quad v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix} \quad (4.3.1.1)$$

En este espacio está definido el producto escalar a través de la integral:

$$(v(t), u(t)) = \int_0^{T_f} v^T(t)u(t)dt$$

Veremos más adelante el operador simétrico:

$$A: H \text{-----} \rightarrow H$$

$$A[u(t)] = Bu(t)$$

función de la matriz simétrica  $B$ , el cual nos permitirá definir el producto escalar energético.

3) Espacio  $L_{2B}^n[0, T_f] \equiv H_A$

Este es el que llamaremos espacio energético, sus elementos son los mismos que para  $H$ , es decir (4.3.1.1), pero el producto escalar se define de la siguiente forma:

$$[v(t), u(t)] = (Av, u) = \int_0^{T_f} v^T(t)B(t)u(t)dt$$

A este producto escalar le llamamos producto escalar energético.

Veremos en los siguientes puntos el operador lineal acotado:

$$T: L_{2B}^n[0, T_f] \text{-----} \rightarrow R$$

$$J = T[u(t)]$$

$$J = \int_0^{T_f} L^T u(t)dt$$

en donde  $L$  es un vector, que definiremos más adelante.

Sabemos que al ser  $B$  simétrica se verifica:  $(Bv)^T = v^T B$ , y podemos observar que la norma inducida por el producto escalar energético es:

$$\|u(t)\|_A^2 = [u(t), u(t)] = (Au, u) = \int_0^{T_f} u^T(t)B(t)u(t)dt$$

Más adelante utilizaremos que:

$$(Au, u) \geq m_0 \|u\|^2 \text{ con } m_0 \geq 0$$

es decir, que la forma bilineal asociada al operador  $A$  es coerciva.

Comprobaremos más tarde que  $B(t)$  es una matriz simétrica y definida positiva, cuyos elementos son también funciones del tiempo, de la forma:

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

### 3.2 Funcional de costo

Vamos a suponer que nuestro sistema consta de  $W$  cuencas hidráulicas. Para no complicar en exceso la notación trabajaremos en lo sucesivo con una sola cuenca y al final extenderemos el resultado al sistema completo.

Al igual que en el capítulo anterior nuestro sistema consta de  $n$  centrales eléctricas, de las cuales  $m$  son térmicas y el resto hidráulicas, situadas en una sola cuenca. Las centrales hidráulicas se distribuyen como se indica en la figura 2.9, y están acopladas hidráulicamente. El problema consiste en calcular las potencias generadas en las centrales, para que un cierto funcional sea mínimo, durante un intervalo de tiempo determinado.

Este capítulo tiene como fin último minimizar un funcional de costo que considere diversos objetivos. Pero podemos, con objeto de simplificar el planteamiento inicial, plantear el problema tradicional de minimizar el costo de combustible, y al final del capítulo generalizar a optimizaciones combinadas muy fácilmente. Es decir, en una primera fase tendremos que minimizar el funcional:

$$J = \int_0^{T_f} \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i P_{si}(t) + \gamma_i P_{si}^2(t)) dt$$

sometido a una serie de restricciones.

La primera, la ecuación de equilibrio de potencia activa que define el modelo uninodal de red eléctrica:

$$\sum_{i=1}^n P_i(t) = P_D(t) + P_L(t)$$

Utilizando la fórmula de pérdidas, vista anteriormente, esta restricción la podemos expresar de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i(t) B_{ij} P_j(t) + \sum_{i=1}^n (B_{io} - 1) P_i(t) + P_D(t) + K_{LO} = 0 \quad (4.3.2.1)$$

Las otras restricciones que tendremos que tener en cuenta serán las ecuaciones de funcionamiento de la red hidráulica según vimos en el capítulo 2:

$$q_{m+i}(t) - \dot{Q}_{m+i}(t) = 0 \quad (i \in R_h) \quad \text{ó} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-m \quad (4.3.2.2)$$

$$P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t)q_{m+i}(t) + B_{m+i}q_{m+i}(t)Q_{m+i}(t) + C_{m+i}q_{m+i}^2(t) = 0 \quad (i \in R_{hCA})$$

$$P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t)q_{m+i}(t) - B_{m+i}q_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j) + B_{m+i}q_{m+i}(t)Q_{m+i}(t) + C_{m+i}q_{m+i}^2(t) = 0 \quad (i \in R_{hID}) \quad (4.3.2.3)$$

recordando que  $R_{hCA}$  es la unión de las plantas cabecera y aisladas y que  $R_{hID}$  es la unión de las plantas intermedias y desembocadura.

Elevando la variable  $Y$  al cuadrado, obtendremos la cuarta restricción:

$$Y_j^2(t, \tau_j) = \begin{cases} \Psi_j^2(t, \tau_j) & 0 \leq t \leq \tau_j \\ \Psi_j^2(\tau_j, \tau_j) + Q_j^2(t - \tau_j) + 2\Psi_j(\tau_j, \tau_j)Q_j(t - \tau_j) & \tau_j < t \leq T_f \end{cases} \quad (j \in R_{hi}) \quad (4.3.2.4)$$

Y por último, el volumen de agua disponible durante el intervalo de optimización en la central hidráulica  $i$  es como ya vimos  $b_i$  y por tanto, en cada central hidráulica se tendrá que cumplir:

$$\int_0^{T_f} q_{m+i}(t) dt = b_{m+i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-m \quad (4.3.2.5)$$

Junto con estas restricciones introducimos unas funciones multiplicadoras, que vamos a llamar  $l(t)$ ,  $m_i(t)$ ,  $n_i(t)$ , y  $r_i(t)$ , para las cuatro primeras restricciones, (4.3.2.1), (4.3.2.2), (4.3.2.3) y (4.3.2.4) respectivamente.

La última restricción (4.3.2.5) la incluiremos en el funcional de costo mediante el multiplicador constante  $\mu_i$ , que no depende del tiempo, pues la restricción asociada, se refiere a todo el intervalo de optimización. Incluimos en el funcional de costo los multiplicadores y las restricciones asociadas, quedando de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} J = & \int_0^{T_f} \left\{ \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i P_{si}(t) + \gamma_i P_{si}^2(t)) + \right. \\ & + l(t) \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i(t) B_{ij} P_j(t) + \sum_{i=1}^n (B_{io} - 1) P_i(t) + P_D(t) + K_{LO} \right] + \\ & + \sum_{i \in R_h} m_{m+i}(t) [q_{m+i}(t) - \dot{Q}_{m+i}(t)] + \\ & + \sum_{i \in R_{hCA}} n_{m+i}(t) [P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t)q_{m+i}(t) + B_{m+i}q_{m+i}(t)Q_{m+i}(t) + C_{m+i}q_{m+i}^2(t)] + \\ & + \sum_{i \in R_{hID}} n_{m+i}(t) \left[ P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t)q_{m+i}(t) - B_{m+i}q_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j) + B_{m+i}q_{m+i}(t)Q_{m+i}(t) + C_{m+i}q_{m+i}^2(t) \right] + \\ & \left. + \sum_{i \in R_{hID}} \sum_{j \in R_{hi}} r_j(t) Y_j^2(t, \tau_j) \right\} dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i \in R_{HD}} \sum_{j \in R_{hi}} \int_0^{\tau_j} r_j(t) \Psi_j^2(t, \tau_j) dt + \\
& - \sum_{i \in R_{HD}} \sum_{j \in R_{hi}} \int_{\tau_j}^{T_f} r_j(t) [\Psi_j^2(\tau_j, \tau_j) + Q_j^2(t - \tau_j) + 2\Psi_j(\tau_j, \tau_j) Q_j(t - \tau_j)] dt + \\
& + \int_0^{T_f} \sum_{i \in R_h} \mu_{m+i} q_{m+i}(t) dt - \sum_{i \in R_h} \mu_{m+i} b_{m+i} \tag{4.3.2.6}
\end{aligned}$$

En esta expresión, vamos a eliminar los términos  $P_D(t)$  y  $\Psi_j(t, \tau_j)$  que no dependen explícitamente del vector de control, es decir que no son variables susceptibles de optimizar. La primera por ser un dato impuesto al sistema, y la segunda por estar definida en un intervalo de tiempo anterior al intervalo de optimización.

Despreciaremos también las constantes asociadas al problema  $\alpha_i$  y  $K_{LO}$ , dada su casi nula repercusión en el resultado final.

A continuación, hacemos una serie de transformaciones en este funcional de costo modificado, integrando por partes, ya que ello no va a influir en el proceso de minimización y produce una expresión más simplificada y sin retraso en la variable  $Q(t)$ . Modificamos los términos del funcional que se indican utilizando las nuevas variables auxiliares:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_i(t, \tau_j) &= \begin{cases} 2\Psi_i(\tau_i, \tau_i) r_i(t + \tau_i) & 0 \leq t \leq T_f - \tau_i \\ 0 & T_f - \tau_i < t \leq T_f \end{cases} \\
\theta_i(t, \tau_i) &= \begin{cases} r_i(t + \tau_i) & 0 \leq t \leq T_f - \tau_i \\ 0 & T_f - \tau_i < t \leq T_f \end{cases}
\end{aligned}$$

1) En primer lugar (y para cualquier tipo de central):

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_f} B_{m+i} n_{m+i}(t) q_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) dt = (1) \\
& u = n_{m+i}(t) \quad du = \dot{n}_{m+i}(t) dt \\
& dv = \dot{Q}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) dt \quad v = \frac{Q_{m+i}^2(t)}{2} \\
(1) &= B_{m+i} \left[ n_{m+i}(t) \frac{Q_{m+i}^2(t)}{2} \right]_0^{T_f} - \int_0^{T_f} B_{m+i} \dot{n}_{m+i}(t) \frac{Q_{m+i}^2(t)}{2} dt
\end{aligned}$$

Despreciando los términos que no dependen de  $u(t)$  y que por tanto no van a influir en la minimización, podemos expresar el integrando de la forma:

$$-\frac{B_{m+i} \dot{n}_{m+i}(t)}{2} Q_{m+i}^2(t)$$

2) En segundo lugar (y también para  $i \in R_h$ ):

$$\int_0^{T_f} m_{m+i}(t) \dot{Q}_{m+i}(t) dt = (1)$$

$$u = m_{m+i}(t) \quad du = \dot{m}_{m+i}(t) dt$$

$$dv = \dot{Q}_{m+i}(t) dt \quad v = Q_{m+i}(t)$$

$$(1) = [m_{m+i}(t) Q_{m+i}(t)]_0^{T_f} - \int_0^{T_f} \dot{m}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) dt$$

Despreciando los términos que no dependen de  $u(t)$ , podemos expresar el integrando de la forma:

$$\dot{m}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t)$$

3) Tomemos ahora la expresión:

$$\int_{\tau_j}^{T_f} r_j(t) [Q_j(t - \tau_j)]^2 dt = (1)$$

$$t - \tau_j = z \quad dt = dz$$

$$(1) = \int_0^{T_f - \tau_j} r_j(z + \tau_j) Q_j^2(z) dz = \int_0^{T_f} \theta_j(t, \tau_j) Q_j^2(t) dt$$

4) A continuación, efectuamos el mismo cambio de variable en la integral:

$$\int_{\tau_j}^{T_f} 2r_j(t) \Psi_j(\tau_j, \tau_j) Q_j(t - \tau_j) dt = (1)$$

$$t - \tau_j = z \quad dt = dz$$

$$(1) = \int_0^{T_f - \tau_j} 2r_j(t + \tau_j) \Psi_j(\tau_j, \tau_j) Q_j(t) dt = (2)$$

y mediante integración por partes:

$$dv = 2r_j(t + \tau_j) \Psi_j(\tau_j, \tau_j) dt = \dot{p}_j(t, \tau_j) dt \quad v = p_j(t, \tau_j)$$

$$u = Q_j(t) \quad du = q_j(t)$$

$$(2) = [Q_j(t) p_j(t, \tau_j)]_0^{T_f} - \int_0^{T_f} p_j(t, \tau_j) q_j(t) dt =$$

$$= - \int_0^{T_f} p_j(t, \tau_j) q_j(t) dt$$

Con estas transformaciones podemos expresar finalmente el funcional aumentado en la forma:

$$J = \int_0^{T_f} I dt \quad \text{donde:} \quad I = I_E + I_H$$

La primera parte del integrando incluye los términos eléctricos y la segunda los términos hidráulicos y su desarrollo es el siguiente:

$$I_E = \sum_{i=1}^m (\beta_i P_{si}(t) + \gamma_i P_{si}^2(t)) + l(t) \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i(t) B_{ij} P_j(t) - \sum_{i=1}^n (1 - B_{io}) P_i(t) \right] + \sum_{i \in R_h} n_{m+i}(t) P_{hm+i}(t)$$

La segunda parte del integrando incluye las restricciones hidráulicas (excepto el término de  $P_{hm+i}(t)$ ):

$$J_h = \int_0^{T_f} \left\{ \sum_{i \in R_h} [n_{m+i}(t) (A_{m+i}(t) q_{m+i}(t) + C_{m+i} q_{m+i}^2(t)) + \frac{B_{m+i} \dot{n}_{m+i}(t)}{2} Q_{m+i}^2(t) + m_{m+i}(t) q_{m+i}(t) + \dot{m}_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + \mu_{m+i} q_{m+i}(t)] - \sum_{i \in R_{HD}} \left[ B_{m+i} n_{m+i}(t) q_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j) \right] + \sum_{i \in R_{HD}} \sum_{j \in R_{hi}} r_j(t) Y_j^2(t, \tau_j) \right\} dt - \sum_{i \in R_{HD}} \sum_{j \in R_{hi}} \int_0^{T_f} [\theta_j(t, \tau_j) Q_j^2(t) - p_j(t, \tau_j) q_j(t)] dt - \sum_{i \in R_h} \mu_{m+i} b_{m+i}$$

Una vez formado el funcional de costo aumentado y modificado debemos expresarlo en forma matricial para poderle aplicar los resultados del método de Ritz, identificando tanto los operadores, como las funcionales de trabajo.

Vamos a utilizar la misma notación, y a seguir los mismos pasos que ya vimos en el punto 3.3, cuando aplicamos el teorema de la norma mínima. Como se puede comprobar fácilmente se obtienen prácticamente los mismos resultados que allí, variando tan sólo la expresión de los subvectores  $I_{wi}(t)$ .

Por comodidad, sustituimos la notación de subíndices ( $m+i$ ), con  $i = 1, \dots, n-m$ , por los subíndices ( $i$ ), con  $i = 1, \dots, n$  o bien  $i \in R_h$ .

Definiremos:

1) El vector de control:

$$u(t) = \begin{bmatrix} P(t) \\ W(t) \end{bmatrix}$$

formado por los siguientes subvectores:

$P(t)$ : que incluye las potencias activas de todas las plantas generadoras del sistema.

$W(t) = \text{col}[W_i(t) : i \in R_h]$

con dimensión y definición diferente según la categoría de la planta a la que se refiera:

$$W_i(t) = \begin{bmatrix} Q_i(t) \\ q_i(t) \end{bmatrix} \quad (i \in R_{hCA})$$

$$W_i(t) = \begin{bmatrix} Q_i(t) \\ q_i(t) \\ Y_{iw}(t) \end{bmatrix}$$

con

$$Y_{iw}(t) = \text{col}[Y_j(t, \tau_j) : j \in R_{hi}] \quad (i \in R_{hd})$$

2) El vector auxiliar:

$$L(t) = \begin{bmatrix} L_p(t) \\ L_w(t) \end{bmatrix}$$

donde:

$$L_p(t) = \begin{bmatrix} \beta_1 - l(t)(1 - B_{1o}) \\ \beta_2 - l(t)(1 - B_{2o}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_m - l(t)(1 - B_{mo}) \\ n_{m+1}(t) - l(t)(1 - B_{m+1o}) \\ n_{m+2}(t) - l(t)(1 - B_{m+2o}) \\ \vdots \\ \vdots \\ n_n(t) - l(t)(1 - B_{no}) \end{bmatrix}$$

$$L_w(t) = \text{col}[L_{wi}(t) : i \in R_h]$$

con

$$L_{wi}(t) = \text{col}[\dot{m}_i(t), I_{wi}(t)]$$

donde los subvectores  $I_{wi}(t)$  vuelven a depender del tipo de planta y toman ahora la forma:

$$I_{wi}(t) = [m_i(t) + n_i(t)A_i(t) + p_i(t, \tau_i) + \mu_i] \quad (i \in R_{hc})$$

$$I_{wi}(t) = [m_i(t) + n_i(t)A_i(t) + \mu_i] \quad (i \in R_{ha})$$

$$I_{wi}(t) = \text{col}[m_i(t) + n_i(t)A_i(t) + \mu_i, 0_i] \quad (i \in R_{hd})$$

$$I_{wi}(t) = \text{col}[m_i(t) + n_i(t)A_i(t) + p_i(t, \tau_i) + \mu_i, 0_i] \quad (i \in R_{hi})$$

Vemos como aparece en su expresión el parámetro  $\mu_i$ , el cual no estaba presente en el planteamiento del punto 3.3. En las expresiones anteriores  $0_i$  es un vector de ceros, de dimensión el número de plantas que alimentan a la  $i$ -ésima.

3) La matriz cuadrada y simétrica:

$$B(t) = \text{diag}[B_p(t), B_w(t)] \quad \text{o bien:}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} B_p(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \underset{n \times n}{B_p(t)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{m+1}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_{m+2}(t) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_n(t) \end{bmatrix}$$

donde:

$$B_p(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1 + B_{11}l(t) & B_{12}l(t) & \dots & B_{1m}l(t) & \cdot & \dots & B_{1n}l(t) \\ B_{21}l(t) & \gamma_2 + B_{22}l(t) & \dots & B_{2m}l(t) & \cdot & \dots & B_{2n}l(t) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ B_{m+11}l(t) & B_{m+12}l(t) & \dots & \cdot & B_{m+1m+1}l(t) & \dots & B_{m+1n}l(t) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ B_{n1}l(t) & B_{n2}l(t) & \dots & B_{nm}l(t) & \cdot & \dots & B_{nn}l(t) \end{bmatrix}$$

La matriz  $B_w(t)$  es diagonal por bloques y las submatrices  $B_{wi}(t)$  de que consta son, según la categoría de las plantas:

$$B_{wi}(t) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2}B_i n_i(t) + \theta_i(t, \tau_i)\right) & 0 \\ 0 & C_i n_i(t) \end{bmatrix} \quad (i \in R_{hC})$$

$$B_{wi}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}B_i n_i(t) & 0 \\ 0 & C_i n_i(t) \end{bmatrix} \quad (i \in R_{hA})$$

Para las plantas desembocadura, la dimensión de esta matriz depende del número de plantas que las alimentan:

$$B_{wi}(t) = \text{diag}\left[-\frac{1}{2}B_i n_i(t), B_{wai}(t)\right]$$

$$B_{wai}(t) = \begin{bmatrix} C_i n_i(t) & B_{wni}^T(t) \\ B_{wni}(t) & B_{wri}(t) \end{bmatrix}$$

La submatriz  $B_{wri}(t)$  es diagonal de dimensión el número de plantas que alimentan a la de trabajo:

$$B_{wri}(t) = \text{diag}[r_j(t) : j \in R_{hi}]$$

y el vector  $B_{wni}(t)$  es de dimensión compatible y tiene todas sus componentes de igual valor:

$$B_{wni}(t) = \text{col}\left[-\frac{1}{2}B_i n_i(t), \dots\right] \quad (i \in R_{hD})$$

Para las plantas intermedias se obtiene una matriz casi idéntica a la anterior, salvo que aparece la función  $\theta_i$ :

$$B_{wi}(t) = \text{diag} \left[ -\frac{1}{2}(B_i n_i(t) + \theta_i(t, \tau_i)), B_{wai}(t) \right] \quad (i \in R_{hi})$$

Teniendo en cuenta, ahora, el vector  $L(t)$  y la matriz  $B(t)$ , se puede ver fácilmente que el funcional de costo se puede expresar de la siguiente forma:

$$J[u(t)] = \int_0^{T_f} [L^T(t)u(t) + u^T(t)B(t)u(t)] dt \quad (4.3.2.7)$$

Recordemos que estamos considerando a  $u(t)$  un elemento del espacio de Hilbert  $L_{2B}^D[0, T_f]$  cuyos elementos son vectores de  $D$  componentes, cada una de las cuales son funciones del tiempo definidas en el intervalo  $[0, T_f]$  y de cuadrado integrable. La dimensión  $D$  depende de la ramificación que presente el sistema y no se puede determinar a priori.

La última restricción arrastra fuera de la integral extendida al intervalo de optimización, una serie de constantes que agruparemos como:

$$c = - \sum_{i \in R_h} \mu_i b_i \quad (4.3.2.8)$$

Por tanto, y en resumen, el funcional de costo aumentado con las restricciones del sistema se puede expresar en forma matricial del modo siguiente:

$$J[u(t)] = \int_0^{T_f} [u^T(t)B(t)u(t)] dt + \int_0^{T_f} [L^T(t)u(t)] dt + c \quad (4.3.2.9)$$

siendo  $B$ ,  $L$  y  $c$  operadores definidos con antelación.

### 3.3 Comprobación de las condiciones del método de Ritz

Hemos visto en los puntos 4.2.2 y 4.2.3, las condiciones y la forma que tenía que tener un problema para poder ser resuelto con ciertas garantías por el método de Ritz. A la vista del planteamiento general que acabamos de realizar, verifiquemos que efectivamente nos encontramos dentro de dichas condiciones, y efectuemos estas comprobaciones en los siguientes pasos.

1) Comencemos por los espacios de trabajo. Trabajaremos con estos espacios de Hilbert: el espacio  $n$ -dimensional  $R^n$  dotado del producto escalar habitual y donde la dimensión será uno en la formación del funcional de costo, el espacio  $L^n[0, T_f]$  o espacio  $H$  y  $L_{2B}^n[0, T_f]$ , espacio energético del vector de control, en el que se ha definido el producto escalar a través de la matriz  $B$  y de la integral extendida al intervalo de optimización. Señalemos que en el vector de control  $u(t)$  se han incluido todas las variables controlables del sistema, y que estas serán nuestras variables de trabajo.

2) Veamos ahora la funcional cuadrática heterogénea. Según la teoría de Ritz ésta debía tener la forma:

$$F(u) = g(u) - 2lu + c$$

siendo  $g(u)$  la funcional bilineal, homogénea, simétrica, y coerciva,  $lu$  la funcional lineal y acotada y  $c$  un término constante.

Si suponemos que  $D(F) = D(A)$ ,  $G(u, v) = (Au, v)$ , para  $u, v \in D(F)$ , entonces vemos que la funcional cuadrática heterogénea  $F$  la podemos escribir también:

$$F(u) = (Au, u) - 2lu + c \quad (u \in D(A))$$

Y nosotros hemos llegado (4.3.2.9) a:

$$J[u(t)] = \int_0^{T_f} [u^T(t)B(t)u(t)] dt + \int_0^{T_f} [L^T(t)u(t)] dt + c \quad (4.3.3.1)$$

Utilizando los operadores definidos en el punto anterior, podemos identificar:

$$G(u, u) = (Au, u) = \int_0^{T_f} [u^T(t)B(t)u(t)] dt$$

$$l.u = \int_0^{T_f} [L^T(t)u(t)] dt$$

$$c = - \sum_{i \in R_h} \mu_i b_i$$

y llegar a la conclusión de que tenemos planteado el mismo problema de minimización tal y como se desarrolló en los puntos 4.2.2 y 4.2.3.

3) En tercer lugar las condiciones que debían verificar y cuya comprobación se puede realizar con las definiciones precedentes eran:

i)  $g(u)$  : funcional simétrica y coerciva.

ii)  $l(u)$  : funcional lineal, acotada.

La linealidad de  $l(u)$  se deduce inmediatamente de la linealidad del vector  $L^T$  que vimos anteriormente. En cuanto a la demostración de la simetría y coercividad de  $g(u)$  y a la acotación de  $l(u)$  veáse [24].

Con estas dos suposiciones recordemos que se aseguraba que  $F$  estuviera acotada inferiormente (teorema 1), y que junto con la noción de espacio energético  $H_A$  que definimos, nos permite afirmar que la sucesión minimizadora de Ritz converge a la solución exacta.

4) En cuanto a los sistemas de coordenadas o funciones de forma con las que vamos a trabajar, en una primera aproximación y hablando en general se acepta que los sistemas de potencias dan malos resultados en cuanto a la estabilidad, si bien demuestran una gran rapidez de convergencia en comparación con los sistemas trigonométricos que son considerados, en general, lentos.

Por ello son preferibles otros sistemas algebraicos, como los sistemas de polinomios ortogonales bajo algún peso (como los polinomios de Legendre u otros).

En todo caso, aseguraremos la convergencia (teorema 8), escogiendo un sistema de coordenadas completo en el espacio energético  $H_A$ . El sistema algebraico de potencias:

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad u_i = \begin{pmatrix} t^i \\ t^i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t^i \end{pmatrix}, \quad \dots$$

en donde cada vector tiene  $n$  componentes, es completo en dicho espacio, como puede verse en [55], con lo que queda probada la convergencia de nuestras aproximaciones.

En resumen, y a la vista de todos estos resultados, para el posterior problema de aproximación, elegiremos estos sistemas algebraicos de potencias cumpliendo nuestras condiciones límite, y tomando tan sólo los primeros términos, para evitar la inestabilidad y aprovechar su rapidez de convergencia.

#### 4 Solución Óptima

En este punto vamos a desarrollar el método aproximado de Ritz, para el problema de optimización que tenemos planteado. Ya hemos comprobado previamente la validez de dicha teoría y ahora sólo nos queda su aplicación. El primer paso va a consistir en una discretización del problema, para una vez así simplificado, elegir los sistemas de coordenadas que van a servir para aproximar nuestras incógnitas. A continuación se eliminarán ciertas variables y por tanto, desaparecerán los multiplicadores asociados a ellas.

Una vez así formulado el problema, nuestro funcional va a depender de  $n$  variables reales, siendo este problema clásico resuelto mediante la teoría de la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas.

##### 4.1 Discretización del problema

Para discretizar el sistema dividimos el intervalo de optimización  $[0, T_f]$  en  $q$  subintervalos (siendo  $q$  un número entero), eligiendo así los nodos:

$$j = 1, 2, \dots, q$$

para resolver el problema. El retraso en el transporte en la central  $i$ ,  $\tau_i$  supondremos que es un múltiplo de  $T_f/q$ . De este modo, lo más habitual será considerar un intervalo de optimización que abarque 24 horas,  $[0, 24]$ , dividir dicho intervalo en 24 nodos,  $j = 1, 2, \dots, 24$  y considerar retrasos que sean múltiplos de 1 hora. Es lógico pensar que cuanto mayor sea el número de nodos elegido, mayor será la proximidad entre el problema discreto planteado, y el problema no estacionario

original. No obstante, debe pensarse siempre en el problema real de fondo y darse cuenta que nuestras centrales, tanto térmicas como hidráulicas, tienen una maniobrabilidad limitada que impide tomar nodos en intervalos demasiado pequeños.

En todo el desarrollo posterior supondremos despreciables los coeficientes de pérdidas:  $B_{io}$  y  $B_{ij}$  con  $i \neq j$ , obteniendo para la ecuación de equilibrio de la red:

$$\sum_{i=1}^n B_{ii} P_i^2(t) - \sum_{i=1}^n P_i(t) + P_D(t) = 0$$

Además, como resultado de la discretización, podemos sacar fuera de la integral la restricción de equilibrio de potencia activa y el conjunto de restricciones que representan el volumen máximo de agua a turbinar en cada central (las otras restricciones nos interesa mantenerlas dentro para posteriores modificaciones). Con lo cual pasamos a tener el problema de optimización planteado en cada uno de los nodos.

Comentar también que planteamos el problema en su forma original, sin necesidad de incluir las variables auxiliares  $\dot{p}_i$  y  $\theta_i$ , cuya misión era eliminar el retraso en el transporte de la variable  $Q_i$ , y completar la integral, extendiéndola a todo el intervalo de optimización. Con todo ello:

$$\begin{aligned} J = & \int_0^{T_f} \left\{ \sum_{i=1}^m (\beta_i P_{si}(t) + \gamma_i P_{si}^2(t)) + \right. \\ & + \sum_{i \in R_h} m_{m+i}(t) [q_{m+i}(t) - \dot{Q}_{m+i}(t)] + \\ & + \sum_{i \in R_{hCA}} n_{m+i}(t) [P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t) q_{m+i}(t) + B_{m+i} q_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + C_{m+i} q_{m+i}^2(t)] + \\ & + \sum_{i \in R_{HD}} n_{m+i}(t) \left[ P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t) q_{m+i}(t) - B_{m+i} q_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j) + B_{m+i} q_{m+i}(t) Q_{m+i}(t) + C_{m+i} q_{m+i}^2(t) \right] + \\ & + \sum_{i \in R_{HD}} \sum_{j \in R_{hi}} r_j(t) Y_j^2(t, \tau_j) \Big\} dt + \\ & - \sum_{i \in R_{HD}} \sum_{j \in R_{hi}} \int_0^{\tau_j} r_j(t) \Psi_j^2(t, \tau_j) dt + \\ & - \sum_{i \in R_{HD}} \sum_{j \in R_{hi}} \int_{\tau_j}^{T_f} r_j(t) [\Psi_j^2(\tau_j, \tau_j) + Q_j^2(t - \tau_j) + 2\Psi_j(\tau_j, \tau_j) Q_j(t - \tau_j)] dt + \\ & + \sum_{j=1}^q l(j) \left[ \sum_{i=1}^n B_{ii} P_i^2(j) - \sum_{i=1}^n P_i(j) + P_D(j) \right] + \\ & + \sum_{i=1}^{n-m} \mu_{m+i} \left[ \sum_{r=1}^q q_{m+i}(r) - b_{m+i} \right] \end{aligned}$$

En la última línea observamos como se transforma al discretizar la integral:

$$\int_0^{T_f} q_{m+i}(t) dt$$

en la suma de todos los caudales producidos en cada uno de los nodos:

$$\sum_{r=1}^q q_{m+i}(r)$$

Por otro lado, y también como resultado de la discretización, la integral:

$$\int_0^{T_f} \sum_{i=1}^m (\beta_i P_{si}(t) + \gamma_i P_{si}^2(t)) dt$$

la subdividimos en  $q$  integrales, con límites en los nodos elegidos, obteniendo para ella:

$$\sum_{j=1}^q \int_{j-1}^j \sum_{i=1}^m (\beta_i P_{si}(t) + \gamma_i P_{si}^2(t)) dt$$

Hemos supuesto (como luego haremos en la práctica), nodos espaciados en una unidad temporal (frecuentemente 1 hora), si bien el proceso se puede generalizar a otro tipo de discretización.

Este proceso de aproximación resulta muy conveniente para más tarde realizar un solapamiento de funciones de forma, aspecto éste fundamental en el desarrollo de toda la teoría de este capítulo.

#### 4.2 Eliminación de multiplicadores

Una de las ventajas de emplear de la teoría del análisis funcional (del teorema de la norma mínima), era que se eliminaban algunas funciones multiplicadoras desconocidas. Esto mismo sucede, aún en mayor medida, con la teoría que estamos desarrollando. El proceso lo dividimos en los siguientes pasos:

(1) Eliminación de la variable volumen  $Q_i(t)$ .

En todo el desarrollo posterior tomaremos:

$$Q_{m+i}(t) = \int_0^t q_{m+i}(t) dt \quad i = 1, 2, \dots, n - m$$

de tal manera que al discretizar se obtiene:

$$Q_{m+i}(j) = \sum_{r=1}^j q_{m+i}(r)$$

o bien:

$$Q_{m+i}(j) = Q_{m+i}(j-1) + q_{m+i}(j) \quad (4.4.2.1)$$

$$j = 1, 2, \dots, q$$

$$i = 1, 2, \dots, n - m$$

Esta variable tiene dos condiciones frontera:

$$Q_{m+i}(0) = 0 ; Q_{m+i}(T_f) = b_{m+i} \quad i = 1, 2, \dots, n - m$$

las cuales impondremos de la siguiente forma: la primera condición, acumulando volúmenes de acuerdo a la expresión (4.4.2.1) y tomando  $Q_{m+i}(0) = 0$ ,  $i \in R_h$ ; y la segunda condición mediante la restricción discretizada:

$$\sum_{r=1}^q q_{m+i}(r) = b_{m+i} \quad i = 1, 2, \dots, n - m$$

Con todo esto conseguimos eliminar también el multiplicador asociado  $m_{m+i}(t)$ .

(2) Eliminamos las potencias hidráulicas  $P_{hi}(t)$ .

De las ecuaciones de funcionamiento de la red hidráulica obtenemos:

$$P_{hm+i}(t) = -(A_{m+i}(t)q_{m+i}(t) + B_{m+i}q_{m+i}(t)Q_{m+i}(t) + C_{m+i}q_{m+i}^2(t)) \quad i \in R_{hCA}$$

$$P_{hm+i}(t) = -\left(A_{m+i}(t)q_{m+i}(t) - B_{m+i}q_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j) + B_{m+i}q_{m+i}(t)Q_{m+i}(t) + C_{m+i}q_{m+i}^2(t)\right) \quad i \in R_{hID}$$

donde eliminando la variable volumen:

$$P_{hm+i}(t) = -\left(A_{m+i}(t)q_{m+i}(t) + B_{m+i}q_{m+i}(t) \int_0^t q_{m+i}(t)dt + C_{m+i}q_{m+i}^2(t)\right), \quad i \in R_{hCA}$$

$$P_{hm+i}(t) = -\left(A_{m+i}(t)q_{m+i}(t) - B_{m+i}q_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hi}} \int_0^t q_j(t - \tau_j)dt + B_{m+i}q_{m+i}(t) \int_0^t q_{m+i}(t)dt + C_{m+i}q_{m+i}^2(t)\right), \quad i \in R_{hID}$$

Así conseguimos eliminar también la función multiplicadora desconocida asociada  $n_{m+i}(t)$ .

Al discretizar:

$$P_{hm+i}(j) = -\left(A_{m+i}(j)q_{m+i}(j) + B_{m+i}q_{m+i}(j) \sum_{r=1}^j q_{m+i}(r) + C_{m+i}q_{m+i}^2(j)\right), \quad i \in R_{hCA}$$

$$P_{hm+i}(j) = -\left(A_{m+i}(j)q_{m+i}(j) - B_{m+i}q_{m+i}(j) \sum_{k \in R_{hi}} \sum_{r=1}^j q_k(r - \tau_k) + B_{m+i}q_{m+i}(j) \sum_{r=1}^j q_{m+i}(r) + C_{m+i}q_{m+i}^2(j)\right), \quad i \in R_{hID}$$

$$j = 1, 2, \dots, q$$

(3) Eliminación de las variables asociadas al retraso en el transporte.

El retraso en el transporte, hacía necesaria la introducción de una serie de variables auxiliares que permitían simplificar su tratamiento:

$$Y_i(t), \Psi_i(t), \theta_i(t), \dot{p}_i(t)$$

Con el proceso que seguimos, la variable caudal  $q_i(t)$  se basta para asumir el retraso  $\tau_i$ . Del mismo modo que:

$$Y_{m+i}(t, \tau_i) = \begin{cases} \Psi_{m+i}(t, \tau_i) & \text{para } 0 \leq t \leq \tau_i \\ \Psi_{m+i}(\tau_i, \tau_i) + Q_{m+i}(t - \tau_i) & \text{para } \tau_i < t < T_f \end{cases}$$

$$i \in R_{hi}$$

nosotros tomaremos tras la discretización:

$$\sum_{r=1}^j q_{m+i}(r - \tau_i) = \sum_{r=1}^{\tau_i} q_{m+i}(r - \tau_i) + \sum_{r=\tau_i}^j q_{m+i}(r - \tau_i)$$

$$i \in R_h \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, q$$

donde el primer sumatorio cumple la función de la variable  $\Psi_i(t, \tau_i)$  y asume el periodo del sistema que transcurre antes del comienzo del intervalo de optimización. Es en el segundo sumatorio donde se reúnen las variables del vector de control. Así conseguimos eliminar también el multiplicador  $r_{m+i}(t)$ .

Tras eliminar estos tres multiplicadores y las funciones ya comentadas, el funcional toma la forma:

$$J = \sum_{j=1}^q \int_{j-1}^j \sum_{i=1}^m (\beta_i P_{si}(t) + \gamma_i P_{si}^2(t)) dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^q l(j) \left[ \sum_{i=1}^n B_{ii} P_i^2(j) - \sum_{i=1}^n P_i(j) + P_D(j) \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-m} \mu_{m+i} \left[ \sum_{r=1}^q q_{m+i}(r) - b_{m+i} \right]$$

y desarrollando:

$$J = \sum_{j=1}^q \int_{j-1}^j \sum_{i=1}^m (\beta_i P_{si}(t) + \gamma_i P_{si}^2(t)) dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^q l(j) \left\{ \sum_{i=1}^m B_{ii} P_i^2(j) - \sum_{i=1}^m P_i(j) + P_D(j) + \right.$$

$$+ \sum_{i \in R_{hCA}} B_{m+im+i} \left( A_{m+i}(j) q_{m+i}(j) + B_{m+i} q_{m+i}(j) \sum_{r=1}^j q_{m+i}(r) + C_{m+i} q_{m+i}^2(j) \right)^2 +$$

$$+ \sum_{i \in R_{hCA}} \left( A_{m+i}(j) q_{m+i}(j) + B_{m+i} q_{m+i}(j) \sum_{r=1}^j q_{m+i}(r) + C_{m+i} q_{m+i}^2(j) \right) +$$

$$+ \sum_{i \in R_{hD}} B_{m+im+i} \left( A_{m+i}(j) q_{m+i}(j) - B_{m+i} q_{m+i}(j) \sum_{k \in R_{hi}} \sum_{r=1}^j q_k(r - \tau_k) + B_{m+i} q_{m+i}(j) \sum_{r=1}^j q_{m+i}(r) + C_{m+i} q_{m+i}^2(j) \right)^2 +$$

$$+ \sum_{i \in R_{hD}} \left( A_{m+i}(j) q_{m+i}(j) - B_{m+i} q_{m+i}(j) \sum_{k \in R_{hi}} \sum_{r=1}^j q_k(r - \tau_k) + B_{m+i} q_{m+i}(j) \sum_{r=1}^j q_{m+i}(r) + C_{m+i} q_{m+i}^2(j) \right) \left. \right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-m} \mu_{m+i} \left[ \sum_{r=1}^q q_{m+i}(r) - b_{m+i} \right] \quad (4.4.2.2)$$

### 4.3 Aplicación del método de Ritz

Vamos a buscar la solución aproximada al mínimo de nuestro funcional aumentado, de acuerdo a la teoría del método de Ritz, es decir vamos a buscar la solución en la forma:

$$x = \sum_{i=1}^n a_i w_i$$

Tras el estudio realizado en el punto 4.3.3 durante el planteamiento del problema, recordemos que convenimos en aceptar como sistema de funciones de forma o coordenadas  $\{w_i\}_{i=1}^n$  el sistema algebraico de potencias  $\{t^i\}_{i=1}^n$  que unía a su simplicidad operacional la rapidez de convergencia.

Llegados a este punto vamos a elegir las aproximaciones para nuestras variables de trabajo. Como vemos en el funcional aumentado de la ecuación (4.4.2.2), tan sólo quedan ya dos variables de control: las potencias térmicas  $P_{si}(t)$  y los caudales vertidos por las centrales hidráulicas  $q_i(t)$ .

Hablando en general, y para unas funciones coordenadas cualesquiera  $w_i(t)$ , las aproximaciones tendrán la forma:

$$\begin{aligned} P_{si}(t) &= P_{si}(0) + \sum_{l=1}^f d_l^i w_l(t) & i = 1, 2, \dots, m \\ q_{m+i}(t) &= q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i} w_l(t) & i = 1, 2, \dots, n - m \end{aligned} \quad (4.4.3.1)$$

siendo  $f$  el número de funciones de forma elegidas, y por tanto, la dimensión del subespacio de proyección. A los coeficientes de Ritz  $a_i$  los denotaremos con las letras  $d$  para las potencias térmicas y  $c$  para los caudales hidráulicos. El superíndice indica la central a la que se refiere, y el subíndice el orden dentro de las funciones de forma.

Hay que resaltar que las únicas condiciones frontera o iniciales que deben satisfacer nuestras variables son los valores en el instante  $t=0$ :

$$P_{si}(0) \text{ y } q_{m+i}(0)$$

ya que dichos valores coinciden (y vienen impuestos, por tanto) con los valores obtenidos en el instante  $t=q$  del intervalo de optimización anterior.

Estas condiciones iniciales aparecen en el primer sumando de la expresión (4.4.3.1) y tan sólo queda escoger funciones de forma  $w_i(t)$  que se anulen en dicho instante  $t=0$ . El sistema con el que hemos decidido trabajar para resolver este sistema hidrotérmico, el sistema algebraico  $\{t^i\}_{i=1}^n$ , cumple dicha premisa.

Tras realizar numerosos test con diversos sistemas hidrotérmicos ramificados, se comprobó que no compensa tomar muchos términos de la sucesión minimizadora. Dicho de otro modo, el aumento del número de funciones de forma, y el consiguiente aumento de la dimensión del problema, acarrea numerosos problemas en cuanto a estabilidad y resolución del sistema de optimización final y apenas mejora la aproximación y la exactitud de la solución obtenida; es decir, la sucesión minimizadora converge muy rápidamente.

Por ello, y dado que los test realizados nos avalan, vamos a aplicar en la práctica aproximaciones del método de Ritz que tan sólo consideran una función de forma  $w_i(t)$ . Con esta premisa tendremos que:

$$\begin{aligned} P_{si}(t) &= P_{si}(0) + d_1^i t & i = 1, 2, \dots, m \\ q_{m+i}(t) &= q_{m+i}(0) + c_1^{m+i} t & i = 1, 2, \dots, n - m \end{aligned} \quad (4.4.3.2)$$

Es decir, las potencias térmicas y los caudales hidráulicos, están siendo aproximados por rectas cuya ordenada en el origen es un dato impuesto (la condición inicial), y donde la incógnita a hallar para optimizar el sistema es la pendiente de dicha rectas.

No debemos olvidar que tras la discretización nuestra optimización es global, es decir, estamos resolviendo a la vez el problema de optimización planteado en cada uno de los  $q$  nodos.

La técnica que vamos a desarrollar en este momento la hemos llamado solapamiento de funciones de forma.

Esta técnica parte del problema planteado según la forma (4.4.2.2). Es decir, los pasos básicos a realizar en esta optimización global en cada instante serían:

- (I) Discretización del problema en los nodos elegidos.
- (II) Eliminación de ciertas variables y restricciones y de los multiplicadores asociados.
- (III) Formación de la restricción de equilibrio de potencias fuera de la integral, y por tanto en cada nodo.
- (IV) En cuarto lugar, y como hemos planteado antes, subdividimos la integral:

$$\int_0^{T_f} \sum_{i=1}^m (\beta_i P_{si}(t) + \gamma_i P_{si}^2(t)) dt$$

en  $q$  integrales, con límites en los nodos elegidos, obteniendo:

$$\sum_{j=1}^q \int_{j-1}^j \sum_{i=1}^m (\beta_i P_{si}(t) + \gamma_i P_{si}^2(t)) dt$$

(V) Y como consecuencia de todo lo anterior, nuestra aproximación no será ya de la forma (4.4.3.1) o (4.4.3.2), sino que en cada nodo el coeficiente de Ritz será diferente. Estamos considerando  $q$  funciones de forma y al minimizar el funcional planteado en los  $q$  nodos, las solapamos escogiendo en cada nodo  $j$  la recta que ha minimizado la integral extendida entre  $[j-1, j]$ . Nuestra aproximación será pues:

$$\begin{aligned} P_{si}(j) &= P_{si}(0) + \sum_{l=1}^f d_l^{i,j} w_l(j) & i = 1, 2, \dots, m \\ q_{m+i}(j) &= q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,j} w_l(j) & i = 1, 2, \dots, n - m \\ j &= 1, 2, \dots, q & \end{aligned} \quad (4.4.3.3)$$

o bien tras asumir  $f=1$  y el sistema  $\{t^i\}_{i=1}^n$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} P_{si}(j) &= P_{si}(0) + d_1^{i,j} j & i = 1, 2, \dots, m \\ q_{m+i}(j) &= q_{m+i}(0) + c_1^{m+i,j} j & i = 1, 2, \dots, n-m \\ j &= 1, 2, \dots, q & \end{aligned} \quad (4.4.3.4)$$

La situación se aproxima a la representada en la figura 3. Vemos tres funciones de forma solapadas, correspondientes a los tres primeros nodos. Cada recta de aproximación (a), sólo se considera en el intervalo asociado a cada nodo y hemos representado también la curva solución exacta (r).

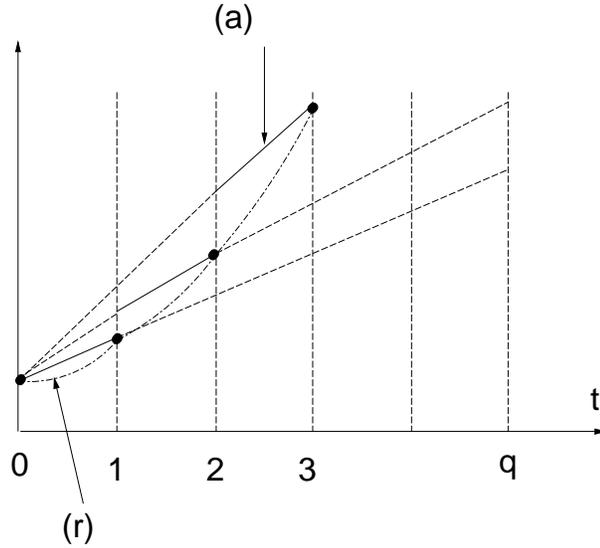


Fig. 3 Solapamiento de funciones de forma.

A continuación vamos a introducir las aproximaciones generales (4.4.3.3) en nuestro funcional de costo (4.4.2.2), obteniendo:

$$\begin{aligned} J = & \sum_{j=1}^q \int_{j-1}^j \sum_{i=1}^m \left( \beta_i \left[ P_{si}(0) + \sum_{l=1}^f d_l^{i,j} w_l(t) \right] + \gamma_i \left[ P_{si}(0) + \sum_{l=1}^f d_l^{i,j} w_l(t) \right]^2 \right) dt + \\ & + \sum_{j=1}^q l(j) \left\{ \sum_{i=1}^m B_{ii} \left[ P_{si}(0) + \sum_{l=1}^f d_l^{i,j} w_l(j) \right]^2 - \sum_{i=1}^m \left[ P_{si}(0) + \sum_{l=1}^f d_l^{i,j} w_l(j) \right] + P_D(j) \right\} + \\ & + \sum_{i \in R_{hCA}} B_{m+im+i} \left( A_{m+i}(j) \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,j} w_l(j) \right] \right) + \\ & + B_{m+i} \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,j} w_l(j) \right] \sum_{r=1}^j \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,r} w_l(r) \right] + C_{m+i} \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,j} w_l(j) \right]^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i \in R_{hCA}} \left( A_{m+i}(j) \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,j} w_l(j) \right] + \right. \\
& + B_{m+i} \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,j} w_l(j) \right] \sum_{r=1}^j \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,r} w_l(r) \right] + C_{m+i} \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,j} w_l(j) \right]^2 \Big) + \\
& + \sum_{i \in R_{hD}} B_{m+im+i} \left( A_{m+i}(j) \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,j} w_l(j) \right] - B_{m+i} \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,j} w_l(j) \right] \sum_{k \in R_{hi}} \sum_{r=1}^j \left[ q_k(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{k,r-\tau_k} w_l(r-\tau_k) \right] \right. \\
& + B_{m+i} \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,j} w_l(j) \right] \sum_{r=1}^j \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,r} w_l(r) \right] + C_{m+i} \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,j} w_l(j) \right]^2 \Big)^2 + \\
& + \sum_{i \in R_{hD}} \left( A_{m+i}(j) \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,j} w_l(j) \right] - B_{m+i} \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,j} w_l(j) \right] \sum_{k \in R_{hi}} \sum_{r=1}^j \left[ q_k(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{k,r-\tau_k} w_l(r-\tau_k) \right] \right. \\
& + B_{m+i} \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,j} w_l(j) \right] \sum_{r=1}^j \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,r} w_l(r) \right] + C_{m+i} \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,j} w_l(j) \right]^2 \Big) \Big\} + \\
& + \sum_{i=1}^{n-m} \mu_{m+i} \left( \sum_{r=1}^q \left[ q_{m+i}(0) + \sum_{l=1}^f c_l^{m+i,r} w_l(r) \right] - b_{m+i} \right) \tag{4.4.3.5}
\end{aligned}$$

Si trabajamos ya con las expresiones (4.4.3.4), que asumen el uso de una sola función de forma, la ecuación (4.4.3.5), aparece expresada, lógicamente, de una manera mucho más simplificada:

$$\begin{aligned}
J & = \sum_{j=1}^q \int_{j-1}^j \sum_{i=1}^m \left( \beta_i [P_{si}(0) + d^{i,j} t] + \gamma_i [P_{si}(0) + d^{i,j} t]^2 \right) dt + \\
& + \sum_{j=1}^q l(j) \left\{ \sum_{i=1}^m B_{ii} [P_{si}(0) + d^{i,j} j]^2 - \sum_{i=1}^m [P_{si}(0) + d^{i,j} j] + P_D(j) + \right. \\
& \quad + \sum_{i \in R_{hCA}} B_{m+im+i} \left( A_{m+i}(j) [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] + \right. \\
& \quad + B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] \sum_{r=1}^j [q_{m+i}(0) + c^{m+i,r} r] + C_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j]^2 \Big) + \\
& \quad + \sum_{i \in R_{hCA}} \left( A_{m+i}(j) [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] + \right. \\
& \quad + B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] \sum_{r=1}^j [q_{m+i}(0) + c^{m+i,r} r] + C_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j]^2 \Big) + \\
& + \sum_{i \in R_{hD}} B_{m+im+i} \left( A_{m+i}(j) [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] - B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] \sum_{k \in R_{hi}} \sum_{r=1}^j [q_k(0) + c^{k,r-\tau_k} (r-\tau_k)] \right. \\
& \quad + B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] \sum_{r=1}^j [q_{m+i}(0) + c^{m+i,r} r] + C_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j]^2 \Big) + \\
& \quad + \sum_{i \in R_{hD}} \left( A_{m+i}(j) [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] - B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] \sum_{k \in R_{hi}} \sum_{r=1}^j [q_k(0) + c^{k,r-\tau_k} (r-\tau_k)] \right. \\
& \quad \left. + B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] \sum_{r=1}^j [q_{m+i}(0) + c^{m+i,r} r] + C_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j]^2 \right) + \\
& \quad + \sum_{i \in R_{hD}} \left( A_{m+i}(j) [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] - B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] \sum_{k \in R_{hi}} \sum_{r=1}^j [q_k(0) + c^{k,r-\tau_k} (r-\tau_k)] \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] \sum_{r=1}^j [q_{m+i}(0) + c^{m+i,r} r] + C_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j]^2 \Big\} + \\
& + \sum_{i=1}^{n-m} \mu_{m+i} \left( \sum_{r=1}^q [q_{m+i}(0) + c^{m+i,r} r] - b_{m+i} \right) \quad (4.4.3.6)
\end{aligned}$$

(VI) Por último, y para simplificar los cálculos, se presenta la posibilidad de no realizar de forma exacta las integrales:

$$\sum_{j=1}^q \int_{j-1}^j \sum_{i=1}^m (\beta_i P_{si}(t) + \gamma_i P_{si}^2(t)) dt \quad (4.4.3.7)$$

sino aproximarlas de alguna manera. Existen numerosas reglas muy conocidas para el problema de la integración numérica o cuadratura numérica, que permiten sustituir integrales definidas por expresiones sencillas de calcular (regla del trapecio, regla de Simpson, regla del trapecio corregida, etc.). Para nuestro caso se han obtenido resultados excelentes con la sencilla fórmula del rectángulo:

$$\int_{j-1}^j f(t) dt \approx f(j) [j - (j-1)] = f(j)$$

cuya interpretación vemos en la figura 4:

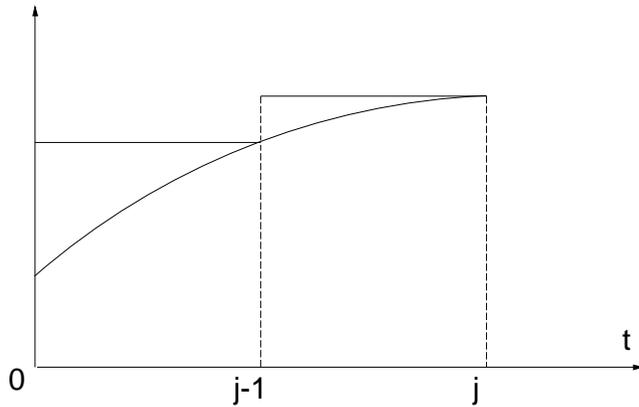


Fig. 4 Aproximación de las integrales.

El área contenida bajo la curva es aproximada por el área del rectángulo dibujado, y por tanto los funcionales (4.4.3.5) y el (4.4.3.6) ven modificado su primer sumando, apareciendo ahora respectivamente las expresiones:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^m \left( \beta_i \left[ P_{si}(0) + \sum_{l=1}^f d_l^{i,j} w_l(j) \right] + \gamma_i \left[ P_{si}(0) + \sum_{l=1}^f d_l^{i,j} w_l(j) \right]^2 \right) \\
& \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^m \left( \beta_i [P_{si}(0) + d^{i,j} j] + \gamma_i [P_{si}(0) + d^{i,j} j]^2 \right)
\end{aligned}$$

manteniéndose el resto de los términos.

#### 4.4 Solución en forma de un sistema de ecuaciones algebraicas

Una vez así planteado el problema de optimización, observamos como nuestro funcional de costo pasa a ser función de los  $n \times f \times q$  coeficientes de Ritz introducidos en (4.4.3.3), ( $f$  por cada central térmica o hidráulica presente en el sistema y uno por cada nodo), y de los multiplicadores  $l(j)$  y  $\mu_i$ .

Tenemos por tanto planteado un problema de la forma:

$$J = F(a_1, \dots, a_{n \cdot f \cdot q}, l(1), \dots, l(q), \mu_{m+1}, \dots, \mu_n)$$

Ya vimos, (teorema 6), que esta función alcanza el mínimo en un único punto del espacio  $R^{n \cdot f \cdot q + q + n - m}$ , en el punto  $\left( (a_i^*)_{i=1}^{n \cdot f \cdot q}, (l^*(j))_{j=1}^q, (\mu_{m+i}^*)_{i=1}^{n-m} \right)$ , donde  $a_i^*$  son los coeficientes del desarrollo de  $x^{(n \cdot f \cdot q)}$  por los elementos de la base  $(w_1, \dots, w_{n \cdot f \cdot q})$ . Este punto lo hallaremos por el método clásico, es decir igualando a cero las derivadas de  $J$  respecto a las variables independientes:  $a_1, \dots, a_{n \cdot f \cdot q}, l(1), \dots, l(q), \mu_{m+1}, \dots, \mu_n$ .

Por consiguiente,  $F$  será la función auxiliar de Lagrange del problema de extremos condicionados que tenemos planteado y la determinación del mínimo se reduce a la resolución del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial d_i^{j,j}} &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad ; \quad l = 1, 2, \dots, f \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, q \\ \frac{\partial F}{\partial c_i^{m+i,j}} &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, n - m \quad ; \quad l = 1, 2, \dots, f \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, q \\ \frac{\partial F}{\partial l(j)} &= 0 \quad j = 1, 2, \dots, q \\ \frac{\partial F}{\partial \mu_{m+i}} &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, n - m \end{aligned}$$

(4.4.4.1)

Este sistema no lineal lo hemos resuelto mediante el método de convergencia global por retroceso LSB, explicado en el punto (2.4), cuestión ésta ya trivial sobre la que no consideramos necesario extendernos más.

Con todo lo visto, se formó el correspondiente algoritmo y se elaboró un programa en lenguaje FORTRAN 90, que se utilizó para resolver el ejemplo planteado al final del capítulo.

#### 5 Optimización combinada

Vamos a trabajar en este punto con un funcional de costo que considere diversos objetivos a minimizar: el costo de combustible (ya estudiado anteriormente), el costo asignado a las emisiones contaminantes de las centrales térmicas y las pérdidas de transmisión de potencia activa.

El coste de la contaminación ya fue estudiado en el capítulo 2, y tras un estudio estadístico se llegó a la conclusión de que se trata de un fenómeno físico que sigue un modelo cuadrático respecto a la potencia generada en cada central térmica de la forma:

$$E_i(P_{si}(t)) = \varepsilon_i P_{si}(t) + \sigma_i P_{si}(t)^2 \quad (4.5.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

Utilizando las tasas de penalización que actualmente se emplean en algunos países europeos, o en comunidades españolas como Galicia, conseguiremos expresar el coste anterior en unidades monetarias, del mismo modo que el coste de combustible ya estudiado.

En cuanto a las pérdidas de potencia activa por transmisión, utilizaremos la fórmula de Kron:

$$P_L(t) = K_{LO} + \sum_{i=1}^n B_{io} P_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i(t) B_{ij} P_j(t) \quad (4.5.2)$$

donde despreciaremos los parámetros  $K_{LO}$  y  $B_{io}$ , y supondremos que  $B_{ij} = 0$  con  $i \neq j$ , teniendo entonces:

$$P_L(t) = \sum_{i=1}^n B_{ii} P_i(t)^2 \quad (4.5.3)$$

Es necesario expresar estas pérdidas en unidades monetarias, y para ello utilizaremos el factor de conversión  $\phi$ , descrito por El-Hawary y Ravindranath [29]. Este factor, convierte las pérdidas en coste de generación, y asumiendo la fórmula (4.5.2),  $\phi$  se calcula como el costo incremental convencional de generación, y viene dado por:

$$\phi_i = \frac{\beta_i + 2\gamma_i P_i}{1 - B_{io} - 2 \sum_{j=1}^m B_{ij} P_j} \quad (4.5.4)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

o tomando ya la fórmula (4.5.3):

$$\phi_i = \frac{\beta_i + 2\gamma_i P_i}{1 - 2B_{ii} P_i} \quad (4.5.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

En cada instante, el valor de  $\phi_i$  se calcula como la media de los costos incrementales de las centrales. Finalmente, el valor medio de  $\phi$  se da por la media de los  $\phi_i$  a lo largo de todos los instantes.

Para realizar la optimización conjunta de estos factores, incluiremos los tres costes en el funcional mediante unas ciertas funciones peso  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ , y  $\kappa_3$ , que verifican la condición:  $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 1$ , y que asignan valores relativos a los tres componentes del funcional.

El esquema a seguir es el mismo que ya hemos realizado anteriormente, y para no alargar en exceso la exposición suponemos dados los pasos básicos: (I), (II), (III), (IV) y (V).

Realizamos la exposición suponiendo una única cuenca de trabajo, siendo inmediato generalizar el estudio a  $W$  cuencas. A continuación hallamos el nuevo funcional a minimizar, compuesto de dos sumandos: el primero que incluye la parte térmica, y el segundo que aporta únicamente el costo de las pérdidas de las centrales hidráulicas:

$$J = \sum_{j=1}^q \int_{j-1}^j \sum_{i=1}^m ((\kappa_1 \beta_i + \kappa_2 \varepsilon_i) P_{si}(t) + (\kappa_1 \gamma_i + \kappa_2 \sigma_i + \kappa_3 \phi B_{ii}) P_{si}(t)^2) dt + \sum_{j=1}^q \int_{j-1}^j \sum_{i=1}^{n-m} (\kappa_3 \phi B_{m+im+i} P_{hm+i}(t)^2) dt \quad (4.5.6)$$

Partimos ahora de la expresión (4.4.3.6), que tras las modificaciones pertinentes toma la forma:

$$\begin{aligned} J = & \sum_{j=1}^q \int_{j-1}^j \sum_{i=1}^m ((\kappa_1 \beta_i + \kappa_2 \varepsilon_i) [P_{si}(0) + d^{i,j} t] + (\kappa_1 \gamma_i + \kappa_2 \sigma_i + \kappa_3 \phi B_{ii}) [P_{si}(0) + d^{i,j} t]^2) dt + \\ & + \sum_{j=1}^q \int_{j-1}^j \left\{ \sum_{i \in R_{hCA}} \kappa_3 \phi B_{m+im+i} (A_{m+i}(t) [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} t] + B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} t] \int_0^t [q_{m+i}(0) + c^{m+i,r} r] dr + C_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} t]^2) \right\} dt + \\ & + \sum_{j=1}^q \int_{j-1}^j \left\{ \sum_{i \in R_{hD}} \kappa_3 \phi B_{m+im+i} (A_{m+i}(t) [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} t] - B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} t] \sum_{k \in R_{hi}} \int_0^t [q_k(0) + c^{k,r-\tau_k}(r-\tau_k)] dr + B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} t] \int_0^t [q_{m+i}(0) + c^{m+i,r} r] dr + C_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} t]^2) \right\} dt + \\ & + \sum_{j=1}^q l(j) \left\{ \sum_{i=1}^m B_{ii} [P_{si}(0) + d^{i,j} j]^2 - \sum_{i=1}^m [P_{si}(0) + d^{i,j} j] + P_D(j) + \sum_{i \in R_{hCA}} B_{m+im+i} (A_{m+i}(j) [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] + B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] \int_{r=1}^j [q_{m+i}(0) + c^{m+i,r} r] + C_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j]^2) + \sum_{i \in R_{hD}} B_{m+im+i} (A_{m+i}(j) [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] - B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] \sum_{k \in R_{hi}} \int_{r=1}^j [q_k(0) + c^{k,r-\tau_k}(r-\tau_k)] + B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j] \int_{r=1}^j [q_{m+i}(0) + c^{m+i,r} r] + C_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j} j]^2) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i \in R_{HD}} \left( A_{m+i}(j) [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j}] - B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j}] \sum_{k \in R_{H_i}} \sum_{r=1}^j [q_k(0) + c^{k,r-\tau_k}(r-\tau_k)] \right) + \\
& \quad + B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j}] \sum_{r=1}^j [q_{m+i}(0) + c^{m+i,r}] + C_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j}]^2 \Big\} + \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n-m} \mu_{m+i} \left( \sum_{r=1}^q [q_{m+i}(0) + c^{m+i,r}] - b_{m+i} \right) \tag{4.5.7}
\end{aligned}$$

Realizamos ahora el paso (VI), aproximando las integrales por rectángulos, obteniendo para los tres primeros sumandos las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
J = & \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^m \left( (\kappa_1 \beta_i + \kappa_2 \varepsilon_i) [P_{si}(0) + d^{i,j}] + (\kappa_1 \gamma_i + \kappa_2 \sigma_i + \kappa_3 \phi B_{ii}) [P_{si}(0) + d^{i,j}]^2 \right) + \\
& + \sum_{j=1}^q \sum_{i \in R_{ICA}} \kappa_3 \phi B_{m+im+i} \left( A_{m+i}(j) [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j}] + \right. \\
& \quad \left. + B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j}] \sum_{r=1}^j [q_{m+i}(0) + c^{m+i,r}] + C_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j}]^2 \right)^2 \\
& + \sum_{j=1}^q \sum_{i \in R_{HD}} \kappa_3 \phi B_{m+im+i} \left( A_{m+i}(j) [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j}] - B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j}] \sum_{k \in R_{H_i}} \sum_{r=1}^j [q_k(0) + c^{k,r-\tau_k}(r-\tau_k)] \right) + \\
& \quad \left. + B_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j}] \sum_{r=1}^j [q_{m+i}(0) + c^{m+i,r}] + C_{m+i} [q_{m+i}(0) + c^{m+i,j}]^2 \right)^2
\end{aligned}$$

manteniéndose el resto de los términos ya vistos.

## 6 Conclusiones

A continuación, y como consecuencia de toda la teoría desarrollada, y a la vista de los test de validación realizados, podemos resumir las principales conclusiones y ventajas ofrecidas por este método.

Rapidísima convergencia de la sucesión minimizadora hacia la solución exacta del problema propuesto. Se ha comprobado que una sola función de forma (un solo término de la sucesión) produce una aproximación muy notable.

Gran estabilidad de la sucesión minimizadora tomando el sistema algebraico  $\{t^i\}$  como sistema de trabajo. Este sistema nos asegura además gran simplicidad operacional y rapidez computacional por su extremada sencillez.

El método que hemos desarrollado demuestra ser una potente herramienta, capaz de resolver problemas muy complejos y de grandes dimensiones, resolviendo fácilmente sistemas no lineales de más de 300 ecuaciones, muchas de ellas incluyendo a su vez más de 70 incógnitas de trabajo.

Escasa importancia de los valores iniciales introducidos en el método LSB, lo cual conlleva un importante ahorro de trabajo, y asegura buenos resultados sin necesidad de conocer a priori, la tendencia de la solución óptima.

Posibilidad de realizar optimizaciones combinadas de múltiples factores, variando los pesos de los distintos costes, sin necesidad de modificar los valores iniciales que se emplean en el método de convergencia global por retroceso, y todo ello para unos valores fijos correspondientes al instante inicial.

Fácil transformación de una optimización sencilla en una optimización múltiple, variando tan sólo funciones de peso.

El programa que se elaboró resuelve el problema de forma integral. En primer lugar lee los datos del sistema, a continuación calcula las ecuaciones óptimas, y por último las resuelve mediante el método LSB. Es además, un programa general que puede resolver cualquier sistema hidrotérmico, con cualquier ramificación de las plantas hidráulicas.

Sin embargo, y como inconveniente, citaremos que este método no es el más adecuado para añadir restricciones de desigualdad, ni para incluir el flujo óptimo de carga.