

Índice general

1. INTRODUCCIÓN Y ESTRUCTURA	1
1.1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS	1
1.2. ANTECEDENTES Y ESTADO ACTUAL DEL TEMA	2
1.3. ESTRUCTURA DEL TRABAJO	6
2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	8
2.1. INTRODUCCIÓN	8
2.2. SISTEMA HIDROTÉRMICO	9
2.2.1. Centrales Térmicas	9
2.2.2. Centrales Hidráulicas	11
2.3. PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN HIDROTÉRMICA	11
2.3.1. Problema hidrotérmico generalizado	12
2.3.2. Problema hidrotérmico de Bolza	13
3. EQUIVALENTE MINIMIZADORA	15
3.1. INTRODUCCIÓN	15
3.2. REDUCCIÓN DEL PROBLEMA H_n - T_m AL H_n - T_1	16
3.3. RESTRICCIONES MÁXIMAS Y MÍNIMAS	23
3.4. ALGORITMOS DE APROXIMACIÓN	33
3.4.1. Algoritmo 1	33
3.4.2. Algoritmo 2	34
3.5. EJEMPLOS	35
3.6. REPLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	43
4. CONTROL ÓPTIMO. PROBLEMA DE BOLZA	44
4.1. INTRODUCCIÓN	44
4.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	45
4.2.1. Nuevo planteamiento en términos de control óptimo	49
4.3. CONDICIONES NECESARIAS DE MÍNIMO	51
4.3.1. Construcción de la solución	53
4.3.2. Cálculo aproximado de la solución	55
4.4. EL PROBLEMA DE BOLZA	58
4.4.1. Condición necesaria de mínimo	59
4.4.2. Construcción de la solución	60

4.5. EJEMPLO	60
5. PROBLEMAS CON LAGRANGIANO NO REGULAR. CENTRALES DE BOMBEO	66
5.1. INTRODUCCIÓN	66
5.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	68
5.3. CONDICIONES NECESARIAS DE MÍNIMO	68
5.3.1. Gradiente generalizado de Clarke	69
5.3.2. Condición necesaria	72
5.3.3. Construcción de la solución	75
5.4. CASO PARTICULAR $L(t, z'(t))$	76
5.4.1. Condición suficiente de mínimo	77
5.4.2. Aplicación a un problema hidrotérmico	80
5.5. TRANSICIÓN SUAVE	83
5.6. LAGRANGIANO NO REGULAR Y RESTRICCIONES	87
5.6.1. Construcción de la solución	91
5.6.2. Cálculo aproximado de la solución	93
5.7. EJEMPLO	97
6. PROBLEMA MULTIDIMENSIONAL	100
6.1. INTRODUCCIÓN	100
6.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	101
6.2.1. Planteamiento para el caso uni-dimensional	103
6.3. CONDICIÓN NECESARIA DE MÍNIMO	103
6.4. ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN	106
6.4.1. Construcción del algoritmo	106
6.4.2. Convergencia del algoritmo	107
6.4.3. Aumento de la velocidad de convergencia	121
6.5. APLICACIÓN A PROBLEMAS HIDROTÉRMICOS	122
7. PRIMERA CONDICIÓN DE WEIERSTRASS-ERDMANN. CONJUNTOS MOLDEABLES	130
7.1. INTRODUCCIÓN	130
7.2. EXTENSIÓN DE LA PRIMERA CONDICIÓN DE WEIERSTRASS-ERDMANN	131
7.2.1. Una nueva demostración de la primera condición de Weierstrass- Erdmann	131
7.2.2. Conjuntos moldeables	134
7.2.3. Primera condición de Weierstrass-Erdmann en problemas con restricciones de desigualdad	134
7.3. CONSIDERACIONES SOBRE CONJUNTOS MOLDEABLES	136
7.3.1. Problema del obstáculo	137
7.3.2. Problemas con restricciones no holonómicas	138
7.3.3. Problemas con inclusiones diferenciales	139
7.4. EJEMPLOS	141

8. APORTACIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO	146
8.1. APORTACIONES	146
8.2. PERSPECTIVAS DE FUTURO	147
9. BIBLIOGRAFÍA	148
10. ANEXO I. LISTA DE SÍMBOLOS	162

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN Y ESTRUCTURA

1.1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Los sistemas eléctricos de potencia representan un elemento de primordial importancia en la actualidad. El sistema eléctrico nacional está regulado por el acuerdo alcanzado entre el Ministerio de Industria y Energía y las empresas más representativas del sector denominado Protocolo Eléctrico, en vigor desde finales del año 1999. Su objetivo es el abaratamiento del precio de la energía eléctrica y la libertad de elección del suministrador por parte del consumidor. Razones por las cuales se están realizando notables esfuerzos técnicos para lograr un mejor aprovechamiento de los recursos energéticos tanto en la generación de energía, como en el diseño, construcción y operación de los citados sistemas. La planificación y programación de la producción de energía en sistemas que constan de centrales térmicas e hidráulicas (hidrotérmicos) permitirá decidir la secuencia horaria de funcionamiento de las mismas a un coste óptimo (Optimización de sistemas hidrotérmicos).

Este es el marco en el que se pretende desarrollar este trabajo. Tomando como base el problema de optimización hidrotérmica, el propósito es abordarlo desde una perspectiva fundamentalmente matemática sin olvidarnos de las características específicas del problema. Trataremos de desarrollar y aplicar técnicas matemáticas para su resolución, sin olvidar el significado eléctrico y práctico del mismo.

No se trata únicamente de plantear un problema de optimización de un sistema hidrotérmico real, modelizarlo y resolverlo. Existen una gran variedad de modelos matemáticos que aproximan la realidad con mayor o menor grado de precisión y nuestro interés se centra en realizar un estudio general que resuelva cualquier problema hidrotérmico con independencia de las características concretas de las centrales y todo ello con un soporte matemático que lo avale.

En esta tesis perseguimos varios objetivos:

- i) obtener resultados cuyo campo de aplicación no se vea limitado por la casuística

de modelizaciones particulares,

ii) poner de relieve la importancia de la delimitación de los campos de actuación y de validez de los resultados,

iii) continuar la línea de trabajo iniciada por Grau en [72] con pretenciones generalistas y de aplicabilidad a cualquier problema de optimización de recursos en el que una determinada función de demanda deba ser satisfecha por dos fuentes de naturaleza distinta,

iv) obtener resultados matemáticos de carácter general, mostrando su aplicación a nuestro problema, y

v) aplicar los métodos de resolución desarrollados a sistemas eléctricos reales.

Reseñaremos, a continuación, los trabajos e investigadores más relevantes que han conformado la historia de esta línea de investigación, cuyos orígenes se remontan a la década de los 50.

1.2. ANTECEDENTES Y ESTADO ACTUAL DEL TEMA

La programación óptima de un sistema hidrotérmico es un problema de gran complejidad. Existen numerosas aproximaciones al problema, según consideremos programación a largo, medio o corto plazo, sistemas sólo térmicos o hidrotérmicos, con optimización del flujo de cargas o sin ella, multiobjetivo o uniobjetivo, etc.. Por otro lado, la importancia del modelo considerado en el problema de optimización es indudable y así podemos trabajar con centrales hidráulicas de carga fija o variable, aisladas o con acoplamiento hidráulico entre ellas, retraso en el transporte, cuencas ramificadas o no, con o sin pérdidas de transmisión, etc.. No es de extrañar, por tanto, que se hayan adoptado diferentes metodologías de trabajo y exista un número impresionante de referencias en el estudio de los sistemas hidrotérmicos. Esta es la razón por la cual queremos, a continuación, hacer especial mención de aquellos que se relacionan de forma más directa con esta tesis.

Los primeros pasos en el campo de la programación óptima de un sistema de potencia de dimensiones reales se deben a **Ricard** [121], **George** y otros [65], **Kirchmayer** y **Stagg** [89] y **Glimn** y **Kirchmayer** [69], aunque el verdadero avance en los trabajos de optimización surgió con la utilización del análisis funcional por parte de **El-Hawary** y **Christensen** [46], [47] y [48]. **El-Hawary** y **Kumar** [55] realizan un estudio comparativo de los distintos modelos que se pueden considerar para estudiar las plantas hidráulicas de carga variable. Un estudio similar, aunque algo más detallado, es el realizado por **El-Hawary** y **Ravindranath** [52] considerando centrales hidráulicas sin acoplamiento y eliminando, para simplificar, la variable retraso en el transporte. Estos mismos autores, en [51], eligen el modelo de Glimn-Kirchmayer y resuelven un sistema hidrotérmico CHT sin retraso, utilizando el método de Newton-Raphson. Debido a la importancia de los valores iniciales, se dan algunas normas sobre cómo obtener aproximaciones iniciales aceptables, como por ejemplo suponer, en una primera aproximación, nulas las pérdidas por trans-

misión. **Suárez** [128] conecta la ya mencionada técnica del análisis funcional con la discretización del problema de contorno obtenido. Proporciona así, la solución en forma de un sistema no lineal al que se le puede aplicar el teorema del punto fijo, técnica iterativa de fácil implementación.

Son diversos los autores que han utilizado técnicas de relajación lagrangiana a la hora de resolver problemas de coordinación hidrotérmica (CHT) a corto y largo plazo. La capacidad de descomponer el problema primal relajado en un subproblema por cada central térmica y en un subproblema por cada cuenca hidráulica permite seleccionar la técnica de optimización más adecuada a la estructura de cada subproblema. **Brannlund** y otros [26] abordan el estudio a corto plazo dividiendo el sistema hidrotérmico en tres subsistemas: el térmico, el hidráulico y la red de transmisión. Resuelven cada subsistema por separado usando el método del gradiente conjugado para las ecuaciones no lineales, con restricciones también no lineales, que resultan de su planteamiento. **Ernan** y otros [57] realizan el estudio con sistemas hidráulicos acoplados y **Demartini** y otros [40] consideran la coordinación a corto plazo de un problema de grandes dimensiones (100 unidades térmicas) y con una fina subdivisión para la programación diaria. **Castillo** y otros [35] utilizan también técnicas de relajación lagrangiana para la coordinación a corto plazo y resaltan el significado económico de las variables del problema dual (los multiplicadores de Lagrange) y **Castro y González** [36] trabajan con un horizonte temporal a largo plazo incluyendo centrales nucleares y obteniendo a través de un nuevo algoritmo implementado con los paquetes de optimización no lineal Minos o Snopt el resultado óptimo.

Otra técnica para abordar estos problemas es la programación dinámica. **Wood** [?] presenta un estudio especial de los periodos de alta demanda de potencia y analiza cómo se comporta el sistema ante estos picos de carga. También **Hobbs** y otros [77] utilizan esta técnica, basada en la discretización de las variables continuas, introduciendo hipótesis para simplificar el problema y hacerlo computacionalmente tratable. **Salam** [125] realiza un estudio comparativo, de tiempos de ejecución y costos en sistemas reales, de los métodos de relajación lagrangiana y programación dinámica para problemas de coordinación hidrotérmica a largo plazo.

Borre y Kapoor [25] estudian la gestión económica de un sistema de potencia hidrotérmico y lo resuelven mediante el empleo de la programación lineal. En **Brannlund** y otros [27] utilizan técnicas de la programación lineal entera-mixta para simplificar y linealizar el problema. También **Mwakabuta y Kyaruzi** [110] desarrollan un modelo de programación lineal utilizando Matlab para un sistema de coordinación hidrotérmica a corto plazo. Técnicas de programación lineal entera-mixta han sido también empleadas por otros autores como **Dillon** y otros [42], y **Medina** y otros [100]. **Ibrahim** [80] en el problema de optimización del flujo de carga considera restricciones dinámicas de agua de las centrales hidráulicas y da un nuevo impulso a la programación no lineal al combinarla con el método del gradiente, las aproximaciones sucesivas, y una estimación realista de los valores iniciales del algoritmo. **Mostafa** y otros [107], [108] utilizan las ecuaciones de flujo en forma polar y el modelo de la matriz de admitancias y, para implementar el algoritmo, el paquete MINOS de optimización no lineal. **Bayón** y otros [10] utilizan el cálculo

variacional junto con el método de Han-Powell para resolver de forma conjunta el problema de coordinación hidrotérmica y el cálculo del óptimo flujo de carga, con la ventaja de poder determinar de forma más exacta los coeficientes de pérdidas, de gran importancia en este tipo de problemas. Estos mismos autores, en [11], siguiendo la misma técnica, prestan atención al diagnóstico de fallos en las redes, como son los fallos de los generadores, violación de las restricciones de la tensión en los nudos, etc.

Técnicas probabilísticas también han sido empleadas en estos problemas. **Lee** y otros [92] realizan un trabajo dentro del campo de la programación a largo plazo, diseñando sistemas, para periodos de 10 y 15 años. Introducen como elemento novedoso, para reducir el costo y la utilización de combustibles fósiles, el uso de las centrales de bombeo. **Christensen y Soliman** [37] añaden a la teoría del análisis funcional un estudio estadístico que estima la probabilidad del aporte de agua natural que pueden tener las centrales hidráulicas en función de la tendencia pasada y realizan una predicción a un año de plazo. Un estudio similar en la cuenca brasileña es realizado por **Carvalho y Soares** [34]. **Soliman y Christensen** [126] proponen un algoritmo para estimar los parámetros del sistema, de tanta influencia en la optimización. Trabajando en una línea paralela, **El-Hawary y Mbamalu** [50] proponen modelos estadísticos para predecir algunos de estos parámetros y **Mbamalu y El-Hawary** [98] estudian la minimización de las pérdidas de potencia, incluyendo incertidumbre en la potencia demandada. **Modarres y Farrokhzad** [103] trabajan con sistemas hidrotérmicos que constan de embalses en cascada. Consideran incertidumbre en los flujos naturales de agua, en la energía demandada y parámetros estocásticos; aplicando un algoritmo híbrido genético y un método de optimización analítica para obtener la solución óptima del sistema. Combinando programación dinámica y estocástica **Halliburton** [75] resuelve sistemas de coordinación hidrotérmica a medio y largo plazo; mientras que **Nowak** y otros [112] combinan programación lineal entera mixta y estocástica para optimizar simultáneamente la producción y comercialización de potencia con un día de anticipación.

Algoritmos genéticos están siendo también utilizados en problemas de optimización de sistemas hidrotérmicos y de flujo de carga. **Carneiro y Leite** [32] comparan los métodos clásicos de programación no lineal con los algoritmos genéticos (GAs). Los primeros presentan deficiencias tales como las dificultades de convergencia, excesiva simplificación del problema original o dificultades asociadas a la aproximación de la función objetivo. Por su parte, los GAs evitan estos inconvenientes y presentan un menor coste operativo. **Gil** y otros [67] utilizan un algoritmo genético para el problema de optimización del flujo de carga, introduciendo una nueva técnica para considerar los candidatos a solución y un conjunto de operadores expertos para mejorar el comportamiento del algoritmo. **Zoumas** y otros [?] trabajan sobre un problema de coordinación hidrotérmica formulándolo como un problema de optimización no lineal, entero mixto y lo resuelven con un GA mejorado caracterizando un conjunto de operadores genéticos de problemas específicos. **Modarres** y otros [104] se centran en un problema de coordinación a largo plazo considerando embalses en cascada y flujos de agua estocásticos. Como las variables de decisión son continuas utiliza en el GA códigos de números reales antes que bina-

rios; mostrando, con algunos ejemplos, la ventaja de este algoritmo frente a métodos convencionales de relajación lagrangiana. Por otra parte, **Wang y Zhang** [?] mejoran un algoritmo basado en una técnica de optimización estocástica (PSO) y lo comparan, aplicándolo a ejemplos de optimización del flujo de carga con los algoritmos genéticos, destacando frente a ellos la precisión en la solución y la rapidez de convergencia.

Otros autores utilizan métodos de punto interior logrando gran precisión y flexibilidad en la modelización de sistemas hidráulicos. **Garzillo** y otros [63] tratan el tema de la optimización de sistemas hidrotérmicos teniendo en cuenta las restricciones eléctricas de la red. Por otra parte, **Kimball** y otros [87] también desarrollan un algoritmo de punto interior, que aprovecha la estructura diagonal por bloques del sistema de Newton para las condiciones necesarias de primer orden, para resolver el despacho económico de sistemas hidrotérmicos en multiperiodos considerando las características de la red.

La minimización de las emisiones contaminantes así como la optimización de múltiples objetivos también ha suscitado el interés de diversos autores. **El-Hawary y Ravindranath** [53] realizan una aproximación al problema de la optimización de múltiples objetivos. Consideran un sistema muy sencillo, con plantas hidráulicas de carga fija y sin acoplamiento, para poder abordar la minimización del costo de combustible, junto con la minimización de las pérdidas de transmisión. Estos mismos autores [54], realizan un estudio comparativo para la optimización del flujo de carga de un sistema hidrotérmico (HTOPF) considerando centrales hidráulicas de carga variable y de carga fija. **Río** y otros [123] tratan el problema multiobjetivo en el marco del nuevo mercado eléctrico español. **Talaq** y otros [129] realizan un estudio de la sensibilidad de la minimización de emisiones ante la modificación de los datos iniciales del sistema, considerando centrales hidráulicas de carga fija, sin acoplamiento y sin retraso en el transporte. **Bayón y Suárez** [7] realizan un estudio de las emisiones contaminantes producidas por las centrales térmicas, tomando datos de la cuenca asturiana. En esta misma línea y para sistemas sólo térmicos, **King** y otros [88] desarrollan una técnica para la optimización combinada de coste de combustible y contaminación, basada en el empleo de redes neuronales, mientras que **Talaq** y otros [131] utilizan la aproximación desacoplada de Newton para el mismo estudio.

En los últimos tiempos, y ante el proceso de liberalización que surge en el marco del nuevo mercado eléctrico, son necesarias estrategias que minimicen el coste de la energía eléctrica, **Eguíluz** [45]. **Tufegdizic y Hyslop** [133] desarrollan un algoritmo para la optimización de un sistema hidrotérmico complejo en tiempo real, permitiendo cambiar de modo continuo el precio de oferta y consiguiendo el máximo aprovechamiento de los recursos hidráulicos. También **Barquin** y otros [3], y **Fabra** [58] abordan este problema, con enfoques totalmente distintos, enmarcados en la teoría de juegos. **Granville** y otros [71] utilizan la optimización estocástica, en el marco de un mercado competitivo, para realizar un estudio del costo, aprovechamiento de potencia y distribución a través de la red eléctrica aplicándolo a sistemas hidrotérmicos brasileños.

Con esto finalizamos un breve repaso que sólo pretende señalar algunos de los

trabajos más interesantes o representativos en el estudio de los sistemas hidrotérmicos.

Establecemos, a continuación, la planificación del trabajo desarrollado.

1.3. ESTRUCTURA DEL TRABAJO

Veamos una breve descripción de los contenidos de los siguientes capítulos de este trabajo, así como las herramientas matemáticas que utilizaremos para abordar los problemas que se plantean:

CAPÍTULO 2: DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

En un sistema hidrotérmico y para un volumen fijo de agua disponible en cada central hidráulica, el objetivo es minimizar el consumo de combustible empleado por las centrales térmicas para satisfacer, conjuntamente con las hidráulicas, una cierta demanda de potencia eléctrica durante el intervalo de optimización (problema hidrotérmico generalizado). Es posible, también, considerar restricciones en la generación de potencia tanto térmica como hidráulica. Si además se asigna un costo al agua consumida en las centrales hidráulicas, el costo de producción de energía de los sistemas hidrotérmicos no dependerá exclusivamente del consumo de combustible de las centrales térmicas (problema hidrotérmico de Bolza).

En este capítulo se plantean y formulan matemáticamente estos problemas.

CAPÍTULO 3: EQUIVALENTE MINIMIZADORA

Dadas varias centrales térmicas, se destaca la importancia de obtener una central (equivalente térmica) que se comporte de modo equivalente a ellas en su funcionamiento óptimo. Ante la variedad de modelos matemáticos utilizados para representar la función de costo de combustible de una central térmica, nuestro primer objetivo será realizar un estudio general del problema cuya validez, bajo ciertas condiciones, sea extensible a todo tipo de central térmica, independientemente del modelo considerado para su función de costo y considerando restricciones de generación de potencia derivadas de las características de diseño de las propias centrales.

CAPÍTULO 4: CONTROL ÓPTIMO. PROBLEMA DE BOLZA

Se estudia el problema que se suscita cuando imponemos ciertas limitaciones a las potencias térmicas e hidráulicas (restricciones de desigualdad de tipo no holonómico). Además, plantearemos el problema de modo que el costo de producción de energía no dependa exclusivamente del consumo de combustible de las centrales térmicas, sino también del volumen de agua turbinada en las hidráulicas (problema hidrotérmico de Bolza).

Ambos problemas son resueltos de modo satisfactorio, tanto desde el punto de vista teórico, estableciéndose las condiciones para los elementos estacionarios del funcional, como desde el punto de vista algorítmico y computacional, construyendo en su caso, de modo aproximado, el mínimo del funcional.

CAPÍTULO 5: PROBLEMAS CON LAGRANGIANO NO REGULAR. CENTRALES DE BOMBEO

El problema del funcionamiento óptimo de los sistemas hidrotérmicos que incluyen centrales de bombeo, cuestión que está suscitando gran interés en tiempos recientes, no ha sido abordado en toda su extensión en los trabajos existentes sobre el tema. La consideración de las centrales de bombeo da lugar a un problema en que el integrando del funcional es continuo pero no de clase C^1 : lagrangiano no regular.

El problema lo hemos abordado mediante técnicas del análisis no diferenciable (gradiente de Clarke) y, en algunos casos particulares, mediante cálculo variacional.

En este capítulo se estudia la existencia de extremales que satisfagan la condición de mínimo y se construye el algoritmo correspondiente para su obtención.

CAPÍTULO 6: PROBLEMA MULTIDIMENSIONAL

Abordamos el estudio de los sistemas que constan de varias centrales hidráulicas (problema hidrotérmico generalizado con restricciones). Se establecen las condiciones necesarias de mínimo y se aplica un método inspirado en el denominado método de descenso coordinado cíclico, que resuelve el problema como límite de una sucesión de problemas con una única central hidráulica. Se garantiza la convergencia de esta sucesión y se resuelven, de modo satisfactorio, diversos problemas de optimización hidrotérmica.

CAPÍTULO 7: PRIMERA CONDICIÓN DE WEIERSTRASS-ERDMANN. CONJUNTOS MOLDEABLES

En este capítulo se establece una condición para extremales con puntos angulares que constituye una generalización de la primera condición de Weierstrass-Erdmann a problemas con cierto tipo de restricciones. Introducimos el concepto de conjunto moldeable con el fin de delimitar, para las funciones admisibles, el tipo de restricciones ante las cuales la condición anterior va a mantener su validez. Apoyándonos en este concepto se muestra la aplicabilidad de la nueva demostración al problema del obstáculo, a problemas variacionales con velocidad restringida así como con restricciones de inclusión diferencial.

CAPÍTULO 8: APORTACIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO

Mostramos las aportaciones realizadas en los problemas estudiados y planteamos otras cuestiones relativas a los mismos así como otros problemas, que aún no habiendo sido abordados en este trabajo, constituyen, sin duda, la continuación natural del mismo.

CAPÍTULO 9: BIBLIOGRAFÍA

Recogemos en este capítulo una relación de libros y publicaciones que constituyen, a nuestro entender, las fuentes bibliográficas más adecuadas para el seguimiento de las investigaciones realizadas. Mostramos mayor número de publicaciones relacionadas con el análisis de sistemas hidrotérmicos, especialmente con el estudio de optimización del coste de combustible que son los de mayor incidencia en el desarrollo del trabajo.

Capítulo 2

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

2.1. INTRODUCCIÓN

Un sistema de energía eléctrica está compuesto por generadores, una red de transporte y diversas redes de distribución. En este trabajo nos centraremos en el estudio del sistema de generación y su explotación en el corto plazo.

Consideraremos un sistema de generación formado por centrales térmicas e hidráulicas. La planificación a corto plazo oscila entre un día y una semana. Requiere el desarrollo de ideas, procedimientos y herramientas que hagan posible la programación de la producción de energía eléctrica de todo el sistema hora a hora, minimizando los costes totales de explotación. Así pues, consideraremos un sistema hidrotérmico constituido por centrales hidráulicas y térmicas que deben satisfacer conjuntamente, a lo largo de un determinado intervalo de tiempo, una cierta demanda de potencia eléctrica.

Las centrales térmicas generan la potencia a costa del consumo de combustible (que es objeto de minimización), y las centrales hidráulicas la obtienen a partir de la energía liberada por el agua al mover una turbina, disponiendo para ello de una cantidad limitada de agua. En caso de que no exijamos que esta cantidad de agua sea consumida durante el intervalo de optimización, plantearemos un problema diferente en el que se asigna un costo al agua consumida.

Incluimos en nuestro estudio las centrales hidráulicas de bombeo. Estas centrales permiten almacenar energía, de forma económica, mediante operaciones de bombeo, única tecnología disponible para este fin. Además, es de destacar que, por su capacidad y elevada flexibilidad, gozan de una situación privilegiada en un mercado competitivo. No en vano las centrales hidráulicas son las que suelen cubrir los picos de demanda y las que fijan el precio marginal en estos periodos.

Existen dos métodos posibles de abordar el problema hidrotérmico: acoplado y desacoplado. El método acoplado se basa en la resolución simultánea de los sub-

problemas hidráulicos y térmicos, y, por su gran complejidad, son escasos los autores que lo emplean. El método más difundido, y que nosotros seguiremos, se basa en la utilización de modelos desacoplados. Se procede en dos etapas: en primer lugar se obtiene la secuencia de generación exclusivamente hidroeléctrica y, una vez conocido este dato, se emplea en la optimización del problema térmico. La utilización de una sola función de coste térmico que represente el coste total de funcionamiento de las centrales térmicas es una condición indispensable para la utilización de este modelo.

Pasamos, a continuación, a describir con más detalle las características del sistema hidrotérmico.

2.2. SISTEMA HIDROTÉRMICO

En el desarrollo de este trabajo vamos a considerar un sistema hidrotérmico que consta de m centrales térmicas y n centrales hidráulicas. Veamos la definición de algunos de los elementos presentes en todo problema hidrotérmico.

2.2.1. Centrales Térmicas

Definición 2.1 *Se denomina función de costo de la central térmica i -ésima la aplicación*

$$F_i : D_i \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que relaciona el consumo instantáneo de combustible de la central térmica i -ésima con la potencia generada por ella.

De este modo si denotamos por $P_i(t)$ la potencia generada en el instante t , el costo de combustible consumido durante el intervalo de optimización $[0, T]$ será

$$\int_0^T F_i(P_i(t)) dt$$

Se denota por D_i el conjunto de valores de la potencia generable en cada instante por la central térmica i -ésima.

Definición 2.2 *Se dirá que $P : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ es admisible para F_i si*

$$\forall t \in [0, T], P(t) \in D_i$$

Definición 2.3 *Se denomina \mathcal{F}_i el conjunto de elementos admisibles para F_i .*

Y se denota por \mathcal{F} a $\prod_{i=1}^m \mathcal{F}_i$.

Definición 2.4 *Se denomina función de aportación efectiva de la central térmica i -ésima la aplicación*

$$\phi_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}$$

que asigna a cada valor de la potencia generada por la térmica i -ésima la aportación que supone al sistema.

Definición 2.5 Se denomina función de pérdidas de la central térmica i -ésima la aplicación definida en D_i

$$p_i(x) = x - \phi_i(x)$$

que mide la diferencia entre la potencia generada por la central térmica i -ésima y la aportación efectiva al sistema.

Observación 1 La función de costo, utilizada en una gran parte de los estudios relativos al tema, es un polinomio de segundo grado

$$F_i(x) = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2$$

Es también habitual considerar como función de pérdidas $p_i(x) = b_{ii} \cdot x^2$ (fórmula de Kirchmayer¹).

Así pues, tomando las funciones de costo $F_i : [0, \frac{1}{b_{ii}}] \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$F_i(x) = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2$$

y las funciones de aportación efectiva $\phi_i : [0, \frac{1}{2b_{ii}}] \rightarrow [0, \frac{1}{4b_{ii}}]$ ($b_{ii} > 0$) de la forma

$$\phi_i(x) = x - b_{ii}x^2$$

siendo $p_i(x) = b_{ii}x^2$ la función de pérdidas, las funciones ϕ_i son biyectivas y sus inversas son

$$\phi_i^{-1}(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4b_{ii}x}}{2b_{ii}}$$

con lo cual las nuevas funciones de costo, que incorporan las pérdidas que se producen en el sistema, tal como demostraron Bayón y otros [13], serán expresadas en la forma $\tilde{F}_i = (F_i \circ \phi_i^{-1})$

$$\tilde{F}_i(x) = (F_i \circ \phi_i^{-1})(x) = F_i\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4b_{ii}x}}{2b_{ii}}\right)$$

o, más concretamente

$$\tilde{F}_i(x) = \alpha_i + \beta_i \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4b_{ii}x}}{2b_{ii}}\right) + \gamma_i \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4b_{ii}x}}{2b_{ii}}\right)^2$$

¹ b_{ii} es el denominado coeficiente de pérdidas.

2.2.2. Centrales Hidráulicas

Definición 2.6 Se denomina función de generación hidráulica efectiva la aplicación

$$H : \Omega_H \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde

$$H(t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t), z'_1(t), z'_2(t), \dots, z'_n(t))$$

representa el valor de la potencia aportada al sistema en el instante t por las centrales hidráulicas en su conjunto, siendo:

★ $z_i(t)$ el *volumen turbinado* hasta el instante t (en adelante volumen) por la central i -ésima.

★ $z'_i(t)$ el *caudal descargado* en el instante t (en adelante caudal) por la central i -ésima.

★ $\Omega_H \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{2n}$ el dominio de definición de H .

Definición 2.7 Se dirá que $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ es admisible para H si:

- I) z_i es de clase \widehat{C}^1 , $\forall i = 1, \dots, n$ (Continua con derivada continua a trozos²).
- II) $(t, \bar{z}(t), \bar{z}'(t)) \in \Omega_H$, $\forall t \in [0, T]$

Se denota por \mathcal{H} el conjunto de elementos admisibles para H .

Todos los modelos parten de la estimación de que la potencia $H(t)$ generada en cada instante es función del caudal $q'(t)$ descargado y de la altura $h(t)$ del salto de agua que, a su vez, dependerá de la geometría del depósito, características técnicas de la central y simplificaciones del problema:

$$H(t) = \Phi(q'(t), h(t))$$

2.3. PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN HIDROTÉRMICA

En este apartado se presenta y formula matemáticamente el problema de optimización hidrotérmica³, teniendo presente, también, la posibilidad de considerar limitaciones en las potencias generadas por las centrales y la valoración del agua consumida por las hidráulicas.

²Es natural consentir que las derivadas de las funciones admisibles tengan discontinuidades, pues equivale a permitir variaciones bruscas del caudal descargado, lo cual es en la práctica perfectamente posible.

³A lo largo de todo el trabajo, se utilizarán términos propios y exclusivos de los sistemas hidrotérmicos con el fin de facilitar la interpretación de determinadas hipótesis que se utilizan y de los resultados que se obtienen. No obstante, las formulaciones y conclusiones mantendrán su validez en cualquier problema de optimización de recursos que comparta con los problemas de optimización hidrotérmica los aspectos esenciales.

Definición 2.8 Se denomina potencia demandada la función

$$P_d : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$$

que expresa la potencia que hay que suministrar al sistema en cada instante del intervalo de optimización $[0, T]$.

Denotaremos por b_i el volumen de agua disponible que puede turbinar la central hidráulica i -ésima hasta el instante T y por $\bar{\mathbf{b}} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ el vector de volúmenes disponibles de las n centrales hidráulicas.

2.3.1. Problema hidrotérmico generalizado

Presentamos, a continuación, el problema hidrotérmico generalizado.

Definición 2.9 Se denomina problema hidrotérmico generalizado el problema de minimizar el funcional

$$F(y_1, \dots, y_m, \bar{\mathbf{z}}) = \int_0^T \sum_{i=1}^m F_i(y_i(t)) dt$$

dentro del conjunto Δ de elementos admisibles definido de la manera siguiente

$$\Delta = \{(y_1, \dots, y_m, \bar{\mathbf{z}}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{H} / \text{satisfacen 1) y 2)}\}$$

1) Ecuación de equilibrio:

$$\sum_{i=1}^m \phi_i(y_i(t)) + H(t, \bar{\mathbf{z}}(t), \bar{\mathbf{z}}'(t)) = P_d(t), \forall t \in [0, T]$$

2) Restricciones de volumen disponible:

$$z_i(0) = 0, \quad z_i(T) = b_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

Obsérvese que pueden imponerse limitaciones en la generación de potencia tanto térmica como hidráulica sin más que precisar los conjuntos de funciones admisibles, \mathcal{F} y \mathcal{H} . Si no imponemos restricciones a la función de generación hidráulica permitiendo que pueda tomar valores negativos, estudiaremos en este problema las centrales de bombeo. En las secciones siguientes detallaremos más explícitamente este comentario.

Definición 2.10 Se dirá que $(P_1, \dots, P_m, \bar{\mathbf{q}}) \in \Delta$ es solución del problema si

$\forall (y_1, \dots, y_m, \bar{\mathbf{z}}) \in \Delta$ se verifica:

$$\int_0^T \sum_{i=1}^m F_i(P_i(t)) dt \leq \int_0^T \sum_{i=1}^m F_i(y_i(t)) dt$$

2.3.2. Problema hidrotérmico de Bolza

El problema hidrotérmico se centra en la minimización del consumo de combustible de las centrales térmicas para unos determinados volúmenes de agua disponible para cada una de las centrales hidráulicas. Sin embargo, dependiendo de las zonas donde están situadas las centrales hidráulicas y de sus condiciones atmosféricas, tal vez sea necesario, con el objeto de ser dedicada a otras necesidades (consumo humano, regadío,...), valorar la cantidad de agua utilizada al final del horizonte temporal en que se realiza el estudio. Es natural, por tanto, plantear el problema de tal modo que el coste de producción de energía de los sistemas hidrotérmicos no dependa exclusivamente del consumo de combustible de las centrales térmicas, sino también del volumen de agua turbinada. En este caso se precisa incorporar en el funcional objetivo un sumando en el que se valore la cantidad de agua consumida en el instante final del intervalo de optimización.

Definición 2.11 *Se denomina función de valoración del agua la aplicación*

$$S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

continua y con derivadas parciales primeras continuas, donde

$$S(z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))$$

representa el valor del agua turbinada hasta el instante t por las centrales hidráulicas en su conjunto.

Definición 2.12 *Con la notación utilizada en las definiciones anteriores, se denomina problema hidrotérmico de Bolza el problema de minimizar el funcional*

$$F(y_1, \dots, y_m, \bar{z}) = \int_0^T \sum_{i=1}^m F_i(y_i(t)) dt + S[\bar{z}(T)]$$

dentro del conjunto de elementos admisibles definido de la manera siguiente

$$\Delta_B = \{(y_1, \dots, y_m, \bar{z}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{H} / \text{satisfacen 1) 2) y 3)}\}$$

1) *Ecuación de equilibrio:*

$$\sum_{i=1}^m \phi_i(y_i(t)) + H(t, \bar{z}(t), \bar{z}'(t)) = P_d(t), \forall t \in [0, T]$$

2) *Restricciones de potencia térmica e hidráulica*

$$P_i^{\min} \leq y_i(t) \leq P_i^{\max} \quad \text{y} \quad 0 \leq H(t, \bar{z}(t), \bar{z}'(t)) \leq P_d(t)$$

3) *Restricciones de volumen disponible:*

$$z_i(0) = 0, \quad z_i(T) \leq b_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

Definición 2.13 Se dirá que $(P_1, \dots, P_m, \bar{\mathbf{q}}) \in \Delta_B$ es solución del problema si

$\forall (y_1, \dots, y_m, \bar{\mathbf{z}}) \in \Delta_B$ se verifica:

$$\int_0^T \sum_{i=1}^m F_i(P_i(t)) dt + S[\bar{\mathbf{q}}(T)] \leq \int_0^T \sum_{i=1}^m F_i(y_i(t)) dt + S[\bar{\mathbf{z}}(T)]$$

Capítulo 3

EQUIVALENTE MINIMIZADORA

3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a estudiar la construcción de la térmica equivalente. Es fundamental la importancia de poder sustituir un problema con m centrales térmicas (H_n-T_m) por otro equivalente (H_n-T_1) con una sola: la térmica equivalente. De hecho, su construcción es una condición indispensable para el trabajo realizado en esta tesis, al utilizar un modelo desacoplado para la resolución del problema hidrotérmico.

La idea de la térmica equivalente fue contemplada por **El-Hawary y Christensen** [49] en problemas sólo térmicos y para funciones de costo polinómicas de segundo grado, obviando la restricción de positividad de las potencias. En esta línea de trabajar en problemas sólo térmicos, **Kannan y Nityanandan** [83] utilizan la aproximación por mínimos cuadrados para la construcción de la equivalente sin considerar pérdidas de transmisión en el sistema y **Ramraj** [120] usa la misma técnica para el estudio de problemas con limitaciones de combustible en algunas centrales. La construcción de la térmica equivalente de funciones de costo de tercer orden ha sido abordada por **Narendiran** y otros [111] e imponiendo limitaciones de combustible por **Kannan y Kayalvizhi** [84]. Un estudio más riguroso determinando la equivalente minimizadora e incluyendo la restricción de positividad de las potencias para funciones de costo polinómicas de segundo grado fue desarrollado por **Bayón** y otros [15] en problemas con componente hidráulica que es donde adquiere su verdadera importancia. Estos mismos autores en [13] aproximan, usando el método de mínimos cuadrados, la función de costo que incorpora las pérdidas del sistema (y, por tanto, no es cuadrática) por una cuadrática, obteniendo la térmica equivalente de esta última.

Es indudable la importancia de poder sustituir varias centrales térmicas por una equivalente en su comportamiento óptimo. De hecho, muchos autores han hecho uso

de la térmica equivalente para la resolución de problemas hidrotérmicos considerando modelos concretos para la función de costo térmico. De todo lo anterior se pone de manifiesto el gran interés en construir la equivalente térmica independientemente del modelo de función de costo considerado.

En este capítulo se desarrolla, en primer lugar, la posibilidad de construir la equivalente minimizadora de m centrales térmicas, independientemente del modelo de función de costo utilizado; imponiendo la natural restricción de positividad para las potencias.

Por otra parte, para una mejor aproximación a la realidad, esta restricción debe ser sustituida por una potencia mínima positiva pero no nula necesariamente. Las centrales térmicas tienen una limitación sobre su potencia de salida. La potencia mínima, llamada mínimo técnico, se debe a criterios de diseño de la caldera, del propio generador y a aspectos de estabilidad de la combustión. La potencia máxima que pueden producir las centrales, debido a las características del diseño de las mismas, se denomina potencia máxima nominal. Surgen, por tanto, unas restricciones mínimas y máximas de potencia derivadas de la capacidad técnica de generación de las propias centrales (no necesariamente iguales para todas ellas). Razones por las cuales también procederemos a la construcción de la equivalente minimizadora de m centrales térmicas, independientemente del modelo de función de costo utilizado, imponiendo unas restricciones mínimas y máximas de generación de potencia.

Finalmente, se han desarrollado dos programas, con el paquete Mathematica, para la obtención de la equivalente minimizadora y mostramos algunos ejemplos de su aplicación al caso de centrales térmicas de la red Asturiana.

El trabajo desarrollado en este capítulo ha dado lugar a una publicación de Bayón y otros [21].

3.2. REDUCCIÓN DEL PROBLEMA H_n-T_m AL H_n-T_1

La determinación de la equivalente minimizadora radica en la posibilidad de, a partir del conocimiento de la aportación instantánea de las centrales térmicas en su conjunto, asignar a cada central térmica la generación de potencia que haga mínimo el costo instantáneo global de combustible.

En términos matemáticos esto se traduce en la construcción de una función

$$\Psi(\xi) = \min_{C_\xi} (F_1(x_1) + \dots + F_m(x_m))$$

en el conjunto de elementos de la forma

$$C_\xi := \{(x_1 + \dots + x_m) / x_1 + \dots + x_m = \xi \}.$$

siendo D_i el conjunto de valores de potencia que puede ser generada por la central térmica i -ésima y F_i su función de costo. Suponemos que:

$$\forall \xi \in D = D_1 + D_2 + \dots + D_m \subseteq \mathbb{R} \quad \exists (x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m D_i$$

único mínimo de $\sum_{i=1}^m F_i(x_i)$ en C_ξ .

En suma, supondremos que $\forall \xi \in D$ el problema de calcular el mínimo de la función $\sum_{i=1}^m F_i(x_i)$ sujeto a la condición $\sum_{i=1}^m x_i = \xi$ admite una única solución.

Definición 3.1 Llamaremos función equivalente minimizadora de $\{F_i\}_{i=1}^m$ la aplicación

$$\Psi : D_1 + D_2 + \dots + D_m \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$\Psi(\xi) = \min_{C_\xi} \sum_{i=1}^m F_i(x_i)$$

Definición 3.2 Llamaremos función i -ésima de reparto la aplicación

$$\Psi_i : D_1 + D_2 + \dots + D_m \longrightarrow D_i$$

que satisface:

- i) $\sum_{i=1}^m \Psi_i(\xi) = \xi$
- ii) $\sum_{i=1}^m F_i(\Psi_i(\xi)) = \Psi(\xi)$.

En Bayón y otros [15] se estableció el siguiente resultado:

Teorema Sea Ψ función equivalente minimizadora de $\{F_i\}_{i=1}^m$ y sean $\{\Psi_i\}_{i=1}^m$ las funciones de reparto.
Si $(P(t), \bar{\mathbf{q}}(t))$ es solución del problema

$$\Lambda^* \equiv \text{H}_n\text{-T}_1\{P_d, \{\Psi\}, H, \bar{\mathbf{b}}\}$$

entonces

$$(\Psi_1(P(t)), \Psi_2(P(t)), \dots, \Psi_m(P(t)), \bar{\mathbf{q}}(t))$$

es solución del problema,

$$\Lambda \equiv \text{H}_n\text{-T}_m\{P_d, \{F_i\}_1^m, H, \bar{\mathbf{b}}\}$$

y se construyó la térmica equivalente para funciones de costo cuadráticas:

Teorema. *La función equivalente minimizadora de funciones de costo cuadráticas, $F_i(x) = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2$, es polinómica de segundo grado a trozos*

$$\Psi(\xi) = \sum_{i=1}^m F_i(\Psi_i(\xi)) = \tilde{\alpha}_k + \tilde{\beta}_k \xi + \tilde{\gamma}_k \xi^2 \text{ si } \delta_k \leq \xi < \delta_{k+1},$$

siendo

$$\delta_k = \frac{1}{2} \left[\beta_k \sum_{i=1}^k \frac{1}{\gamma_i} - \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i}{\gamma_i} \right]$$

$$\text{con } \tilde{\gamma}_k = \frac{1}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{\gamma_i}}; \quad \tilde{\beta}_k = \tilde{\gamma}_k \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i}{\gamma_i} \quad \text{y} \quad \tilde{\alpha}_k = \sum_{i=1}^m \alpha_i + \frac{\tilde{\beta}_k^2}{4\tilde{\gamma}_k} - \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{4\gamma_i}$$

Además es de clase C^1 y verifica $\Psi'(\delta_k) = \beta_k$ para $i = 1, \dots, m$.

Sobre la base de estas definiciones y resultados planteamos la construcción de la equivalente minimizadora de m centrales térmicas considerando un modelo general en sus funciones de costo. En primer lugar, demostraremos que si F'_i es estrictamente creciente ($i = 1, \dots, m$), siendo F_i funciones cualesquiera¹, con la natural restricción de positividad, entonces la equivalente minimizadora, Ψ , de $\{F_i\}_{i=1}^m$ existe y es única.

Teorema 3.1 *Sea $\{F_i\}_{i=1}^m \subset C^1[0, \infty)$ una colección de funciones tales que F'_i es estrictamente creciente ($i = 1, \dots, m$), ordenadas de modo que $F'_i(0) \leq F'_{i+1}(0)$, y sea la función $F : [0, \infty)^m \rightarrow \mathbb{R}$*

$$F(x_1, \dots, x_m) := \sum_{i=1}^m F_i(x_i)$$

Sea

$$C_a := \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m / x_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^m x_i = a \right\}.$$

Entonces existe una colección única $\{\Psi_i\}_{i=1}^m$ tal que $\forall a \geq 0$,

- (1) $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a)) \in \hat{C}_a$ proporciona el mínimo de F sobre C_a si y sólo si
- $$a > \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F'_m \right)(0) \quad (\text{o, equivalentemente, } \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F'_m \right)^{-1}(a) > 0)$$

¹La simple consideración de las pérdidas de potencia transforma la función de costo en no cuadrática, surgiendo así la necesidad de realizar un estudio de la equivalente minimizadora para funciones de costo más generales.

$$\text{siendo } \Psi_k(a) = \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F_k' \right)^{-1} (a).$$

(2) Si $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a)) \notin \hat{C}_a$ y proporciona el mínimo de F sobre C_a y $\Psi_i(a) = 0$ entonces $\Psi_{i+1}(a) = \dots = \Psi_m(a) = 0$

Demostración. La existencia de mínimo en C_a está asegurada por su compacidad; la convexidad estricta de F asegura la unicidad.

(1) **Necesidad**

Si $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a)) \in \hat{C}_a$ es mínimo de F en C_a , entonces es también mínimo local de F en $\{(x_1, \dots, x_m) \in (0, \infty)^m / \sum_{i=1}^m x_i = a\}$

Por consiguiente, para algún $\lambda_a \in \mathbb{R}$, $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a))$ es punto crítico de

$$F^*(x_1, \dots, x_m) = F(x_1, \dots, x_m) - \lambda_a \cdot (x_1 + \dots + x_m - a)$$

con lo cual, tendremos

$$0 = \frac{\partial F^*(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a))}{\partial x_i} = F_i'(\Psi_i(a)) - \lambda_a, \forall i = 1, \dots, m$$

de donde se deduce que $\Psi_i(a) = F_i'^{-1}(\lambda_a)$ y, puesto que $\sum_{i=1}^m \Psi_i(a) = a$, tendremos

$$a = \sum_{i=1}^m F_i'^{-1}(\lambda_a) \implies \lambda_a = \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \right)^{-1} (a)$$

y, en consecuencia,

$$\Psi_k(a) = F_k'^{-1} \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \right)^{-1} (a) = \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F_k' \right)^{-1} (a)$$

Ahora bien, puesto que $0 < \Psi_i(a)$ y F_i' y $F_i'^{-1}$ son estrictamente crecientes, tendremos que para cada i

$$\left(\sum_{k=1}^m F_k'^{-1} \circ F_i' \right) (0) < \left(\sum_{k=1}^m F_k'^{-1} \circ F_i' \right) (\Psi_i(a)) = a$$

en particular,

$$\left(\sum_{k=1}^m F_k'^{-1} \circ F_m' \right) (0) < \left(\sum_{k=1}^m F_k'^{-1} \circ F_m' \right) (\Psi_m(a)) = a$$

\Leftarrow) **Suficiencia**

Consideremos

$$\Psi_k(a) = \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F_k' \right)^{-1} (a)$$

Veamos, en primer lugar, que $\Psi_k(a) > 0$ para cada $k \in \{1, \dots, m\}$.

Teniendo en cuenta que $F'_m(0) \geq F'_k(0)$ para cada $k \in \{1, \dots, m\}$, el carácter creciente de F'_i y de su inversa,

$$a > \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F'_m \right) (0) \geq \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F'_k \right) (0) \implies \Psi_k(a) > 0$$

de modo que $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a)) \in \dot{C}_a$.

Prestando atención a las consideraciones hechas en la implicación directa, $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a))$ es punto crítico del funcional convexo

$$F^*(x_1, \dots, x_m) = F(x_1, \dots, x_m) - \lambda_a \cdot (x_1 + \dots + x_m - a)$$

considerado en $(0, \infty)^m$, donde

$$\lambda_a = \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \right)^{-1} (a).$$

De modo que $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a))$ es mínimo de F^* y, en consecuencia, es también mínimo de la restricción de F en \dot{C}_a .

(2) Supongamos que $\Psi_i(a) = 0$ y que $\Psi_{i+1}(a) > 0$.

Consideremos la función $f : [0, \Psi_{i+1}(a)] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(\varepsilon) = F(\Psi_1(a), \dots, \Psi_i(a) + \varepsilon, \Psi_{i+1}(a) - \varepsilon, \dots, \Psi_m(a))$$

Teniendo en cuenta que $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_i(a) + \varepsilon, \Psi_{i+1}(a) - \varepsilon, \dots, \Psi_m(a)) \in C_a$ para cada $\varepsilon \in [0, \Psi_{i+1}(a))$, será suficiente observar que $f'_+(\varepsilon) < 0$, lo cual es contradictorio con el carácter mínimo de $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a))$.

Efectivamente,

$$f'(\varepsilon) = F'_i(\Psi_i(a) + \varepsilon) - F'_{i+1}(\Psi_{i+1}(a) - \varepsilon) = F'_i(\varepsilon) - F'_{i+1}(\Psi_{i+1}(a) - \varepsilon)$$

$$f'(0) = F'_i(0) - F'_{i+1}(\Psi_{i+1}(a)) < F'_i(0) - F'_{i+1}(0) < 0$$

■

El significado del último punto del teorema es el siguiente: funcionando las centrales térmicas de forma óptima, si una de ellas está desconectada (genera cero), también deben estarlo todas aquéllas cuya derivada de la función de costo en cero es mayor o igual que la correspondiente de aquélla.

Teorema 3.2 Sean $\{F_i\}_{i=1}^m$, F , y C_a en las condiciones del teorema 3.1. Entonces existe $\{\delta_k\}_{k=1}^{m+1} \subset \bar{\mathbb{R}}$ siendo $\delta_{m+1} = \infty$ y $\{\Psi_k\}_{k=1}^m \subset C[0, \infty)$ de tal modo que para cada $a > 0$, el mínimo de F en C_a se alcanza en $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a))$, siendo

$$\delta_k = \sum_{i=1}^k (F_i'^{-1} \circ F'_k)(0) \leq \sum_{i=1}^{k+1} (F_i'^{-1} \circ F'_{k+1})(0) = \delta_{k+1}$$

$$\Psi_k(a) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^j F_i'^{-1} \circ F_k' \right)^{-1} (a) & \text{si } \delta_k \leq \delta_j \leq a < \delta_{j+1} \\ 0 & \text{si } a < \delta_k \end{cases}$$

Demostración. Procederemos por inducción.

Si $m = 1$ es obvio que $\Psi_1(a) = a$.

Supongamos cierto el teorema hasta $m - 1$ y veamos que ello implica que es cierto para m .

Si $a > \delta_m$, en virtud del apartado (1) del teorema 3.1

$$\Psi_k(a) = \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F_k' \right)^{-1} (a) > 0, \quad \forall k.$$

Si $a \leq \delta_m$, según (2) del teorema 3.1, $\Psi_m(a) = 0$ y estamos en condiciones de utilizar la hipótesis de inducción según la cual $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_{m-1}(a))$ minimiza $\sum_{i=1}^{m-1} F_i(x_i)$ restringido a $\sum_{i=1}^{m-1} x_i = a$.

Por tanto, $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a))$ minimiza $\sum_{i=1}^m F_i(x_i)$ restringido a $\sum_{i=1}^m x_i = a$. ■

Observación 2 En este teorema hemos construido las funciones de reparto Ψ_k , concluyendo, además, que si $\delta_j \leq a < \delta_{j+1}$, el “reparto” se efectúa entre las centrales térmicas de la primera a la j -ésima, permaneciendo las restantes inactivas.

Probaremos, a continuación, que para un modelo general de funciones de costo, la equivalente minimizadora es una función de clase C^1 . Veamos, en primer lugar, el siguiente lema.

Lema 3.1 Sean $\{F_i\}_{i=1}^2 \subset C^1[0, \infty)$ funciones tales que F_i' es estrictamente creciente ($i = 1, 2$) de modo que $F_1'(0) \leq F_2'(0)$. Sea $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $F_1'(\delta) = F_2'(0)$ y la función

$$g(\xi) = \begin{cases} \xi & \text{si } \xi < \delta \\ [(F_2')^{-1} \circ F_1' + I_d]^{-1}(\xi) & \text{si } \xi \geq \delta. \end{cases}$$

Entonces se verifica:

- i) Para cada $a > 0$ $(g(a), a - g(a))$ proporciona el mínimo valor de $F(x, y) = F_1(x) + F_2(y)$ en el conjunto $\{(x, y) \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y = a\}$.
- ii) La función $\varphi(a) = F_1(g(a)) + F_2(a - g(a))$ es de clase C^1 .

Demostración. i) Se trata del teorema 3.2 en el caso particular de $m = 2$.

ii) El único punto conflictivo es δ . Ahora bien, teniendo en cuenta que g es continua y que $g(\delta) = \delta$

$$\varphi(\delta-) = F_1(\delta) + F_2(0)$$

$$\varphi(\delta+) = F_1(g(\delta)) + F_2(\delta - g(\delta)) = F_1(\delta) + F_2(0)$$

de modo que φ es continua.

Veamos las derivadas laterales en δ :

$$\varphi'(\delta-) = g'(\delta-)F_1'(g(\delta-)) + (1 - g'(\delta-))F_2'(\delta - g(\delta-))$$

$$\varphi'(\delta-) = F_1'(\delta)$$

$$\varphi'(\delta+) = g'(\delta+)F_1'(\delta+) + (1 - g'(\delta+))F_2'(0)$$

$$\varphi'(\delta+) = g'(\delta+)[F_1'(\delta+) - F_2'(0)] + F_2'(0)$$

$$\varphi'(\delta+) = F_2'(0) = F_1'(\delta)$$

Así pues $\varphi'(\delta+) = \varphi'(\delta-)$. ■

Teorema 3.3 Sean $\{F_i\}_{i=1}^m$, F , y C_a en las condiciones del teorema 3.1. Entonces la equivalente minimizadora

$$\Psi(a) = \sum_{k=1}^m F_k(\Psi_k(a)) = \min_{v \in C_a} F(v)$$

es de clase C^1 .

Demostración. Procederemos por inducción. Para $m = 1$ es obvio. Consideremos la operación

$$(F \odot G)(x) := \min_{a \in [0, x]} F(a) + G(x - a) = \min_{(a, b) \in C_x} F(a) + G(b).$$

Es fácil darse cuenta de que \odot es asociativa y conmutativa. En estos términos

$$\Psi = F_1 \odot F_2 \odot \cdots \odot F_m = (F_1 \odot F_2 \odot \cdots \odot F_{m-1}) \odot F_m.$$

Ahora bien, por hipótesis de inducción, $\Theta = F_1 \odot F_2 \odot \cdots \odot F_{m-1}$ es de clase C^1 , de modo que estamos en condiciones de utilizar el lema anterior y llegar a que $\Theta \odot F_m = \Psi$ es de clase C^1 . ■

3.3. RESTRICCIONES MÁXIMAS Y MÍNIMAS

En este apartado analizamos la existencia y unicidad de la equivalente minimizadora para m centrales térmicas, independientemente del modelo de función de costo utilizado, considerando restricciones de potencia.

Presentamos, en primer lugar, la posibilidad de sustituir las centrales térmicas a las que imponemos una restricción de generación máxima de potencia por una equivalente para cualquier modelo de función de costo considerado.

Teorema 3.4 *Sea $\{F_i\}_{i=1}^m \subset C^1 [0, P_i^{\text{máx}}]$ una colección de funciones tales que F'_i es estrictamente creciente ($i = 1, \dots, m$), ordenadas de modo que $F'_i(0) \leq F'_{i+1}(0)$, con $F'_m(0) \leq F'_i(P_i^{\text{máx}})$, $\forall i$. Sea la función*

$$F : [0, P_1^{\text{máx}}] \times [0, P_2^{\text{máx}}] \times \dots \times [0, P_m^{\text{máx}}] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x_1, \dots, x_m) := \sum_{i=1}^m F_i(x_i)$$

Sea

$$D_a := \{(x_1, \dots, x_m) \in [0, P_1^{\text{máx}}] \times [0, P_2^{\text{máx}}] \times \dots \times [0, P_m^{\text{máx}}] \mid \sum_{i=1}^m x_i = a\}.$$

Entonces existe una colección única $\{\Psi_i\}_{i=1}^m$ tal que $\forall a, 0 \leq a \leq \sum_{i=1}^m P_i^{\text{máx}}$,

(1) $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a)) \in \hat{D}_a$ y proporciona el mínimo de F sobre D_a si y

$$\text{sólo si } \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F'_m \right)(0) < a < \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F'_h \right)(P_h^{\text{máx}})$$

siendo $F'_h(P_h^{\text{máx}}) = \min\{F'_i(P_i^{\text{máx}})\} \forall i \in \{1, \dots, m\}$ y

$$\Psi_k(a) = \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F'_k \right)^{-1}(a).$$

(2) $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a)) \notin \hat{D}_a$ y proporciona el mínimo de F sobre D_a , entonces:

i) si para cierto $i \in \{1, \dots, m-1\}$, $\Psi_i(a) = 0$, entonces $\Psi_{i+1}(a) = 0$.

ii) si para cierto $i \in \{1, \dots, m\}$, $\Psi_i(a) = P_i^{\text{máx}}$, entonces $\forall k \in \{1, \dots, m\}$ tal que $F'_k(P_k^{\text{máx}}) \leq F'_i(P_i^{\text{máx}})$

$$\Psi_k(a) = P_k^{\text{máx}}.$$

Demostración. La existencia de mínimo en D_a está asegurada por su compacidad; la convexidad estricta de F asegura la unicidad.

(1) **Necesidad**

Si $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a)) \in \hat{D}_a$ es mínimo de F en D_a , entonces es también mínimo local de F en $\{(x_1, \dots, x_m) \in (0, P_1^{\text{máx}}) \times (0, P_2^{\text{máx}}) \times \dots \times (0, P_m^{\text{máx}}) \mid \sum_{i=1}^m x_i = a\}$.

Por consiguiente, para algún $\lambda_a \in \mathbb{R}$, $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a))$ es punto crítico de

$$F^*(x_1, \dots, x_m) = F(x_1, \dots, x_m) - \lambda_a \cdot (x_1 + \dots + x_m - a),$$

con lo cual tendremos

$$0 = \frac{\partial F^*(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a))}{\partial x_i} = F'_i(\Psi_i(a)) - \lambda_a, \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

de donde se deduce que $\Psi_i(a) = F_i'^{-1}(\lambda_a)$ y, puesto que $\sum_{i=1}^m \Psi_i(a) = a$, tendremos

$$a = \sum_{i=1}^m F_i'^{-1}(\lambda_a) \implies \lambda_a = \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \right)^{-1} (a)$$

y, en consecuencia,

$$\Psi_k(a) = F_k'^{-1} \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \right)^{-1} (a) = \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F_k' \right)^{-1} (a).$$

Ahora bien, puesto que $0 < \Psi_i(a) < P_i^{\text{máx}}$ y F_i' y $F_i'^{-1}$ son estrictamente crecientes, tendremos que para cada i

$$\left(\sum_{k=1}^m F_k'^{-1} \circ F_i' \right) (0) < \left(\sum_{k=1}^m F_k'^{-1} \circ F_i' \right) (\Psi_i(a)) = a < \left(\sum_{k=1}^m F_k'^{-1} \circ F_i' \right) (P_i^{\text{máx}});$$

en particular,

$$\left(\sum_{k=1}^m F_k'^{-1} \circ F_m' \right) (0) < \left(\sum_{k=1}^m F_k'^{-1} \circ F_m' \right) (\Psi_m(a)) = a$$

y

$$\left(\sum_{k=1}^m F_k'^{-1} \circ F_h' \right) (\Psi_h(a)) = a < \left(\sum_{k=1}^m F_k'^{-1} \circ F_h' \right) (P_h^{\text{máx}}).$$

\Leftarrow) **Suficiencia**

Consideremos

$$\Psi_k(a) = \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F_k' \right)^{-1} (a)$$

Veamos, en primer lugar, que $P_k^{\text{máx}} > \Psi_k(a) > 0$ para cada $k \in \{1, \dots, m\}$.

Teniendo en cuenta que $F_m'(0) \geq F_k'(0)$ y $F_h'(P_h^{\text{máx}}) \leq F_k'(P_k^{\text{máx}})$ para cada $k \in \{1, \dots, m\}$, el carácter creciente de F_i' y de su inversa,

$$a > \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F_m' \right) (0) \geq \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F_k' \right) (0) \implies \Psi_k(a) > 0$$

y

$$a < \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F_h' \right) (P_h^{\text{máx}}) \leq \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F_k' \right) (P_k^{\text{máx}}) \implies \Psi_k(a) < P_k^{\text{máx}}$$

de modo que $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a)) \in \hat{D}_a$.

Prestando atención a las consideraciones hechas en la implicación directa, sabemos que $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a))$ es punto crítico del funcional convexo

$$F^*(x_1, \dots, x_m) = F(x_1, \dots, x_m) - \lambda_a \cdot (x_1 + \dots + x_m - a)$$

considerado en $(0, P_1^{\text{máx}}) \times (0, P_2^{\text{máx}}) \times \dots \times (0, P_m^{\text{máx}})$, donde

$$\lambda_a = \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \right)^{-1} (a).$$

De modo que $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a))$ es mínimo de F^* y, en consecuencia, es también mínimo de la restricción de F en D_a .

(2) i) Ya demostrado en (2) del teorema 3.1

ii) Supongamos que para cierto $i \in \{1, \dots, m\}$, $\Psi_i(a) = P_i^{\text{máx}}$ y que $\Psi_j(a) < P_j^{\text{máx}}$ siendo $F_j'(P_j^{\text{máx}}) \leq F_i'(P_i^{\text{máx}})$.

Consideremos, sin pérdida de generalidad, que $i < j$, y la función

$$g : [0, P_j^{\text{máx}} - \Psi_j(a)] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$g(\varepsilon) = F(\Psi_1(a), \dots, \Psi_i(a) - \varepsilon, \dots, \Psi_j(a) + \varepsilon, \dots, \Psi_m(a)).$$

Teniendo en cuenta que $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_i(a) - \varepsilon, \dots, \Psi_j(a) + \varepsilon, \dots, \Psi_m(a)) \in D_a$ para cada $\varepsilon \in [0, P_j^{\text{máx}} - \Psi_j(a))$, será suficiente observar que $g'_+(0) < 0$, lo cual es contradictorio con el carácter mínimo de $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a))$.

Efectivamente,

$$g'(\varepsilon) = -F_i'(\Psi_i(a) - \varepsilon) + F_j'(\Psi_j(a) + \varepsilon) = -F_i'(P_i^{\text{máx}} - \varepsilon) + F_j'(\Psi_j(a) + \varepsilon)$$

$$g'(0) = -F_i'(P_i^{\text{máx}}) + F_j'(\Psi_j(a)) < -F_i'(P_i^{\text{máx}}) + F_j'(P_j^{\text{máx}}) < 0. \quad \blacksquare$$

El significado de (2) ii) es el siguiente: funcionando todas las centrales térmicas de forma óptima, si una central i alcanza su potencia máxima, también la habrán alcanzado ya todas aquéllas cuya derivada de la función de costo en su potencia máxima es menor o igual que la correspondiente a dicha central i .

Bajo estas condiciones, probamos el teorema siguiente:

Teorema 3.5 Sean $\{F_i\}_{i=1}^m$, F , y D_a en las condiciones del teorema 3.4 y sea $\sigma \in \Sigma_m$ la permutación tal que

$$F'_{\sigma(i)}(P_{\sigma(i)}^{\text{máx}}) \leq F'_{\sigma(i+1)}(P_{\sigma(i+1)}^{\text{máx}}), \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Entonces existen $\{\delta_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}$ y $\{\theta_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}$, siendo $\theta_m = \sum_{i=1}^m P_i^{\text{máx}}$ y

$\{\Psi_k\}_{k=1}^m \subset C[0, P_k^{\text{máx}}]$, de tal modo que

i) $\delta_k \leq \delta_{k+1} \forall k \in \{1, \dots, m\}$, $\delta_m < \theta_1$, y $\theta_k \leq \theta_{k+1}$, $\forall k \in \{1, \dots, m\}$, siendo

$$\delta_k = \sum_{i=1}^k (F_i'^{-1} \circ F_k')(0)$$

y

$$\theta_k = \sum_{i=k}^m (F_{\sigma(i)}'^{-1} \circ F_{\sigma(k)}')(P_{\sigma(k)}^{\max}) + \sum_{i=1}^{k-1} P_{\sigma(i)}^{\max}.$$

ii) Para cada $a \in \left[0, \sum_{i=1}^m P_i^{\max}\right]$, el mínimo de F en D_a se alcanza en $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a))$ siendo

$$\Psi_k(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < \delta_k \\ \left(\sum_{i=1}^j F_i'^{-1} \circ F_k'\right)^{-1}(a) & \text{si } \delta_k \leq \delta_j \leq a < \delta_{j+1} \\ \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F_k'\right)^{-1}(a) & \text{si } \delta_m \leq a < \theta_1 \\ \left(\sum_{i=j+1}^m F_{\sigma(i)}'^{-1} \circ F_k'\right)^{-1}\left(a - \sum_{i=1}^j P_{\sigma(i)}^{\max}\right) & \text{si } \theta_j \leq a < \theta_{j+1} \\ P_k^{\max} & \text{si } \theta_{\sigma^{-1}(k)} \leq a \end{cases}$$

Demostración. i) Dado el carácter creciente de F_i' y de $F_i'^{-1}$, teniendo en cuenta que $\forall i, F_i'(0) \leq F_{i+1}'(0)$ y $F_m'(0) \leq F_i'(P_i^{\max})$, resulta evidente que

$$\begin{aligned} \delta_k &= \sum_{i=1}^k (F_i'^{-1} \circ F_k')(0) \leq \sum_{i=1}^{k+1} (F_i'^{-1} \circ F_{k+1}')(0) = \delta_{k+1} \\ \delta_m &= \sum_{i=1}^m (F_i'^{-1} \circ F_m')(0) \leq \sum_{i=1}^m (F_i'^{-1} \circ F_{\sigma(1)}')(P_{\sigma(1)}^{\max}) = \theta_1 \\ \theta_k &= \sum_{i=k}^m (F_{\sigma(i)}'^{-1} \circ F_{\sigma(k)}')(P_{\sigma(k)}^{\max}) + \sum_{i=1}^{k-1} P_{\sigma(i)}^{\max} = \\ &= \sum_{i=k+1}^m (F_{\sigma(i)}'^{-1} \circ F_{\sigma(k)}')(P_{\sigma(k)}^{\max}) + (F_{\sigma(k)}'^{-1} \circ F_{\sigma(k)}')(P_{\sigma(k)}^{\max}) + \sum_{i=1}^{k-1} P_{\sigma(i)}^{\max} \leq \\ &\leq \sum_{i=k+1}^m (F_{\sigma(i)}'^{-1} \circ F_{\sigma(k+1)}')(P_{\sigma(k+1)}^{\max}) + \sum_{i=1}^k P_{\sigma(i)}^{\max} = \theta_{k+1}. \end{aligned}$$

ii) Procederemos por inducción.

Si $m = 1$ es obvio que $\Psi_1(a) = a$.

Supongamos cierto el teorema hasta $m - 1$ y veamos que ello implica que es cierto para m .

Si $\delta_m < a < \theta_1$, en virtud del apartado (1) del teorema 3.4,

$$0 < \Psi_k(a) = \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F_k' \right)^{-1} (a) < P_k^{\text{máx}}, \quad \forall k.$$

Si $a \leq \delta_m$, según (2) del teorema 3.4, $\Psi_m(a) = 0$ y estamos en condiciones de utilizar la hipótesis de inducción según la cual $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_{m-1}(a))$ minimiza $\sum_{i=1}^{m-1} F_i(x_i)$

restringido a $\sum_{i=1}^{m-1} x_i = a$. Por tanto, $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a))$ minimiza $\sum_{i=1}^m F_i(x_i)$ restringido a $\sum_{i=1}^m x_i = a$.

Si $\theta_1 \leq a \leq \theta_m$, según (2) del teorema 3.4, $\exists h / \Psi_h(a) = P_h^{\text{máx}}$ y considerando $a - P_h^{\text{máx}}$ estamos, de nuevo, en condiciones de utilizar la hipótesis de inducción según la cual

$$(\Psi_1(a - P_h^{\text{máx}}), \dots, \Psi_{h-1}(a - P_h^{\text{máx}}), \Psi_{h+1}(a - P_h^{\text{máx}}), \dots, \Psi_m(a - P_h^{\text{máx}}))$$

minimiza $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^m F_i(x_i)$ restringido a $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^m x_i = a - P_h^{\text{máx}}$. Por tanto, por cómo están

definidas las funciones $\Psi_i(a)$, se verifica que $(\Psi_1(a), \dots, \Psi_m(a))$ minimiza $\sum_{i=1}^m F_i(x_i)$

restringido a $\sum_{i=1}^m x_i = a$. ■

De este teorema, concluimos que, si $\delta_j \leq a < \delta_{j+1}$, el “reparto” se efectúa entre las centrales térmicas de la primera a la j -ésima, permaneciendo las restantes inactivas. Por otro lado, en el momento en que $\theta_j \leq a < \theta_{j+1}$ habrá j centrales que ya han alcanzado su potencia máxima.

Probamos, a continuación, que para un modelo general de funciones de costo, a las que imponemos, además de la restricción de positividad, unas limitaciones de potencias máximas, la equivalente minimizadora es una función de clase C^1 . En primer lugar, vemos el siguiente lema.

Lema 3.2 Sean $\{F_i\}_{i=1}^2 \subset C^1[0, P_i]$ funciones tales que F_i' es estrictamente creciente ($i = 1, 2$), de modo que $F_1'(0) \leq F_2'(0)$. Sea $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $F_1'(\delta) = F_2'(0)$ y

supongamos que $F'_1(P_1) \leq F'_2(P_2)$. Sea $\theta_1 = \sum_{i=1}^2 (F_i'^{-1} \circ F'_1)(P_1)$ y la función

$$g(\xi) = \begin{cases} \xi & \text{si } \xi < \delta \\ [(F'_2)^{-1} \circ F'_1 + Id]^{-1}(\xi) & \text{si } \delta \leq \xi < \theta_1 \\ P_1 & \text{si } \theta_1 \leq \xi \end{cases}$$

Se verifica:

i) Para cada a , $0 \leq a \leq \sum_{i=1}^2 P_i$, $(g(a), a - g(a))$ proporciona el mínimo valor de $F(x, y) = F_1(x) + F_2(y)$ en el conjunto

$$\{(x, y) / 0 \leq x \leq P_1 \wedge 0 \leq y \leq P_2 \wedge x + y = a\}.$$

ii) La función $\varphi(a) = F_1(g(a)) + F_2(a - g(a))$ es de clase C^1 .

Demostración. i) Se trata del teorema anterior en el caso particular de $m = 2$.

ii) Los únicos puntos conflictivos son δ y θ_1 . La continuidad y derivabilidad φ en δ ha sido probada en el lema 3.1. Teniendo en cuenta que g es continua y que $g(\theta_1) = \theta_1$

$$\begin{aligned} \varphi(\theta_1-) &= F_1(g(\theta_1)) + F_2(\theta_1 - g(\theta_1)) = F_1(\theta_1) + F_2(\theta_1 - P_1) \\ \varphi(\theta_1+) &= F_1(P_1) + F_2(\theta_1 - P_1) \end{aligned}$$

de modo que φ es continua. Veamos las derivadas laterales en θ_1 :

$$\varphi'(\theta_1-) = g'(\theta_1-)F'_1(g(\theta_1-)) + (1 - g'(\theta_1-))F'_2(\theta_1 - P_1)$$

como $\theta_1 = \sum_{i=1}^2 (F_i'^{-1} \circ F'_1)(P_1)$, se obtiene que $F'_2(\theta_1 - P_1) = F'_1(P_1)$; por tanto,

$$\begin{aligned} \varphi'(\theta_1-) &= g'(\theta_1-)F'_1(P_1) + (1 - g'(\theta_1-))F'_1(P_1) = F'_1(P_1) \\ \varphi'(\theta_1+) &= g'(\theta_1+)F'_1(P_1) + (1 - g'(\theta_1+))F'_1(P_1) = F'_1(P_1). \end{aligned}$$

Así, pues, $\varphi'(\theta_1+) = \varphi'(\theta_1-)$. ■

Observación 3 Si fuese $F'_2(P_2) \leq F'_1(P_1)$, se razonaría de manera análoga a la anterior, tomando $\theta_2 = \sum_{i=1}^2 (F_i'^{-1} \circ F'_2)(P_2)$ y la función

$$g(\xi) = \begin{cases} \xi & \text{si } \xi < \delta \\ [(F'_2)^{-1} \circ F'_1 + Id]^{-1}(\xi) & \text{si } \delta \leq \xi < \theta_2 \\ \xi - P_1 & \text{si } \theta_2 \leq \xi \end{cases}$$

Teorema 3.6 Sean $\{F_i\}_{i=1}^m$, F , y D_a en las condiciones del teorema 3.4. Entonces la equivalente minimizadora

$$\Psi(a) = \sum_{k=1}^m F_k(\Psi_k(a)) = \min_{v \in D_a} F(v)$$

es de clase C^1 .

Demostración. Se desarrolla de forma análoga a la del teorema 3.3, apoyándonos en el lema 3.2. ■

Una vez demostrada la existencia y unicidad, bajo ciertas condiciones, de la equivalente minimizadora de varias centrales térmicas, independientemente del modelo de función de costo utilizado e imponiendo unas restricciones de potencia máxima, nos planteamos la introducción de restricciones de potencia mínima distintas de cero².

Planteamos determinar la equivalente minimizadora de la familia de funciones $\{G_i\}_{i=1}^m \subset C^1 [P_i^{\min}, P_i^{\max}]$ tales que G'_i es estrictamente creciente ($i = 1, \dots, m$), ordenadas de modo que $G'_i(P_i^{\min}) \leq G'_{i+1}(P_{i+1}^{\min})$, con $G'_m(P_m^{\min}) \leq G'_i(P_i^{\max})$, $\forall i$, siendo la función

$$G : [P_1^{\min}, P_1^{\max}] \times [P_2^{\min}, P_2^{\max}] \times \dots \times [P_m^{\min}, P_m^{\max}] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$G(y_1, \dots, y_m) := \sum_{i=1}^m G_i(y_i)$$

en el conjunto

$$\tilde{D}_a := \left\{ \begin{array}{l} (y_1, \dots, y_m) \in [P_1^{\min}, P_1^{\max}] \times [P_2^{\min}, P_2^{\max}] \times \dots \times [P_m^{\min}, P_m^{\max}] \\ / \sum_{i=1}^m y_i = a \end{array} \right\}.$$

Obsérvese que este problema es equivalente al desarrollado anteriormente sin más que considerar el cambio de variable $y_i = x_i + P_i^{\min}$. En estas condiciones, podemos tomar $\{F_i\}_{i=1}^m \subset C^1 [0, P_i^{\max} - P_i^{\min}]$ con $F_i(x_i) = G_i(y_i) = G_i(x_i + P_i^{\min})$ tales que F'_i estrictamente creciente ($i = 1, \dots, m$), $F'_i(0) \leq F'_{i+1}(0)$ y $F'_m(0) \leq F'_i(P_i^{\max} - P_i^{\min})$, $\forall i$. Estamos en las condiciones del teorema 3.4 y podemos asegurar la existencia de la equivalente minimizadora Ψ sobre el conjunto

$$D_{a - \sum_{i=1}^m P_i^{\min}} := \left\{ \begin{array}{l} (x_1, \dots, x_m) \in [0, P_1^{\max} - P_1^{\min}] \times \dots \times [0, P_m^{\max} - P_m^{\min}] \\ / \sum_{i=1}^m x_i = a - \sum_{i=1}^m P_i^{\min} \end{array} \right\}$$

²Las centrales térmicas también tienen una limitación mínima sobre su potencia de salida. Desde el punto de vista económico puede ser interesante que una central siga produciendo a una potencia mínima distinta de cero, P_i^{\min} , en lugar de que pare.

con

$$\Psi\left(a - \sum_{i=1}^m P_i^{\text{mín}}\right) = \sum_{k=1}^m F_k\left(\Psi_k\left(a - \sum_{i=1}^m P_i^{\text{mín}}\right)\right),$$

y denotando por $\mathbf{P}^{\text{mín}} = \sum_{i=1}^m P_i^{\text{mín}}$, tenemos que

$$\Psi_k(a - \mathbf{P}^{\text{mín}}) = \begin{cases} 0 & a - \mathbf{P}^{\text{mín}} < \delta_k \\ \left(\sum_{i=1}^j F_i'^{-1} \circ F_k'\right)^{-1} (a - \mathbf{P}^{\text{mín}}) & \delta_k \leq \delta_j \leq a - \mathbf{P}^{\text{mín}} < \delta_{j+1} \\ \left(\sum_{i=1}^m F_i'^{-1} \circ F_k'\right)^{-1} (a - \mathbf{P}^{\text{mín}}) & \delta_m \leq a - \mathbf{P}^{\text{mín}} < \theta_1 \\ \left(\sum_{i=j+1}^m F_{\sigma(i)}'^{-1} \circ F_k'\right)^{-1} \left(a - \mathbf{P}^{\text{mín}} - \sum_{i=1}^j (P_{\sigma(i)}^{\text{máx}} - P_{\sigma(i)}^{\text{mín}})\right) & \theta_j \leq a - \mathbf{P}^{\text{mín}} < \theta_{j+1} \\ P_k^{\text{máx}} - P_k^{\text{mín}} & \theta_{\sigma^{-1}(k)} \leq a - \mathbf{P}^{\text{mín}} \end{cases}$$

siendo

$$\delta_k = \left(\sum_{i=1}^k F_i'^{-1} \circ F_k'\right)(0)$$

y

$$\theta_k = \sum_{i=k}^m (F_{\sigma(i)}'^{-1} \circ F_{\sigma(k)}') (P_{\sigma(k)}^{\text{máx}} - P_{\sigma(k)}^{\text{mín}}) + \sum_{i=1}^{k-1} (P_{\sigma(i)}^{\text{máx}} - P_{\sigma(i)}^{\text{mín}}).$$

Ahora bien, tomando $\tilde{\delta}_k = \delta_k + \mathbf{P}^{\text{mín}}$ y $\tilde{\theta}_k = \theta_k + \mathbf{P}^{\text{mín}}$,

$$\tilde{\delta}_k = \left(\sum_{i=1}^k G_i'^{-1} \circ G_k'\right) (P_k^{\text{mín}}) + \sum_{i=k+1}^m P_i^{\text{mín}}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_k &= \sum_{i=k}^m (F_{\sigma(i)}'^{-1} \circ F_{\sigma(k)}') (P_{\sigma(k)}^{\text{máx}} - P_{\sigma(k)}^{\text{mín}}) + \sum_{i=1}^{k-1} (P_{\sigma(i)}^{\text{máx}} - P_{\sigma(i)}^{\text{mín}}) + \mathbf{P}^{\text{mín}} = \\ &= \left(\sum_{i=k}^m G_{\sigma(i)}'^{-1} \circ G_{\sigma(k)}'\right) (P_{\sigma(k)}^{\text{máx}}) + \sum_{i=1}^{k-1} P_{\sigma(i)}^{\text{máx}} \end{aligned}$$

Para expresar la equivalente minimizadora en términos de las funciones de costo $\{G_i\}_{i=1}^m$, tomaremos las funciones de reparto, Υ_k , de la forma

$\Upsilon_k(a) := \Psi_k(a - \mathbf{P}^{\min}) + P_k^{\min}$, que expresamos como

$$\Upsilon_k(a) = \begin{cases} P_k^{\min} & si & a < \tilde{\delta}_k \\ \left(\sum_{i=1}^j G_i'^{-1} \circ G_k' \right)^{-1} \left(a - \sum_{i=j+1}^m P_i^{\min} \right) & si & \tilde{\delta}_k \leq \tilde{\delta}_j \leq a < \tilde{\delta}_{j+1} \\ \left(\sum_{i=1}^m G_i'^{-1} \circ G_k' \right)^{-1} (a) & si & \tilde{\delta}_m \leq a < \tilde{\theta}_1 \\ \left(\sum_{i=j+1}^m G_{\sigma(i)}'^{-1} \circ G_k' \right)^{-1} \left(a - \sum_{i=1}^j P_{\sigma(i)}^{\max} \right) & si & \tilde{\theta}_j \leq a < \tilde{\theta}_{j+1} \\ P_k^{\max} & si & \tilde{\theta}_{\sigma^{-1}(k)} \leq a \end{cases}$$

obteniendo que

$$\begin{aligned} \Psi(a - \mathbf{P}^{\min}) &= \sum_{i=1}^m F_k \left(\Psi_k(a - \mathbf{P}^{\min}) \right) = \sum_{i=1}^m F_k(\Upsilon_k(a) - P_k^{\min}) = \\ &= \sum_{i=1}^m G_k(\Upsilon_k(a)) = \Upsilon(a) \end{aligned}$$

es la equivalente minimizadora de $\{G_i\}_{i=1}^m \subset C^1 [P_i^{\min}, P_i^{\max}]$ en el conjunto

$$\tilde{D}_a := \left\{ \begin{array}{l} (y_1, \dots, y_m) \in [P_1^{\min}, P_1^{\max}] \times [P_2^{\min}, P_2^{\max}] \times \dots \times [P_m^{\min}, P_m^{\max}] \\ / \sum_{i=1}^m y_i = a \end{array} \right\}.$$

En estas condiciones, y de forma análoga a los teoremas anteriores, se pueden demostrar los siguientes:

Teorema 3.7 Sea $\{G_i\}_{i=1}^m \subset C^1 [P_i^{\min}, P_i^{\max}]$ una colección de funciones tales que G_i' es estrictamente creciente ($i = 1, \dots, m$), ordenadas de modo que $G_i'(P_i^{\min}) \leq G_{i+1}'(P_{i+1}^{\min})$, con $G_m'(P_m^{\min}) \leq G_i'(P_i^{\max})$, $\forall i$, siendo la función

$$G : [P_1^{\min}, P_1^{\max}] \times [P_2^{\min}, P_2^{\max}] \times \dots \times [P_m^{\min}, P_m^{\max}] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$G(y_1, \dots, y_m) := \sum_{i=1}^m G_i(y_i)$$

Sea

$$\tilde{D}_a := \left\{ \begin{array}{l} (y_1, \dots, y_m) \in [P_1^{\min}, P_1^{\max}] \times [P_2^{\min}, P_2^{\max}] \times \dots \times [P_m^{\min}, P_m^{\max}] \\ / \sum_{i=1}^m y_i = a \end{array} \right\}.$$

Entonces existe una colección única $\{\Upsilon_i\}_{i=1}^m$ tal que $\forall a, \sum_{i=1}^m P_i^{\min} \leq a \leq \sum_{i=1}^m P_i^{\max}$,

- (1) $(\Upsilon_1(a), \dots, \Upsilon_m(a)) \in \tilde{D}_a$ y proporciona el mínimo de G sobre \tilde{D}_a si y sólo si $(\sum_{i=1}^m G_i'^{-1} \circ G'_m)(P_m^{\min}) < a < (\sum_{i=1}^m G_i'^{-1} \circ G'_{\sigma(1)})(P_{\sigma(1)}^{\max})$, siendo $G'_{\sigma(1)}(P_{\sigma(1)}^{\max}) = \min\{G'_i(P_i^{\max})\} \forall i \in \{1, \dots, m\}$ y

$$\Upsilon_k(a) = \left(\sum_{i=1}^m G_i'^{-1} \circ G'_k \right)^{-1} (a).$$

- (2) $(\Upsilon_1(a), \dots, \Upsilon_m(a)) \notin \tilde{D}_a$ y proporciona el mínimo de G sobre \tilde{D}_a , entonces:
i) si para cierto $i \in \{1, \dots, m-1\}$, $\Upsilon_i(a) = P_i^{\min}$, entonces

$$\Upsilon_{i+1}(a) = P_{i+1}^{\min}, \dots, \Upsilon_m(a) = P_m^{\min};$$

- ii) si para cierto $i \in \{1, \dots, m\}$, $\Upsilon_i(a) = P_i^{\max}$ entonces $\forall k \in \{1, \dots, m\}$ tal que $G'_k(P_k^{\max}) \leq G'_i(P_i^{\max})$,

$$\Upsilon_k(a) = P_k^{\max}.$$

Teorema 3.8 Sean $\{G_i\}_{i=1}^m$, G , y \tilde{D}_a en las condiciones del teorema 3.7. Entonces existe $\{\tilde{\delta}_k\}_{k=1}^{m+1} \in \mathbb{R}$, siendo $\tilde{\delta}_{m+1} = \sum_{i=1}^m P_i^{\max}$ y $\{\Upsilon_k\}_{k=1}^m \subset C[P_k^{\min}, P_k^{\max}]$, de tal modo que

- i) $\tilde{\delta}_k \leq \tilde{\delta}_{k+1} \forall k \in \{1, \dots, m\}$, $\tilde{\delta}_m < \tilde{\theta}_1$ y $\tilde{\theta}_k \leq \tilde{\theta}_{k+1}, \forall k \in \{1, \dots, m\}$, siendo

$$\tilde{\delta}_k = \sum_{i=1}^k (G_i'^{-1} \circ G'_k)(P_k^{\min}) + \sum_{i=k+1}^m P_i^{\min}$$

y

$$\tilde{\theta}_k = \left(\sum_{i=k}^m G_{\sigma(i)}'^{-1} \circ G'_{\sigma(k)} \right) (P_{\sigma(k)}^{\max}) + \sum_{i=1}^{k-1} P_{\sigma(i)}^{\max}.$$

- ii) Para cada $\sum_{i=1}^m P_i^{\min} \leq a \leq \sum_{i=1}^m P_i^{\max}$, el mínimo de G en \tilde{D}_a se alcanza en

$(\Upsilon_1(a), \dots, \Upsilon_m(a))$ siendo

$$\Upsilon_k(a) = \begin{cases} P_k^{\text{mín}} & \text{si } a < \tilde{\delta}_k \\ \left(\sum_{i=1}^j G_i'^{-1} \circ G_k' \right)^{-1} \left(a - \sum_{i=j+1}^m P_i^{\text{mín}} \right) & \text{si } \tilde{\delta}_k \leq \tilde{\delta}_j \leq a < \tilde{\delta}_{j+1} \\ \left(\sum_{i=1}^m G_i'^{-1} \circ G_k' \right)^{-1} (a) & \text{si } \tilde{\delta}_m \leq a < \tilde{\theta}_1 \\ \left(\sum_{i=j+1}^m G_{\sigma(i)}'^{-1} \circ G_k' \right)^{-1} \left(a - \sum_{i=1}^j P_{\sigma(i)}^{\text{máx}} \right) & \text{si } \tilde{\theta}_j \leq a < \tilde{\theta}_{j+1} \\ P_k^{\text{máx}} & \text{si } \tilde{\theta}_{\sigma^{-1}(k)} \leq a \end{cases}$$

Teorema 3.9 Sean $\{G_i\}_{i=1}^m$, G , y \tilde{D}_a en las condiciones del teorema 3.7. Entonces la función

$$\Upsilon(a) = \sum_{k=1}^m G_k(\Upsilon_k(a)) = \min_{v \in \tilde{D}_a} G(v)$$

es de clase C^1 .

3.4. ALGORITMOS DE APROXIMACIÓN

En esta sección presentamos dos algoritmos de construcción aproximada de la térmica equivalente, con el programa Mathematica, que pasamos a describir a continuación.

3.4.1. Algoritmo 1

Este primer algoritmo, publicado en [21] y de carácter particular, está basado en la utilización de aproximaciones poligonales de la derivada de cada función de costo, que pueden ser interpretadas como la derivada de la equivalente minimizadora de varias funciones de costo cuadráticas.

El procedimiento seguido es el siguiente:

1. En lugar de aproximar directamente la función de costo de cada térmica, $F_i(x)$ $i = 1, \dots, n$ aproximamos linealmente su derivada en el intervalo de generación de potencia de la central. Esta aproximación se puede hacer tan fina como se desee, sin más que aumentar el número de "splines" en dicho intervalo. La integración de estas funciones nos conduce a una función $\Psi_i(x)$ definida a trozos que aproxima a la función de costo de cada central térmica considerada.

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_{ik} + \tilde{\beta}_{ik}x + \tilde{\gamma}_{ik}x^2 & \text{si } \delta_{ik} \leq x < \delta_{ik+1} \quad k = 1, \dots, m-1 \\ \tilde{\alpha}_{im} + \tilde{\beta}_{im}x + \tilde{\gamma}_{im}x^2 & \text{si } x \geq \delta_{im} \end{cases}$$

2. A continuación, interpretamos cada función $\Psi_i(x)$ como la equivalente minimizadora de m centrales térmicas cuyas funciones de costo, que denotamos por $\{F_{i1}(x), F_{i2}(x), \dots, F_{im}(x)\}$, son polinómicas de segundo grado:

$$F_{ik}(x) = \alpha_{ik} + \beta_{ik}x + \gamma_{ik}x^2 \quad k = 1, \dots, m.$$

Las fórmulas que nos conducen a la determinación de estas funciones (deducidas de las ya conocidas de la equivalente minimizadora de funciones de costo cuadráticas) son las siguientes:

$$\beta_{ik} = 2\tilde{\gamma}_{ik}\delta_{ik} + \tilde{\beta}_{ik}$$

$$\gamma_{i1} = \tilde{\gamma}_{i1}$$

$$\gamma_{ik} = \frac{\tilde{\gamma}_{ik}}{1 - \tilde{\gamma}_{ik} \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\gamma_{ij}} \right)} \quad k = 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} = \tilde{\alpha}_{ik} - \frac{\tilde{\beta}_{ik}^2}{4\tilde{\gamma}_{ik}} - \sum_{j=1}^k \frac{\beta_{ij}^2}{4\gamma_{ik}}$$

donde los δ_{ik} son los extremos de los intervalos de definición de $\Psi_i(x)$.

3. Por último, construimos la equivalente minimizadora de todas las funciones obtenidas $\{F_{ij}\}_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$.

Aunque el procedimiento parecía muy prometedor a primera vista, inmediatamente se observó que lleva implícita una exigente condición: las pendientes de las poligonales deben ser decrecientes; único modo de que puedan ser interpretadas como equivalente minimizadora de funciones cuadráticas. En consecuencia, este método tiene el inconveniente de ser válido únicamente para funciones de costo cuya derivada es cóncava, pues sólo en ese caso las poligonales que la aproximen lo serán también.

Así pues, aunque una amplia clase de funciones de costo podrían ser tratadas por este método (x^a con $1 \leq a \leq 2$), existen otras muchas que no podrían ser consideradas como es el caso de las funciones de costo que incorporan las pérdidas de transmisión del sistema.

3.4.2. Algoritmo 2

Este algoritmo es de carácter general y está basado en los desarrollos teóricos realizados en este capítulo. Nos permitirá obtener la térmica equivalente, independientemente del modelo de función de costo utilizado y con restricciones de potencia

máximas y mínimas. Así, la equivalente térmica $\Upsilon(a)$ de centrales con restricciones nos vendrá dada por la expresión del teorema 3.9, siendo las funciones de reparto $\Upsilon_k(a)$ las especificadas en el teorema 3.8. En estas expresiones sólo aparecen las derivadas de las funciones de costo, las cuales vamos a aproximar mediante poligonales, circunstancia que nos permitirá una manipulación sencilla de sus inversas desde el punto de vista computacional. La aproximación, tan fina como deseemos, implica el trabajar con funciones definidas a trozos. El hecho de tener que considerar las composiciones de éstas con sus inversas aumenta el número de trozos resultantes en la definición de cada función de reparto $\Upsilon_k(a)$ y, por consiguiente, de la equivalente $\Upsilon(a)$.

En el Anexo I presentamos, implementado con el programa Mathematica, el desarrollo de este algoritmo.

3.5. EJEMPLOS

Mostramos, a continuación, dos ejemplos que ilustran la importancia práctica de los resultados teóricos obtenidos. Consideramos el sistema térmico que consta de ocho centrales de la red térmica Asturiana. En el primer ejemplo, utilizando el segundo algoritmo planteado, determinamos la equivalente minimizadora considerando como modelo de función de costo, en primer término, funciones polinómicas de segundo grado y, en segundo, funciones que incorporan las pérdidas del sistema y, por tanto, no son cuadráticas, sin establecer, en primer lugar, más restricción que la positividad de las potencias y, en segundo lugar, impondremos limitaciones de potencia tanto mínimas como máximas a cada central. Mostraremos, también, las gráficas de las funciones de reparto, es decir, la potencia aportada por cada central térmica al sistema y compararemos, por último, los costos de producción de determinadas potencias demandadas en cada uno de los casos. En el segundo ejemplo, comparamos este método de construcción de la equivalente minimizadora y obtención de las potencias a producir por cada central térmica del sistema con otros ya existentes observando que ofrece mejores resultados.

Ejemplo 3.1 *Construimos la equivalente minimizadora considerando:*

- a) *funciones de costo cuadráticas y la restricción natural de positividad de las potencias generadas,*
- b) *funciones de costo incorporando las pérdidas de transmisión del sistema y la restricción natural de positividad de las potencias generadas, y*
- c) *funciones de costo incorporando las pérdidas de transmisión del sistema con restricciones en sus potencias generadas.*

Los desarrollos teóricos realizados en este trabajo nos garantizan la existencia y unicidad de la equivalente minimizadora en todos los casos, así como su pertenencia a las funciones de clase C^1 .

Denotamos por f_i a la función de costo polinómica de segundo grado (func. de costo sin pérdidas):

$$f_i(x) = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2$$

y por g_i , como vimos en observación 1, la función de costo que incorpora las pérdidas del sistema utilizando el modelo de Kirchmayer:

$$g_i(y) = \alpha_i + \beta_i \frac{1 - \sqrt{1 - 4 b_{ii} y}}{2 b_{ii}} + \gamma_i \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4 b_{ii} y}}{2 b_{ii}} \right)^2$$

Los datos de las centrales se representan en la tabla I. Las unidades de los coeficientes son: α_i en ($\text{€}/h$); β_i en ($\text{€}/h.Mw$); γ_i en ($\text{€}/h.Mw^2$) y los coeficientes de pérdidas b_{ii} en ($1/Mw$). Proporcionamos los datos de las centrales ya ordenadas en la forma $f'_i(0) \leq f'_{i+1}(0)$

Tabla I: Coeficientes de las centrales térmicas.

Central i	α_i	β_i	γ_i	b_{ii}
1 (Narcea 2)	2248.16	-7.984	0.17026	0.000353
2 (Lada 3)	1625.43	6.347	0.09803	0.000220
3 (Soto 3)	1615.35	16.676	0.01659	0.000100
4 (Aboño 1)	1227.83	17.621	0.01325	0.000103
5 (Lada 4)	2155.62	17.745	0.01982	0.000097
6 (Aboño 2)	743.78	20.842	0.00311	0.000220
7 (Soto 2)	77.72	21.277	0.00286	0.000172
8 (Narcea 3)	1459.44	21.569	0.01489	0.000121

Por otra parte, como ya hemos comentado, cuestiones de funcionamiento de las centrales térmicas (costo de arranque) exigen no sólo la positividad de las potencias generadas sino también que no sean nulas (no se apaguen) y se mantengan, como mínimo, en una determinada cota para cada central (mínimo técnico). Es obvio también que cuestiones técnicas de capacidad de las propias centrales limitan su producción, lo que nos hace establecer unas determinadas potencias máximas. Establecemos en la siguiente tabla las restricciones de potencia mínima y máxima de cada central térmica para desarrollar el apartado c).

Tabla II: Restricciones de potencia.

Central i	1	2	3	4	5	6	7	8
P_i^{\min}	5	5	10	10	10	15	10	5
P_i^{\max}	170	150	340	300	320	550	310	240

a) La equivalente minimizadora $\Psi(x)$ en (€/h) de las funciones de costo $\{f_i\}_1^8$, con x en Mw , resulta ser:

$$\Psi(x) = \begin{cases} 11153,3 - 7,984x + 0,17026x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 42,09 \\ 10962 + 1,1106x + 0,06221x^2 & \text{si } 42,09 \leq x \leq 125,1 \\ 10193,3 + 13,399x + 0,01309x^2 & \text{si } 125,1 \leq x \leq 161,18 \\ 10024,2 + 15,498x + 0,00658x^2 & \text{si } 161,18 \leq x \leq 170,59 \\ 9976,36 + 16,058x + 0,00494x^2 & \text{si } 170,59 \leq x \leq 483,82 \\ 9266,01 + 18,995x + 0,00191x^2 & \text{si } 483,82 \leq x \leq 597,75 \\ 8992,96 + 19,908x + 0,00114x^2 & \text{si } 597,75 \leq x \leq 725,27 \\ 8949,96 + 20,027x + 0,00106x^2 & \text{si } 725,27 \leq x \end{cases}$$

función definida a trozos polinómica de segundo grado con coeficientes constantes como se muestra en la figura siguiente :

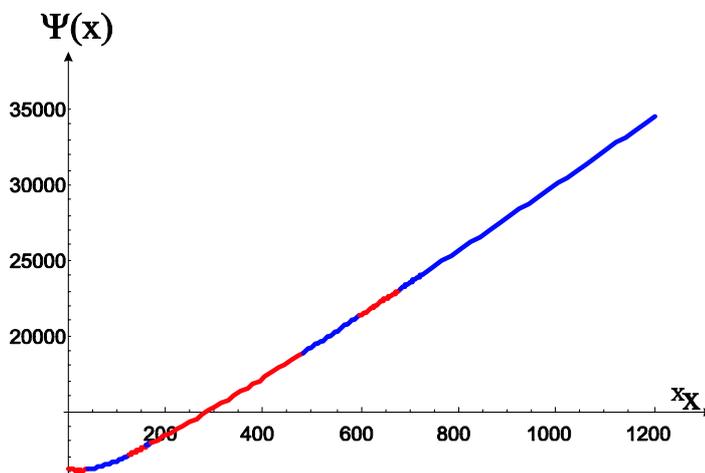


Figura 3.1: Térmica equivalente sin considerar pérdidas.

b) Por otra parte, para hallar la equivalente minimizadora de las funciones de costo $\{g_i\}_{i=1}^8$, procederemos de la siguiente manera: consideramos sus derivadas ($g'_i(y)$), comprobando fácilmente que son funciones crecientes y que $g'_i(0) \leq g'_{i+1}(0)$; a continuación, las aproximamos mediante poligonales, aproximación que se puede hacer tan fina como deseemos y, por último, trabajamos con estas funciones de manera análoga al desarrollo teórico realizado.

Ante la magnitud de las expresiones obtenidas, sólo presentaremos los resultados de la equivalente minimizadora $\Upsilon(x)$ en (€/h) de las funciones de costo $\{g_i\}_{i=1}^8$, con x en Mw en los cinco intervalos iniciales:

Si $0 \leq x \leq 38,2$

$$683022 - 671868\sqrt{1 - 0,001412x} - 482,32x$$

Si $38,2 \leq x \leq 114,23$

$$1,70926 \cdot 10^6 - 1,02713 \cdot 10^6 \sqrt{1,02144 - 0,000561266x} - 671868\sqrt{0,965594 - 0,000511424x} - 458,895x$$

Si $114,23 \leq x \leq 146,28$

$$1,02713 \cdot 10^6 \sqrt{0,971241 - 0,000121782x} - 671868 \sqrt{0,91985 - 0,000110968x} - 229,473x$$

Si $146,28 \leq x \leq 154,48$

$$3,29876 \cdot 10^6 - 710009 \sqrt{1,02933 - 0,000200509x} - 912880 \sqrt{1,01348 - 0,000160778x} - 1,02713 \cdot 10^6 \sqrt{0,962571 - 0,000062514x} - 671868 \sqrt{0,91195 - 0,000056962x} - 180,4x$$

Si $154,48 \leq x \leq 393,37$

$$4,44442 \cdot 10^6 - 710009 \sqrt{1,02146 - 0,000149523x} - 912880 \sqrt{1,00716 - 0,000119895x} - 1,14472 \cdot 10^6 \sqrt{1,01524 - 0,000098662x} - 1,02713 \cdot 10^6 \sqrt{0,960116 - 0,000046617x} - 671868 \sqrt{0,909712 - 0,000042478x} - 186,486x$$

En la figura siguiente mostramos la gráfica de la equivalente minimizadora que como podemos observar es una función, definida a trozos, de clase C^1 :

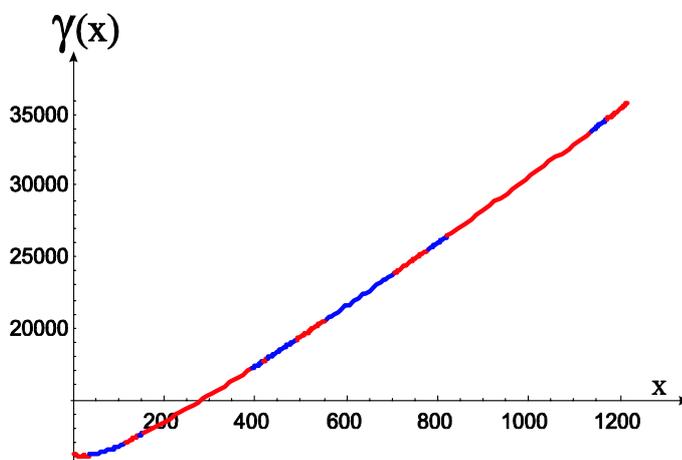


Figura 3.2: Térmica equivalente considerando pérdidas.

c) Es fácil comprobar que también en este caso se verifican las condiciones exigidas en los desarrollos teóricos realizados para garantizar la existencia, unicidad y pertenencia a C^1 de dicha equivalente.

La siguiente figura muestra la gráfica de la equivalente minimizadora:

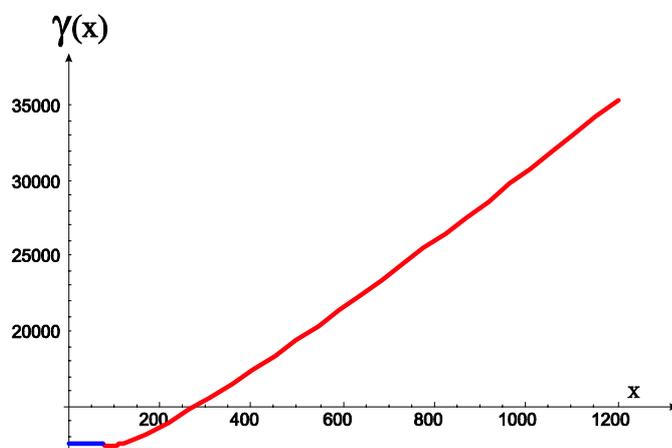


Figura 3.3. Térmica equivalente con restricciones de potencia.

Mostramos en la siguiente figura las funciones de reparto que nos indican la producción de cada central térmica observando que se respetan las restricciones impuestas a cada una de ellas.

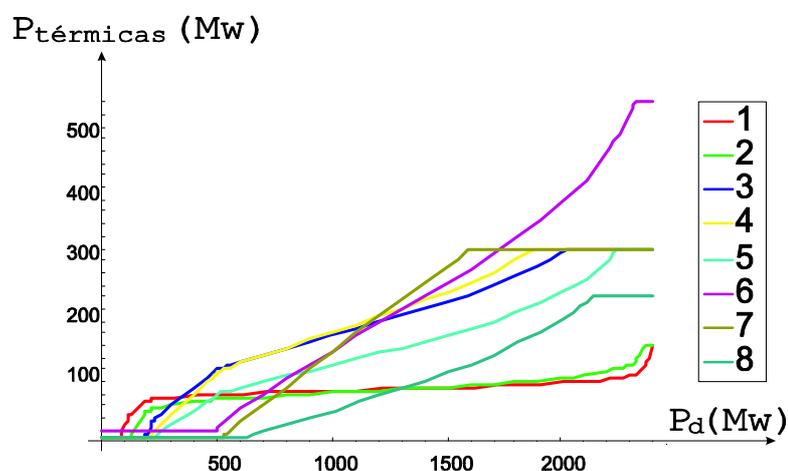


Figura 3.4. Producción de cada central térmica.

Por último, en la tabla siguiente indicamos el costo de generación de la equivalente minimizadora, para determinadas potencias demandadas, en cada uno de los casos tratados en estos ejemplos:

Tabla III: Costo de producción.

Potencia x	$\Psi(x)$	$\gamma(x)$	$\gamma(x)$ con restricciones
0	11153.3	11153.3	-
250	14299.9	14364.4	14451.6
500	19240.6	19398.4	19400.6
750	24568.1	24852.8	24852.3
1000	30040.	30568.7	30568.4
1250	35644.7	36559	36559
1500	41382.3	42838.8	42838.9
1750	47252.8	49423.7	49474.1
2000	53256.2	56330.8	56614.3
2250	59392.5	63577.7	65304.5

Es obvio que la consideración de las pérdidas que se producen en el sistema conlleva un aumento del costo de generación. Por otra parte, obsérvese que cuando se introducen limitaciones de potencia en las centrales térmicas se produce un aumento del costo hasta que comienzan a trabajar todas las centrales de forma libre, esto es, sin que las restricciones de potencia mínima influyan en su funcionamiento (sucede cuando la potencia demandada es mayor que 604.421 Mw) hasta que comienzan a hacerlo las restricciones máximas (potencia demandada mayor que 1514.43 Mw).

En el ejemplo siguiente ponemos de manifiesto la efectividad del algoritmo propuesto (basado en los desarrollos teóricos realizados) para la determinación de la térmica equivalente considerando funciones de costo que incorporan las pérdidas y, por tanto, no son cuadráticas. Compararemos, en primer lugar, la equivalente minimizadora obtenida en el ejemplo anterior con la función de costo óptima obtenida resolviendo el problema mediante los multiplicadores de Lagrange (trabaja de forma exacta). A continuación, considerando una función de demanda de potencia concreta compararemos los resultados de este método con los obtenidos por Bayón y otros en [13]. Estos autores aproximan las funciones de costo asumiendo las pérdidas de transmisión por funciones cuadráticas a través del método de mínimos cuadrados, construyendo la equivalente minimizadora de estas últimas. Aportaremos las gráficas de las potencias reales a producir por las diferentes centrales térmicas (funciones de reparto) para la potencia demandada en cada instante.

Ejemplo 3.2 *Consideremos las centrales térmicas del sistema asturiano del ejemplo anterior y la expresión de la equivalente minimizadora tomando como funciones de costo las $\{g_i\}_{i=1}^8$.*

Mostramos la gráfica de la equivalente minimizadora obtenida en el ejemplo anterior y la obtenida aplicando multiplicadores de Lagrange para resolver el problema propuesto. Como se puede observar el algoritmo desarrollado en este capítulo proporciona una solución aproximada (térmica equivalente) que es casi coincidente con la del problema original.

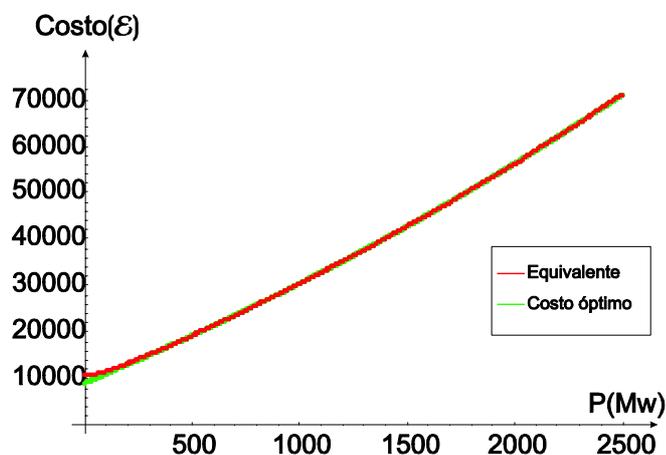


Figura 3.5. Equivalente minimizadora y función de costo óptima.

Sea la función expresada en la gráfica siguiente la correspondiente a la potencia demandada al sistema en el intervalo horario de 0 a 24 horas:

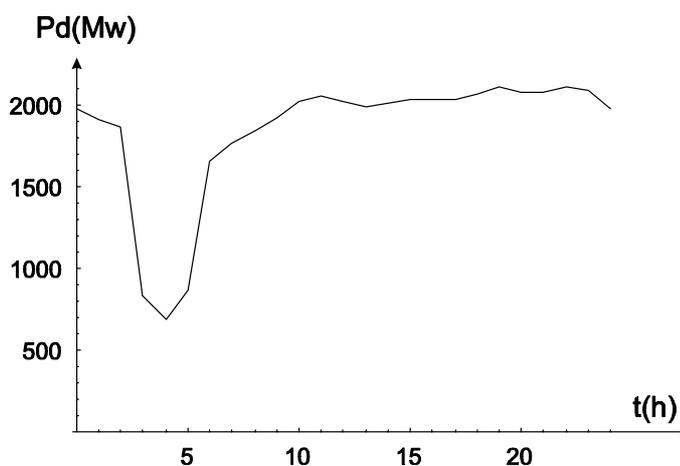


Figura 3.6. Potencia demandada.

En primer lugar, resolvemos el problema a través de los multiplicadores de Lagrange y obtenemos la solución de costo óptima. A continuación, resolvemos utilizando el método desarrollado en [13] y, por último empleamos el expuesto en este capítulo construyendo la equivalente minimizadora. En la tabla siguiente presentamos una comparación de los costos totales de generación obtenidos en cada uno de los tres procesos:

Tabla IV. Comparación de costos.

	Lagrange	Bayón [13]	Equivalente $\gamma(x)$
Costo total (€)	1310750	1310770	1310760

En las siguientes gráficas mostramos el error cometido al distribuir la potencia a generar por las centrales térmicas comparando, en la figura 5, el método de los multiplicadores de Lagrange y el empleado por Bayón y otros en [13] y, en la figura 6, el método de los multiplicadores de Lagrange con el desarrollado en este capítulo.

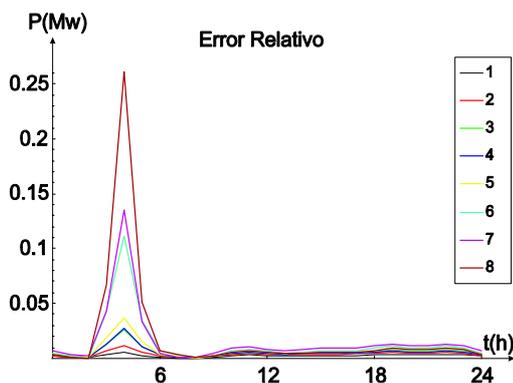


Figura 3.7. Lagrange-Bayón [13].

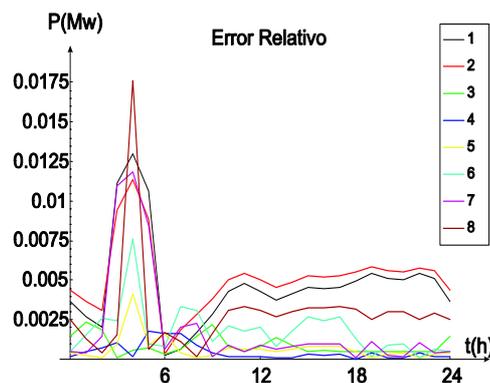


Figura 3.8. Lagrange-método actual.

Como se puede observar, con el método desarrollado para la construcción de la térmica equivalente y reparto de la potencia demandada entre las centrales térmicas del sistema, se reduce considerablemente el error cometido comparado con el desarrollado por Bayón [13]. Por último, mostramos la gráfica de reparto de potencia entre las distintas centrales térmicas para satisfacer en cada instante la potencia demandada al sistema. Representamos la potencia real a producir por las distintas centrales teniendo en cuenta las pérdidas que se van a producir en el sistema.

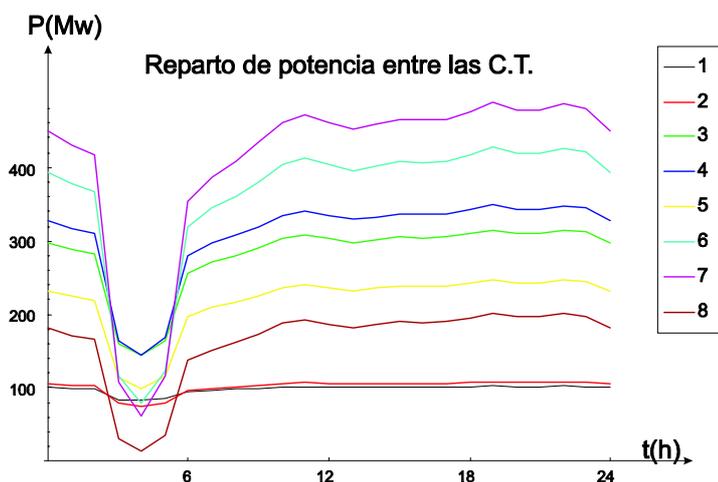


Figura 3.9. Producción de potencia de las distintas térmicas.

3.6. REPLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Una vez demostrado que todo problema de tipo (H_n-T_m) , bajo ciertas condiciones, puede ser sustituido por otro de la forma (H_n-T_1) , independientemente del modelo de costo utilizado e incorporando, si se desea, restricciones tanto mínimas como máximas (iguales o distintas), nos centraremos en los de tipo (H_n-T_1) , que constituyen el auténtico problema variacional. Además, dicho problema variacional presenta una ligadura (ecuación de equilibrio)

$$y(t) + H(t, \bar{z}(t), \bar{z}'(t)) = P_d(t), \quad \forall t \in [0, T]$$

que puede suprimirse juntamente con la función incógnita $y(t)$. El valor de esta incógnita, que desaparece como tal con el nuevo planteamiento y que representa el aporte de las centrales térmicas al sistema, se recupera una vez conocidos los valores de las demás incógnitas. Para determinar la aportación particular de cada una de las centrales habrá que recurrir a las funciones de reparto.

Trasladamos así el problema hidrotérmico generalizado a la minimización del funcional

$$F(\bar{z}) = \int_0^T \Psi (P_d(t) - H(t, \bar{z}(t), \bar{z}'(t))) dt$$

con las condiciones de contorno $\bar{z}(0) = \bar{\mathbf{0}}$, $\bar{z}(T) = \bar{\mathbf{b}}$.

Definición 3.3 Se dirá que una función $\bar{\mathbf{q}}$ es admisible para el problema

$$H_n-T_1\{P_d, \Psi, H, \bar{\mathbf{b}}\}$$

si:

- i) $\bar{\mathbf{q}}$ es admisible para H .
- ii) $P_d(t) - H(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t))$ es admisible para Ψ .
- iii) $\bar{\mathbf{q}}(0) = \bar{\mathbf{0}}$, $\bar{\mathbf{q}}(T) = \bar{\mathbf{b}}$.

Se denota por $\Theta_{\bar{\mathbf{b}}}$ el conjunto de funciones admisibles.

Definición 3.4 Se dirá que $\bar{\mathbf{q}}$ es solución del problema $H_n-T_1\{P_d, \Psi, H, \bar{\mathbf{b}}\}$ si es admisible y

$$\int_0^T \Psi (P_d(t) - H(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t))) dt = \min_{\bar{\mathbf{z}} \in \Theta_{\bar{\mathbf{b}}}} \int_0^T \Psi (P_d(t) - H(t, \bar{\mathbf{z}}(t), \bar{\mathbf{z}}'(t))) dt$$

De manera análoga a la anterior se replantea el problema hidrotérmico de Bolza.

Capítulo 4

CONTROL ÓPTIMO. PROBLEMA DE BOLZA

4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo, consideraremos el problema hidrotérmico generalizado imponiendo ciertas limitaciones a las potencias generadas, planteando así un problema con restricciones de desigualdad de tipo no holonómico.

El problema hidrotérmico generalizado con restricciones de desigualdad consecuencia de la imposición de limitaciones a las potencias, tanto térmicas como hidráulicas, ha sido abordado por diferentes autores usando técnicas de la teoría de control. Ya **El-Hawary y Christensen** [49] mencionan el Principio del Mínimo de Pontryagin para proporcionar un candidato a óptimo del problema planteado. En trabajos más recientes **Wong** y otros [?] resuelven, mediante una secuencia de problemas de control óptimo en tiempo discreto, sistemas hidrotérmicos a largo plazo, aproximando la función de costo por una función suave e incorporando a la misma las restricciones de desigualdad. También en problemas a largo plazo, **Pursimo** y otros [118] proporcionan una ley de control óptimo para minimizar la función hamiltoniana del sistema hidrotérmico, dando un peso a la potencia de cada central hidráulica para asegurar la existencia de solución. **Mousavi y Ramamurthy** [109] utilizan el Principio de Pontryagin para seleccionar el mejor de tres modelos de suministro de agua en un sistema con centrales acopladas hidráulicamente. La mayoría de los estudios relativos al tema (incluidos los antes citados) emplean modelos concretos para la función de costo térmico y el sistema hidráulico. Así, si el modelo cambia, los algoritmos desarrollados para la solución del problema no son válidos.

Este problema queda resuelto en el estudio realizado por **Bayón** y otros [19] en el que obtienen, realizando algunas simplificaciones, la solución mediante técnicas de control óptimo. También en **Bayón** y otros [17] se aborda este problema utilizando exclusivamente técnicas del cálculo variacional. En ambos trabajos, se introdujo el concepto de influencia débil del volumen para establecer las condiciones necesarias

de existencia de mínimo.

Nos parece de gran interés el desarrollo de un algoritmo que resuelva este problema independientemente del modelo de sistema hidrotérmico y evitando el inconveniente de trabajar con la influencia débil del volumen. Además, tratamos de que sea extensible al problema en el que se valora el agua utilizada por la central hidráulica. Otros autores también han trabajado considerando esta cuestión. Así, **Ruzic** y otros [124] modelizan el costo asociado a un consumo excesivo de agua en el periodo de optimización; lo que consiguen añadiendo un término de penalización a la función objetivo. **Barros** y otros [4] consideran el problema de optimización de un sistema hidráulico brasileño con múltiples objetivos considerando un modelo de programación no lineal para cada uno de ellos y utilizando técnicas diferentes de linealización para su resolución. También **Lee y Chang** [93] trabajan con multi-objetivos (calidad del agua, capacidad de asimilación y tratamiento del costo del agua perdida) considerando vaguedad e imprecisión en los datos y abordando el problema con técnicas difusas.

Realizaremos, para simplificar el desarrollo, el estudio del problema en el caso particular en que el sistema hidrotérmico¹ conste de una única central hidráulica H_1-T_1 , extendiendo el estudio, en un capítulo posterior, al caso general de n centrales hidráulicas H_n-T_1 .

Hemos optado por plantear el problema en términos de control óptimo en tiempo continuo con el funcional de tipo Lagrange. Veremos que, con este nuevo planteamiento, el tratamiento de las restricciones del problema es más sencillo y estableceremos la condición necesaria de existencia de las funciones estacionarias del funcional.

A continuación, plantearemos el problema de modo que el coste de producción de energía no dependa exclusivamente del consumo de combustible de las centrales térmicas, sino también del volumen de agua turbinada en las hidráulicas. En estas condiciones, asignando un costo al agua, generalizamos el problema anterior planteando el problema de Bolza correspondiente y estableciendo, también en este caso, las condiciones necesarias de existencia de mínimo.

Por último, construimos, para cada uno de los problemas, un algoritmo de resolución implementado con el programa Mathematica. Mostramos su aplicación a la resolución de problemas de optimización hidrotérmica con una central hidráulica, analizando y comparando los resultados de ambos problemas, tanto en el caso en el que se asigna un costo al agua como en el que no.

El trabajo desarrollado en este capítulo ha dado lugar a dos publicaciones [22] y [24] de Bayón y otros.

4.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo, partiendo de una sola central hidráulica, vamos a efectuar el estudio del sistema hidrotérmico imponiendo las restricciones naturales existentes en los sistemas que carecen de centrales de bombeo.

¹Se considera que T_1 está representando la térmica equivalente de m centrales térmicas.

Sea $H(t, z, z') : \Omega_H \subset [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ la función de generación hidráulica. El conjunto de funciones admisibles, \mathcal{H} , serán aquellos volúmenes, z , no negativos, pertenecientes a $\widehat{C}^1[0, T]$, que verifiquen las restricciones de volumen disponible, con caudales, z' , no negativos.

Sea $\Psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ la función de costo de la térmica equivalente. El conjunto de funciones admisibles, \mathcal{F} , serán aquellas potencias, y , no negativas.

Con estas consideraciones, procuraremos que las aplicaciones P_d , Ψ y H sean lo más generales posible. A lo largo de todo el capítulo supondremos, por comodidad, que son suficientemente derivables y haremos las siguientes suposiciones adicionales:

- La función de costo térmico Ψ verifica

$$\Psi'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

y es, en consecuencia, estrictamente creciente².

- También verifica

$$\Psi''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

y es, por tanto, estrictamente convexa³.

- La función de generación hidráulica $H(t, z, z')$ es estrictamente creciente⁴ con respecto a z' .

- Supondremos también la concavidad⁵ de $H(t, z, z')$ con respecto a z' .

Obsérvese que $H(t, z, z') \in \mathbb{R}^+$ y, en consecuencia,

$$0 \leq H(t, z(t), z'(t))$$

Además, solamente admitimos potencias térmicas no negativas en la función de costo térmico $\Psi(P_d(t) - H(t, q(t), q'(t)))$, es decir:

$$P_d(t) \geq H(t, q(t), q'(t))$$

Bajo estas condiciones, denotaremos por Π_b al problema que consta de una única central hidráulica, esto es, al problema de minimizar el funcional

$$F(z) = \int_0^T L(t, z(t), z'(t)) dt$$

con $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ función de clase C^1 , de la forma

²Esta exigencia es absolutamente natural toda vez que significa “más consumo a mayor potencia generada”.

³Esta suposición, a pesar de satisfacerla los modelos habituales, no es natural como la anterior; sin embargo, es una propiedad clave para determinar el carácter minimizante de una extremal.

⁴Significa “más potencia a mayor caudal”.

⁵Si suponemos concavidad estricta, podemos rebajar la hipótesis de convexidad estricta de Ψ a simple convexidad.

$$L(t, z(t), z'(t)) = \Psi(P_d(t) - H(t, z(t), z'(t)))$$

dentro del conjunto

$$\Theta_b = \{z \in \widehat{C}^1[0, T] / z(0) = 0, z(T) = b, 0 \leq H(t, z(t), z'(t)) \leq P_d(t)\}.$$

Consideraremos también las siguientes hipótesis:

► Cualesquiera que sean el instante y el volumen, la central hidráulica puede generar la totalidad de la potencia demandada, es decir:

$$\forall(t, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+, \exists z' \text{ tal que } H(t, z, z') = P_d(t)$$

Esta hipótesis se introduce con el propósito de que existan funciones admisibles con arcos fronterizos superiores.

► En los casos de caudales nulos, la potencia hidráulica ha de ser siempre inferior a la demandada:

$$\forall(t, z) \in [0, T] \times [0, b], H(t, z, 0) < P_d(t).$$

Esta hipótesis se introduce con el propósito de que los arcos fronterizos superiores e inferiores no puedan tener puntos comunes.

Obsérvese que las restricciones impuestas a las funciones admisibles hacen que el extremo del funcional pueda no ser “algebraicamente interior”, en el sentido de que puede constar de unos arcos que no admiten variaciones bilaterales (arcos fronterizos) y de otros que satisfagan la ecuación de Euler (arcos interiores).

Notemos que en el conjunto Θ_b también se pueden considerar restricciones técnicas del tipo $H(t, z(t), z'(t)) \leq H_{\text{máx}}$. Todos los desarrollos teóricos que se realizan a continuación seguirán teniendo validez, sin más que tomar la función $\min\{H_{\text{máx}}, P_d(t)\}$ como límite superior para $H(t, z(t), z'(t))$ en cualquier instante.

En [72], Grau realizó un estudio de este problema Π_b . Destacamos los siguientes resultados:

* El carácter no vacío del conjunto de funciones admisibles⁶ garantiza la existencia de solución del problema.

Teorema Si $\forall \tau \in [0, T], \exists M_\tau$ tal que

$$H(t, q(t), q'(t)) \leq P_d(t) \text{ en } [0, \tau] \implies q'(t) < M_\tau \text{ en } [0, \tau],$$

entonces:

i) La ecuación diferencial $H(t, z(t), z'(t)) - P_d(t) = 0$, con $z(0) = 0$, tiene solución única en $[0, T]$.

⁶Se ha supuesto la acotación uniforme de las derivadas de las funciones admisibles.

ii) Si denominamos $\omega(t)$ a la solución de la ecuación anterior y hacemos⁷ $\ell = \omega(T)$, entonces

$\forall b \in [0, \ell]$ el problema Π_b tiene solución.

* La solución del problema carece de puntos angulares.

Teorema Si q es solución del problema Π_b , entonces

$$q \in C^1 [0, T]$$

En [13] Bayón y otros establecen las condiciones necesarias de existencia de extremo del problema Π_b . También en [17] Bayón y otros se aborda este problema mediante técnicas de cálculo variacional. En ambos trabajos se hace necesaria la introducción del concepto de influencia débil del volumen para la demostración del teorema que proporciona esta condición.

Definición Diremos que en un problema Π_b el volumen influye débilmente si $\forall g$ admisible, $\forall h \in \widehat{C}^1[0, T]$ y $\forall t_1, t_2 \in [0, T]$ verificando:

i) $H(t, g(t), g'(t)) = P_d(t)$ en $[t_1, t_2]$

ii) $h(0) = h(T) = 0$

iii) $h'(t) < 0$, $\forall t \in (t_1, t_2)$

$\exists \varepsilon' > 0$ tal que $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon']$ y $\forall t \in [t_1, t_2]$

$$H(t, g(t) + \varepsilon h(t), g'(t) + \varepsilon h'(t)) \leq P_d(t).$$

Teorema Sea $\mathbb{Y}_q(x)$ la función en $[0, T]$ definida por

$$\mathbb{Y}_q(x) = \int_0^x L_z(t, q(t), q'(t)) dt - L_{z'}(x, q(x), q'(x))$$

Si q es solución del problema Π_b , en el que el volumen influye débilmente, entonces $\exists K > 0$ tal que:

i) Si $q'(t) \neq 0$ y $H(t, q(t), q'(t)) \neq P_d(t)$ (t no es punto fronterizo)

$$\mathbb{Y}_q(t) = K.$$

⁷ ℓ representa el volumen de agua que consumiría la central hidráulica si generara toda la potencia demandada sin intervención de la térmica.

$$ii) \text{ Si } q'(t) = 0 \quad \forall q(t) \leq K.$$

$$iii) \text{ Si } H(t, q(t), q'(t)) = P_d(t) \quad \forall q(t) \geq K.$$

En el primero de los trabajos, [13], los autores, utilizando técnicas de control óptimo, supusieron para simplificar el problema que

$$H(t, b, z'(t)) \leq H(t, z(t), z'(t)) \leq H(t, 0, z'(t)), \quad \forall z \in \Theta_b$$

y, asumiendo que

$$H(t, b, z') \simeq H(t, z, z') \simeq H(t, 0, z'),$$

se sustituyó la restricción

$$0 \leq H(t, z(t), z'(t)) \leq P_d(t)$$

por otras del tipo

$$0 \leq H(t, b, z'(t)); \quad H(t, 0, z'(t)) \leq P_d(t).$$

El tratamiento matemático de estas últimas restricciones es más sencillo que el de las anteriores, lo que facilitó la obtención de una solución aproximada del problema.

En el segundo de los trabajos, [17], el problema se aborda mediante técnicas de cálculo variacional, haciendo uso de una sucesión convergente de funciones $\{f_n(t)\}$ uniformemente acotadas e integrables en el sentido de Riemann, $\forall n$, junto con la influencia débil del volumen para garantizar la existencia de la derivada direccional $\delta F(q; f_m)$.

Nuestro propósito es considerar el problema original, Π_b , y tratar de obtener su solución considerando las restricciones originales, sin simplificaciones de ningún tipo, y sin necesidad de recurrir al concepto de influencia débil del volumen.

4.2.1. Nuevo planteamiento en términos de control óptimo

Las cuestiones antes mencionadas nos impulsaron a plantear el problema Π_b en términos de control óptimo en tiempo continuo, con el funcional de tipo Lagrange, para establecer las condiciones necesarias de extremo y utilizar el Principio del Mínimo de Pontryagin para su demostración.

En nuestro problema Π_b , consideraremos que $z(t)$ es la variable de estado y $u(t) = H(t, z(t), z'(t))$ la variable de control. Además como $H_{z'} > 0$, la ecuación $u(t) - H(t, z(t), z'(t)) = 0$ permite definir en forma implícita la función $z' = f(t, z(t), u(t))$ (ecuación de estado). Así, el problema Π_b en términos de control óptimo se puede expresar como sigue:

$$\min_{u(t)} \int_0^T L(t, z(t), u(t)) dt \quad \text{con} \quad \begin{cases} z' = f(t, z(t), u(t)) \\ z(0) = 0, \quad z(T) = b \\ u(t) \in \Omega(t) = \{x \mid 0 \leq x \leq P_d(t)\} \end{cases}$$

con L de la forma

$$L(t, z(t), u(t)) = \Psi(P_d(t) - u(t)).$$

Considerando la diferencial de las relaciones $u(t) - H(t, z(t), z'(t)) = 0$ y $z' = f(t, z(t), u(t))$ se obtiene:

$$du - H_t(t, z(t), z'(t)) dt - H_z(t, z(t), z'(t)) dz - H_{z'}(t, z(t), z'(t)) dz' = 0$$

de donde,

$$dz' = \frac{1}{H_{z'}(t, z(t), z'(t))} du - \frac{H_t(t, z(t), z'(t))}{H_{z'}(t, z(t), z'(t))} dt - \frac{H_z(t, z(t), z'(t))}{H_{z'}(t, z(t), z'(t))} dz$$

y de la segunda ecuación

$$dz' = f_u(t, z(t), u(t)) du + f_t(t, z(t), u(t)) dt + f_z(t, z(t), u(t)) dz,$$

por la invarianza de la diferencial, se obtiene fácilmente que

$$f_z(t, z(t), u(t)) = -\frac{H_z(t, z(t), z'(t))}{H_{z'}(t, z(t), z'(t))}; \quad f_u(t, z(t), u(t)) = \frac{1}{H_{z'}(t, z(t), z'(t))} \quad (1)$$

Previamente a la determinación de las condiciones necesarias de optimalidad para nuestro problema Π_b , obtenemos una expresión, que emplearemos en dichas condiciones, en los términos siguientes:

Si z satisface la ecuación de Euler para el funcional F , tenemos que, $\forall t \in [0, T]$, se cumple dicha ecuación

$$L_z(t, z(t), z'(t)) - \frac{d}{dt} (L_{z'}(t, z(t), z'(t))) = 0$$

Con las suposiciones realizadas se verifica que $L_{z'}(t, z(t), z'(t)) < 0$, $\forall t$. Dividiendo la ecuación anterior por $L_{z'}(t, z(t), z'(t))$, integrando, y teniendo en cuenta que

$$\frac{L_z(s, z(s), z'(s))}{L_{z'}(s, z(s), z'(s))} = \frac{H_z(s, z(s), z'(s))}{H_{z'}(s, z(s), z'(s))},$$

obtenemos

$$-L_{z'}(t, z(t), z'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, z(s), z'(s))}{H_{z'}(s, z(s), z'(s))} ds \right] = -L_{z'}(0, z(0), z'(0)) = K \in \mathbb{R}^+$$

Se denota esta relación como ecuación de coordinación para $z(t)$, y la constante positiva K como constante de coordinación de la extremal.

Definición 4.1 *Llamaremos función de coordinación de $q \in \Theta_b$ la función en $[0, T]$, definida de la manera siguiente:*

$$\mathbb{Y}_q(t) = -L_{z'}(t, q(t), q'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}(s, q(s), q'(s))} ds \right]$$

Veamos a continuación un resultado fundamental, que nos permite caracterizar las extremales del problema y que, además, va a ser la base para elaborar el algoritmo de optimización que permita la determinación de la solución óptima del sistema hidrotérmico.

4.3. CONDICIONES NECESARIAS DE MÍNIMO

Teorema 4.1 (Primer teorema de coordinación) Si $q \in \widehat{C}^1$ es una solución del problema Π_b , entonces $\exists K \in \mathbb{R}^+$ tal que

- i) Si $0 < H(t, q(t), q'(t)) < P_d(t)$ (t no es un punto fronterizo) $\implies \mathbb{Y}_q(t) = K$.
- ii) Si $H(t, q(t), q'(t)) = P_d(t) \implies \mathbb{Y}_q(t) \geq K$.
- iii) Si $H(t, q(t), q'(t)) = 0 \implies \mathbb{Y}_q(t) \leq K$.

Demostración. Denotaremos por u_{opt} el control óptimo que, en nuestro caso, es la función de generación hidráulica efectiva $H(t, z(t), z'(t))$, y por $q(t)$ el estado óptimo. Sea \mathbb{H} el Hamiltoniano asociado al problema

$$\mathbb{H}(t, z(t), u(t), \lambda(t)) = \Psi(P_d(t) - u(t)) + \lambda(t) \cdot f(t, z(t), u(t)).$$

En virtud del Principio de Pontryagin, existe una función $\lambda_{opt}(t)$ (variable de coestado) \widehat{C}^1 que satisface las dos condiciones siguientes:

- i) $\lambda'_{opt}(t) = -\frac{\partial \mathbb{H}(t, q(t), u_{opt}(t), \lambda_{opt}(t))}{\partial z} = -\lambda_{opt}(t) \cdot f_z(t, q(t), u_{opt}(t))$
- ii) $\mathbb{H}(t, q(t), u_{opt}(t), \lambda_{opt}(t)) \leq \mathbb{H}(t, q(t), u(t), \lambda_{opt}(t)); \forall u(t) / 0 \leq u(t) \leq P_d(t)$

De la primera condición se sigue que

$$\frac{\lambda'_{opt}(t)}{\lambda_{opt}(t)} = -f_z(t, q(t), u_{opt}(t))$$

e integrando entre 0 y t , obtenemos

$$\lambda_{opt}(t) = \lambda_{opt}(0) \cdot \exp \left[-\int_0^t f_z(s, q(s), u_{opt}(s)) ds \right]$$

De (ii) se sigue que para cada t , $u_{opt}(t)$ minimiza la función

$$G(u) = \Psi(P_d(t) - u(t)) + \lambda_{opt}(t) \cdot f(t, q(t), u(t))$$

en el conjunto $\{u(t) / 0 \leq u(t) \leq P_d(t)\}$.

Entonces, de acuerdo con el teorema de Kuhn-Tucker, para cada t existen dos números reales no negativos, α y β , tales que $u_{opt}(t)$ es un punto crítico de

$$G^*(u) = \Psi(P_d(t) - u(t)) + \lambda_{opt}(t) \cdot f(t, q(t), u(t)) + \alpha \cdot (-u(t)) + \beta \cdot (u(t) - P_d(t))$$

verificándose que:

- Si $H(t, q(t), q'(t)) > 0$, entonces $\alpha = 0$.
- Si $H(t, q(t), q'(t)) - P_d(t) < 0$, entonces $\beta = 0$.

Evaluando $G^{*'}(u_{opt}(t))$, por ser punto crítico, tenemos que:

$$G^{*'}(u_{opt}(t)) = -\Psi'(P_d(t) - u_{opt}(t)) + \lambda_{opt}(t) \cdot f_u(t, q(t), u_{opt}(t)) - \alpha + \beta = 0.$$

Analizamos los distintos casos que se pueden presentar:

I) Si $0 < u_{opt}(t) = H(t, q(t), q'(t)) < P_d(t)$, entonces $\alpha = \beta = 0$.
En este caso,

$$\Psi'(P_d(t) - u_{opt}(t)) = \lambda_{opt}(t) \cdot f_u(t, q(t), u_{opt}(t))$$

Sustituyendo $\lambda_{opt}(t)$ por su valor

$$\lambda_{opt}(t) = \lambda_{opt}(0) \cdot \exp \left[- \int_0^t f_z(s, q(s), u_{opt}(s)) ds \right],$$

se obtiene

$$\Psi'(P_d(t) - u_{opt}(t)) = f_u(t, q(t), u_{opt}(t)) \cdot \lambda_{opt}(0) \cdot \exp \left[- \int_0^t f_z(s, q(s), u_{opt}(s)) ds \right],$$

de donde

$$\frac{\Psi'(P_d(t) - u_{opt}(t))}{f_u(t, q(t), u_{opt}(t))} \cdot \exp \left[\int_0^t f_z(s, q(s), u_{opt}(s)) ds \right] = \lambda_{opt}(0).$$

Teniendo en cuenta (1),

$$\frac{\Psi'(P_d(t) - u_{opt}(t))}{f_u(t, q(t), u_{opt}(t))} = \Psi'(P_d(t) - u_{opt}(t)) \cdot H_{z'}(t, q(t), q'(t)) = -L_{z'}(t, q(t), q'(t)),$$

se cumple

$$-L_{z'}(t, q(t), q'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}(s, q(s), q'(s))} ds \right] = \lambda_{opt}(0) \implies \mathbb{Y}_q(t) = K$$

II) Si $u_{opt}(t) = H(t, q(t), q'(t)) = P_d(t)$, entonces $\beta \geq 0$ y $\alpha = 0$.

En este caso

$$-\Psi'(P_d(t) - u_{opt}(t)) + \lambda_{opt}(t) \cdot f_u(t, q(t), u_{opt}(t)) + \beta = 0,$$

y al ser $\beta \geq 0$, obtenemos que

$$-\Psi'(P_d(t) - u_{opt}(t)) + \lambda_{opt}(t) \cdot f_u(t, q(t), u_{opt}(t)) \leq 0$$

$$\Psi'(P_d(t) - u_{opt}(t)) \geq f_u(t, q(t), u_{opt}(t)) \cdot \lambda_{opt}(0) \cdot \exp \left[- \int_0^t f_z(s, q(s), u_{opt}(s)) ds \right]$$

y, por ser $f_u > 0$,

$$\frac{\Psi'(P_d(t) - u_{opt}(t))}{f_u(t, q(t), u_{opt}(t))} \cdot \exp \left[\int_0^t f_z(s, q(s), u_{opt}(s)) ds \right] \geq \lambda_{opt}(0)$$

De nuevo, acudiendo a (1),

$$\frac{\Psi'(P_d(t) - u_{opt}(t))}{f_u(t, q(t), u_{opt}(t))} = \Psi'(P_d(t) - u_{opt}(t)) \cdot H_{z'}(t, q(t), q'(t)) = -L_{z'}(t, q(t), q'(t)),$$

se deduce

$$\mathbb{Y}_q(t) \geq K$$

III) Si $u_{opt}(t) = H(t, q(t), q'(t)) = 0$, entonces $\alpha \geq 0$ y $\beta = 0$.

En este caso

$$-\Psi'(P_d(t) - u_{opt}(t)) + \lambda_{opt}(t) \cdot f_u(t, q(t), u_{opt}(t)) - \alpha = 0$$

Y razonando de forma análoga, tenemos que $\mathbb{Y}_q(t) \leq K$. ■

Este resultado va a ser la base para resolver los problemas variacionales con restricciones.

4.3.1. Construcción de la solución

A partir del teorema 4.1 podemos proceder a la búsqueda del mínimo del funcional mediante la construcción de las extremales q_K . En ausencia de restricciones para las funciones admisibles, podría lograrse mediante, por ejemplo, el método de tiro; téngase en cuenta que se trataría de resolver la ecuación de Euler del funcional con las condiciones de contorno $z(0) = 0$ y $z(T) = b$. En nuestro caso usaremos la misma idea, sólo que en lugar de considerar la variación de la condición inicial para la derivada, que ahora no tiene sentido, tomaremos la variación de la constante K . Se tratará de construir, para cada K , una función q_K que satisfaga la condición inicial $q_K(0) = 0$ y las condiciones del teorema fundamental de coordinación y, de entre las q_K obtenidas, seleccionar aquella que es admisible (que satisfaga la segunda condición de contorno $q_K(T) = b$).

Para la construcción de la solución utilizaremos la ecuación de coordinación, $\forall t \in [0, T]$

$$-L_{z'}(t, z(t), z'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, z(s), z'(s))}{H_{z'}(s, z(s), z'(s))} ds \right] = -L_{z'}(0, z(0), z'(0)) = K \in \mathbb{R}^+$$

Consideremos caudal nulo en el instante inicial $t = 0$ para que la central no genere potencia: $H(0, 0, 0) = 0$ y denotemos por M el caudal necesario en el instante inicial $t = 0$ para satisfacer la central hidráulica toda la potencia demandada, es decir, $H(0, 0, M) = P_d(0)$. Denotemos también por

$$K_m = -L_{z'}(0, 0, 0) \quad \text{y} \quad K_M = -L_{z'}(0, 0, M)$$

las constantes de coordinación respectivas para esos caudales iniciales.

Observemos que $\forall x \in (0, M)$ (con la hipótesis $L_{z'z'}(t, z, z') > 0$) tenemos que

$$K_M < -L_{z'}(0, 0, x) < K_m$$

La construcción de q_K se realiza en diferentes pasos, formando y concatenando arcos de extremal fronterizos (o la central hidráulica o la central térmica genera toda la potencia demandada) y arcos interiores (la potencia demandada es generada conjuntamente por ambas centrales).

Procederemos de la manera siguiente:

1ª ETAPA) Para cada K , construimos q_K mediante la concatenación de arcos de extremal:

Primer arco] Dada K , distinguimos los siguientes casos:

i) Si $K \geq K_m$, tomaremos $q_K(t) = w(t)$, la solución de la ecuación diferencial $H(t, w(t), w'(t)) = 0$ con $w(0) = 0$ en el intervalo maximal $[0, t_1]$, donde $\forall t \in [0, t_1]$ se verifica que

$$K \geq \mathbb{Y}_\omega(t) = -L_{z'}(t, \omega(t), \omega'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, \omega(s), \omega'(s))}{H_{z'}(s, \omega(s), \omega'(s))} ds \right]$$

En este caso, la central térmica genera toda la potencia demandada en $[0, t_1]$.

ii) Si $K \leq K_M$, tomaremos $q_K(t) = w(t)$, la solución de la ecuación diferencial $H(t, w(t), w'(t)) = P_d(t)$ con $w(0) = 0$ en el intervalo maximal $[0, t_1]$, donde $\forall t \in [0, t_1]$ se verifica que

$$K \leq \mathbb{Y}_\omega(t) = -L_{z'}(t, \omega(t), \omega'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, \omega(s), \omega'(s))}{H_{z'}(s, \omega(s), \omega'(s))} ds \right]$$

En este caso, la central hidráulica genera toda la potencia demandada en el intervalo $[0, t_1]$.

iii) $K_M < K < K_m$ ($\exists x$ tal que $K = -L_{z'}(0, 0, x)$). Ahora q_K será el arco de extremal interior (con $q_K(0) = 0$) que satisface la ecuación de Euler en su dominio maximal $[0, t_1]$ y, por tanto, la ecuación de coordinación

$$K = \mathbb{Y}_{q_K}(t).$$

Arco i-ésimo] Caben dos posibilidades:

A) Si q_K tiene un arco interior en $[t_{i-1}, t_i]$, podemos distinguir, a su vez, dos casos:

i) Si $H(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i)) = 0$, consideraremos el intervalo maximal $[t_i, t_{i+1}]$, que verifica que $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$K \geq -L_{z'}(t, \omega(t), \omega'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^{t_i} \frac{H_z(s, q_K(s), q'_K(s))}{H_{z'}(s, q_K(s), q'_K(s))} ds - \int_{t_i}^t \frac{H_z(s, \omega(s), \omega'(s))}{H_{z'}(s, \omega(s), \omega'(s))} ds \right]$$

siendo $\omega(t)$ una solución de la ecuación diferencial

$$H(t, \omega(t), \omega'(t)) = 0 \text{ con } \omega(t_i) = q_K(t_i).$$

En este caso, tomaremos $q_K(t) = \omega(t)$, $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$.

ii) Si $H(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i)) = P_d(t_i)$, consideraremos el intervalo maximal $[t_i, t_{i+1}]$ que verifica que $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$K \leq -L_{z'}(t, \omega(t), \omega'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^{t_i} \frac{H_z(s, q_K(s), q'_K(s))}{H_{z'}(s, q_K(s), q'_K(s))} ds - \int_{t_i}^t \frac{H_z(s, \omega(s), \omega'(s))}{H_{z'}(s, \omega(s), \omega'(s))} ds \right]$$

siendo $\omega(t)$ una solución de la ecuación diferencial

$$H(t, \omega(t), \omega'(t)) = P_d(t) \text{ con } \omega(t_i) = q_K(t_i).$$

En este caso, tomaremos $q_K(t) = \omega(t)$, $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$.

B) Si $[t_{i-1}, t_i]$ es intervalo fronterizo, consideraremos el intervalo maximal $[t_i, t_{i+1}]$, que verifica que $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$K = -L_{z'}(t, \omega(t), \omega'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^{t_i} \frac{H_z(s, q_K(s), q'_K(s))}{H_{z'}(s, q_K(s), q'_K(s))} ds - \int_{t_i}^t \frac{H_z(s, \omega(s), \omega'(s))}{H_{z'}(s, \omega(s), \omega'(s))} ds \right]$$

siendo $\omega(t)$ un arco interior de la extremal, con $\omega(t_i) = q_K(t_i)$, que satisface la ecuación de Euler en su dominio maximal $[t_i, t_{i+1}]$ y, por tanto, satisface la ecuación de coordinación. Ahora, tomaremos $q_K(t) = \omega(t)$, $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$.

2ª ETAPA) Elegimos K de tal forma que $q_K \in \Theta_b$:

Consideramos la función $\varphi(K) := q_K(T)$ y calculamos la raíz de $\varphi(K) - b = 0$, cálculo que podemos realizar de forma aproximada a través de métodos elementales.

4.3.2. Cálculo aproximado de la solución

Este proceso se puede implementar de forma sencilla con el uso de una versión discretizada de las ecuaciones del teorema 4.1 en los instantes $t_j = T \cdot j/n$, con $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Para la construcción computacional de q_K utilizaremos, según los casos, las ecuaciones discretizadas siguientes en los instantes t_j :

Si $0 < H(t_j, q(t_j), q'(t_j)) < P_d(t_j)$

$$-L_{z'}(t_j, z(t_j), z'(t_j)) \cdot \exp \left[- \frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, z(t_i), z'(t_i))}{H_{z'}(t_i, z(t_i), z'(t_i))} \right] = K$$

Si $H(t_j, q(t_j), q'(t_j)) = P_d(t_j)$

$$-L_{z'}(t_j, z(t_j), z'(t_j)) \cdot \exp \left[- \frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, z(t_i), z'(t_i))}{H_{z'}(t_i, z(t_i), z'(t_i))} \right] \geq K$$

Si $H(t_j, q(t_j), q'(t_j)) = 0$

$$-L_{z'}(t_j, z(t_j), z'(t_j)) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, z(t_i), z'(t_i))}{H_{z'}(t_i, z(t_i), z'(t_i))} \right] \leq K$$

El algoritmo que proponemos se basa en la construcción, para cada K , de una sucesión doble $(q_K(t_i), q'_K(t_i))$ definida por recurrencia de la manera siguiente:

- i) $q_K(0) = 0$ (volumen inicial).
- ii) $q'_K(0)$ (caudal inicial) que determinaremos en función de los casos siguientes:
 - a) Si $K \geq K_m$, estamos en una zona de parada de la central hidráulica y tomaremos $q'_K(0) = 0$.
 - b) Si $K \leq K_M$ entonces determinaremos $q'_K(0)$ tal que se verifique la ecuación:

$$H(0, 0, q'_K(0)) = P_d(0)$$

- c) Si $K_M < K < K_m$ entonces determinaremos $q'_K(0)$ tal que se verifique la ecuación:

$$K = -L_{z'}(0, 0, q'_K(0)).$$

- iii) $q_K(t_i) = q_K(t_{i-1}) + \frac{T}{n} q'_K(t_{i-1})$ (acumulador de caudales⁸).

- iv) Si existe X tal que se verifica

$$K = -L_{z'}(t_j, q_K(t_j), q'_K(t_j)) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))}{H_{z'}(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))} \right]$$

tomamos un $q'_K(t_j) = X$.

Si por el contrario no se verifica la igualdad anterior, caben dos posibilidades:

- 1^a) Se verifica que

$$K > -L_{z'}(t_j, q_K(t_j), q'_K(t_j)) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))}{H_{z'}(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))} \right]$$

en cuyo caso tomaremos $q'_K(t_j)$ como aquel que satisface la siguiente igualdad:

$$H(t_j, q_K(t_j), q'_K(t_j)) = 0$$

- 2^a) Se verifica que

$$K < -L_{z'}(t_j, q_K(t_j), q'_K(t_j)) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))}{H_{z'}(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))} \right]$$

en cuyo caso tomaremos $q'_K(t_j)$ como aquel que satisface la siguiente igualdad:

$$H(t_j, q_K(t_j), q'_K(t_j)) = P_d(t_j)$$

⁸Esto revela que el método de resolución propuesto es de tipo Euler.

Nótese que en los instantes donde los valores obtenidos para z y z' violen las restricciones, se impondrá a la solución q_K mantenerse en la frontera hasta que se den las condiciones (establecidas en el teorema fundamental de coordinación) para su abandono.

Observación 4 En los arcos fronterizos de tipo $H(t, q(t), q'(t)) = 0$ la condición

$$\mathbb{Y}_q(t) = -L_{z'}(t, q_K(t), q'_K(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, q_K(s), q'_K(s))}{H_{z'}(s, q_K(s), q'_K(s))} \right] \leq K$$

es equivalente a la no existencia de solución, X , en el instante t de la ecuación

$$-L_{z'}(t, q_K(t), X) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, q_K(s), q'_K(s))}{H_{z'}(s, q_K(s), q'_K(s))} \right] = K$$

siendo X la incógnita.

No hay más que tener en cuenta el carácter estrictamente creciente de $L_{z'}$ con respecto a z' : si $H(t, q_K(t), q'_K(t)) = 0$ y $H(t, q_K(t), X) > 0$, necesariamente $q'_K(t) < X$ y, en consecuencia,

$$L_{z'}(t, q_K(t), X) > L_{z'}(t, q_K(t), q'_K(t)).$$

Observación 5 En los arcos fronterizos de tipo $H(t, q(t), q'(t)) = P_d(t)$, la condición

$$\mathbb{Y}_q(t) = -L_{z'}(t, q_K(t), q'_K(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, q_K(s), q'_K(s))}{H_{z'}(s, q_K(s), q'_K(s))} \right] \geq K$$

es equivalente a la no existencia de solución, X , en el instante t de la ecuación

$$-L_{z'}(t, q_K(t), X) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, q_K(s), q'_K(s))}{H_{z'}(s, q_K(s), q'_K(s))} \right] = K$$

cumpléndose, además, que $H(t, q_K(t), X) \leq P_d(t)$.

Efectivamente, si $H(t, q_K(t), q'_K(t)) = P_d(t)$ y $H(t, q_K(t), X) < P_d(t)$, necesariamente $q'_K(t) > X$ y, en consecuencia,

$$L_{z'}(t, q_K(t), X) < L_{z'}(t, q_K(t), q'_K(t)).$$

4.4. EL PROBLEMA DE BOLZA

El estudio realizado hasta ahora se ha centrado en la minimización del consumo de combustible de las centrales térmicas para un determinado volumen de agua disponible en la central hidráulica. Con este planteamiento, el agua aparece como un recurso del que se dispone sin que su valor constituya elemento significativo en el problema. Es natural, sin embargo, plantear el problema de tal modo que el coste de producción de energía de los sistemas hidrotérmicos no dependa exclusivamente del consumo de combustible de las centrales térmicas sino también del volumen de agua turbinada. Este problema resulta ser más real, pues el agua del embalse, en muchas centrales hidráulicas, también es utilizada para otros usos: regadío, consumo doméstico, etc. Así, tiene sentido una solución que consista en no gastar el máximo de agua disponible en el embalse en el intervalo de optimización $[0, T]$. En estas condiciones, si denotamos por S la función que determina el costo del agua utilizada, tendremos el problema de Bolza descrito en el apartado 2.3.2 del capítulo 2.

En la sección anterior se han estudiado las condiciones necesarias de optimalidad que proporciona el Principio del Mínimo de Pontryagin para el problema de control óptimo, considerando que los instantes inicial 0 y final T están fijados de antemano y que el estado del sistema en estos instantes viene dado por: $z(0) = 0$, $z(T) = b$.

En este momento nos proponemos trasladar las técnicas utilizadas y los resultados obtenidos en el problema anterior de volumen final fijo al caso en que el instante final T está fijado y el estado final está acotado superiormente: $z(T) \leq b$.

Recordamos que sigue presente la restricción $0 \leq H(t, z(t), z'(t)) \leq P_d(t)$. Hemos, por tanto, planteado el problema de minimizar el funcional:

$$F(z) = \int_0^T L(t, z(t), z'(t)) dt + S[z(T)]$$

dentro del conjunto

$$\Theta = \{z \in \widehat{C}^1[0, T] / z(0) = 0, z(T) \leq b, 0 \leq H(t, z(t), z'(t)) \leq P_d(t)\}.$$

Presentamos el problema en términos de control óptimo para realizar un estudio análogo al de la sección anterior. Sea $z(t)$ la variable de estado, $u(t) = H(t, z(t), z'(t))$ la variable de control, y $z' = f(t, z(t), u(t))$ la ecuación de estado. El problema de control óptimo planteado es entonces:

$$\min_{u(t)} \int_0^T L(t, z(t), u(t)) dt + S[z(T)] \quad \text{con} \quad \begin{cases} z' = f(t, z(t), u(t)) \\ z(0) = 0, z(T) \leq b \\ u(t) \in \Omega(t) = \{x \mid 0 \leq x \leq P_d(t)\} \end{cases}$$

siendo

$$L(t, z(t), u(t)) = \Psi(P_d(t) - u(t))$$

Establecemos, a continuación, las condiciones necesarias de existencia de extremo del funcional, utilizando el Principio del Mínimo de Pontryagin para la demostración de este teorema.

4.4.1. Condición necesaria de mínimo

Teorema 4.2 (Segundo teorema de coordinación) Si $q \in \widehat{C}^1$ es una solución del problema de Bolza antes descrito, entonces $\exists K \in \mathbb{R}^+$ tal que

i) Si $0 < H(t, q(t), q'(t)) < P_d(t)$ (t no es punto frontera) $\implies \mathbb{Y}_q(t) = K$

ii) Si $H(t, q(t), q'(t)) = P_d(t) \implies \mathbb{Y}_q(t) \geq K$

iii) Si $H(t, q(t), q'(t)) = 0 \implies \mathbb{Y}_q(t) \leq K$

y

$$K \geq \frac{\partial S[q(T)]}{\partial z} \cdot \frac{-\mathbb{Y}_q(T)}{L_{z'}(T, q(T), q'(T))}$$

Demostración.

La demostración de i), ii) y iii) es la del teorema 4.1 (primer teorema de coordinación) para el problema hidrotérmico generalizado con restricciones.

La aplicación del Principio del Mínimo de Pontryagin a este problema de Bolza, nos conduce a que la función λ_{opt} (variable de coestado) satisface:

$$\lambda'_{opt}(t) = -\frac{\partial \mathbb{H}(t, q(t), u_{opt}(t), \lambda_{opt}(t))}{\partial z} = -\lambda_{opt}(t) \cdot f_z(t, q(t), u_{opt}(t))$$

con la condición final

$$\lambda_{opt}(T) - \frac{\partial S[q(T)]}{\partial z} \geq 0; \quad (= 0 \text{ si } q(T) < b)$$

De la primera ecuación se sigue que

$$\lambda_{opt}(t) = \lambda_{opt}(0) \cdot \exp \left[-\int_0^t f_z(s, q(s), u_{opt}(s)) ds \right]$$

y sustituyendo en la condición final

$$\lambda_{opt}(0) \cdot \exp \left[-\int_0^T f_z(s, q(s), u_{opt}(s)) ds \right] - \frac{\partial S[q(T)]}{\partial z} \geq 0$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} K = \lambda_{opt}(0) &\geq \frac{\partial S[q(T)]}{\partial z} \cdot \exp \left[\int_0^T f_z(s, q(s), u_{opt}(s)) ds \right] = \\ &= \frac{\partial S[q(T)]}{\partial z} \cdot \frac{-\mathbb{Y}_q(T)}{L_{z'}(T, q(T), q'(T))} \end{aligned}$$

■

Este teorema nos permite caracterizar las extremales del problema y, además, constituye la base para la elaboración del algoritmo que resuelve el problema hidrotérmico de Bolza de un modo conceptualmente similar al del problema hidrotérmico generalizado con restricciones.

4.4.2. Construcción de la solución

Desde el punto de vista computacional, la construcción de la solución se realiza de forma análoga al caso del problema anterior (sin coste del agua).

La primera etapa será análoga a la que se desarrolló en la sección precedente:

1ª ETAPA) Para cada K , construimos una función q_K que satisfaga la condición inicial $q_K(0) = 0$ y las condiciones (i), (ii) y (iii) del teorema de coordinación 4.2. La construcción se llevará a cabo mediante la concatenación de arcos de extremal (interiores: $0 < H(t, q_K(t), q'_K(t)) < P_d(t)$ y frontera: $H(t, q_K(t), q'_K(t)) = P_d(t)$ o $H(t, q_K(t), q'_K(t)) = 0$) hasta completar el intervalo $[0, T]$. Para ello, recurriremos a una versión discretizada de las ecuaciones del teorema 4.2.

2ª ETAPA) Variando la constante de coordinación K , buscaremos la extremal que satisfaga, en el instante final T , la relación

$$K \geq \frac{\partial S[q(T)]}{\partial z} \cdot \frac{-\mathbb{Y}_q(T)}{L_{z'}(T, q(T), q'(T))}$$

y la segunda condición de contorno $z(T) \leq b$.

En primer lugar, determinamos el valor de K cuya extremal asociada satisfaga $q_K(T) = b$. Para ello, consideramos la función $\varphi(K) := q_K(T)$ y calculamos de forma aproximada la raíz de $\varphi(K) - b = 0$, cálculo que podemos realizar a través de métodos elementales.

Si se cumple la relación

$$K \geq \frac{\partial S[q_K(T)]}{\partial z} \cdot \frac{-\mathbb{Y}_{q_K}(T)}{L_{z'}(T, q_K(T), q'_K(T))}$$

entonces $q_K(t)$ es la solución óptima y se consume toda el agua disponible, b .

Si la K hallada no verifica la citada relación, se busca el valor de K tal que se cumpla la igualdad

$$K = \frac{\partial S[q_K(T)]}{\partial z} \cdot \frac{-\mathbb{Y}_{q_K}(T)}{L_{z'}(T, q_K(T), q'_K(T))}$$

siendo la función $q_K(t)$ asociada la solución óptima y, en este caso, el volumen final óptimo consumido resulta ser menor que el disponible, esto es, $q_K(T) < b$.

4.5. EJEMPLO

Hemos elaborado un programa con el paquete Mathematica que nos permite obtener, de forma simple, la solución del problema hidrotérmico planteado teniendo en cuenta el teorema 4.2.

Mostramos su aplicación al problema de optimización de un sistema hidrotérmico que consta de las centrales térmicas de la red Asturiana señaladas en el ejemplo 3.1 del capítulo 3 y una central hidráulica.

Tomaremos como modelo de coste de combustible de la térmica equivalente, $\Upsilon(x)$, el modelo, desarrollado en el apartado (c) del ejemplo 3.1, que incorpora pérdidas de transmisión del sistema y restricciones de potencia (mínimas y máximas).

Consideraremos un modelo de central hidráulica de carga variable, por lo que la potencia de generación activa P_h de la central hidráulica está dada por

$$P_h(t) = A(t)z'(t) - Bz'(t)z(t).$$

Así, la función de generación hidráulica efectiva es

$$H(t) = P_h(t) - b_{ll}(P_h(t))^2$$

donde $A(t)$, y B son los coeficientes

$$A(t) = \frac{1}{G}B_y(S_0 + t \cdot i); \quad B = \frac{B_y}{G}$$

En los modelos de carga variable, el término $-B \cdot z'(t) \cdot z(t)$ representa la influencia negativa del volumen de agua consumido, reflejando el hecho de que a menos agua consumida, más alta es la efectividad de la central. Representamos en la tabla siguiente los datos relativos a la central hidráulica

Tabla I: Datos de la central hidráulica.

Eficiencia G :	519840
Restricción de volumen b :	$1,1 \cdot 10^7$
Flujo natural de agua i :	$1,332 \cdot 10^5$
Coefficiente de pérdidas b_{ll} :	0,000166
Volumen inicial S_0 :	$239,5 \cdot 10^6$
Coefficiente B_y :	$434,079 \cdot 10^{-9}$
Potencia máxima $P_{máx}$	120

Las unidades de los coeficientes son: la eficiencia G en $(m^4/h.Mw)$, la restricción de volumen b en (m^3) , el coeficiente de pérdidas b_{ii} en $(1/Mw)$, el flujo natural de agua i en (m^3/h) , el volumen inicial S_0 en (m^3) y el parámetro que depende de la geometría del depósito que es el coeficiente B_y , en (m^{-2}) .

Consideraremos el problema de coordinación hidrotérmica a corto plazo en un intervalo de optimización $[0, 24]$ con una discretización de 96 subintervalos.

Planteamos, en primer lugar, el problema en el que el costo de producción depende exclusivamente del consumo de combustible de las centrales térmicas (representadas por su equivalente) y, a continuación, tomando el mismo sistema hidrotérmico asignaremos diferentes valores al costo del agua consumida para ver el comportamiento de la central hidráulica. Compararemos, finalmente, los resultados obtenidos.

Mostramos en la Fig. 4.1 la gráfica de la potencia demandada y la potencia óptima de la térmica equivalente y en la Fig. 4.2 la potencia óptima de la central

hidráulica en el problema sin costo del agua.

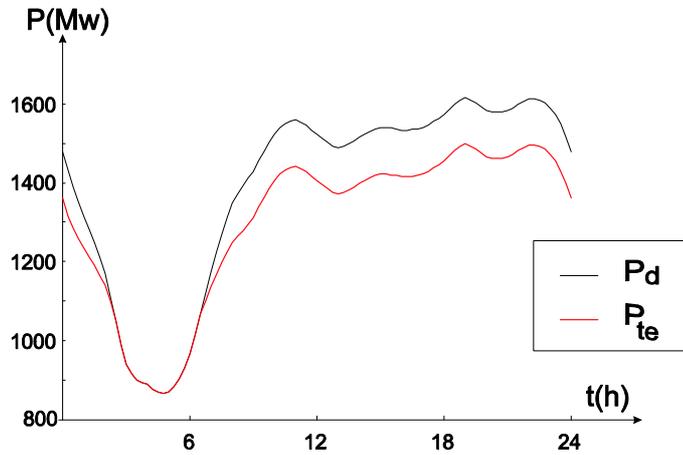


Figura 4.1. Potencia demandada $P_d(t)$ y potencia térmica óptima $P_{te}(t)$.

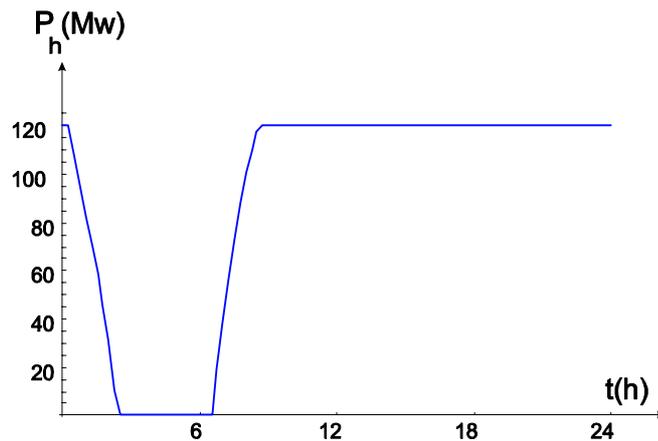


Figura 4.2. Potencia Hidráulica Óptima.

Como se puede observar en la Fig. 4.2, la potencia generada por la central hidráulica respeta el límite de generación impuesto y presenta un intervalo en el que se apaga, coincidiendo con el valle de la potencia demandada.

Consideraremos ahora un modelo lineal para el costo asociado al agua

$$S[z(T)] = \nu \cdot z(T)$$

donde ν es el factor de conversión del agua que cuantifica las unidades de (m^3) a (€). En este ejemplo, presentamos tres casos: (a) $\nu = 0,00375$, (b) $\nu = 0,00475$ y (c) $\nu = 0,00515$. El factor de conversión no pretende ser el costo real del agua por m^3 consumido (como es el aplicado por urbanismo, consumo industrial o de riego) pues el agua turbinada por una central hidráulica ni se contamina ni se pierde. Este factor simplemente pretende ser similar al factor de penalización asignado a la

contaminación producida por las centrales térmicas, para asegurar una cierta reserva de agua. Así, consideramos que el agua continúa fluyendo aguas abajo y puede ser usada para los consumos antes mencionados (urbano, industrial y de riego).

Mostramos en la Fig. 4.3 la gráfica de la potencia óptima de la hidráulica en cada uno de los casos presentados.

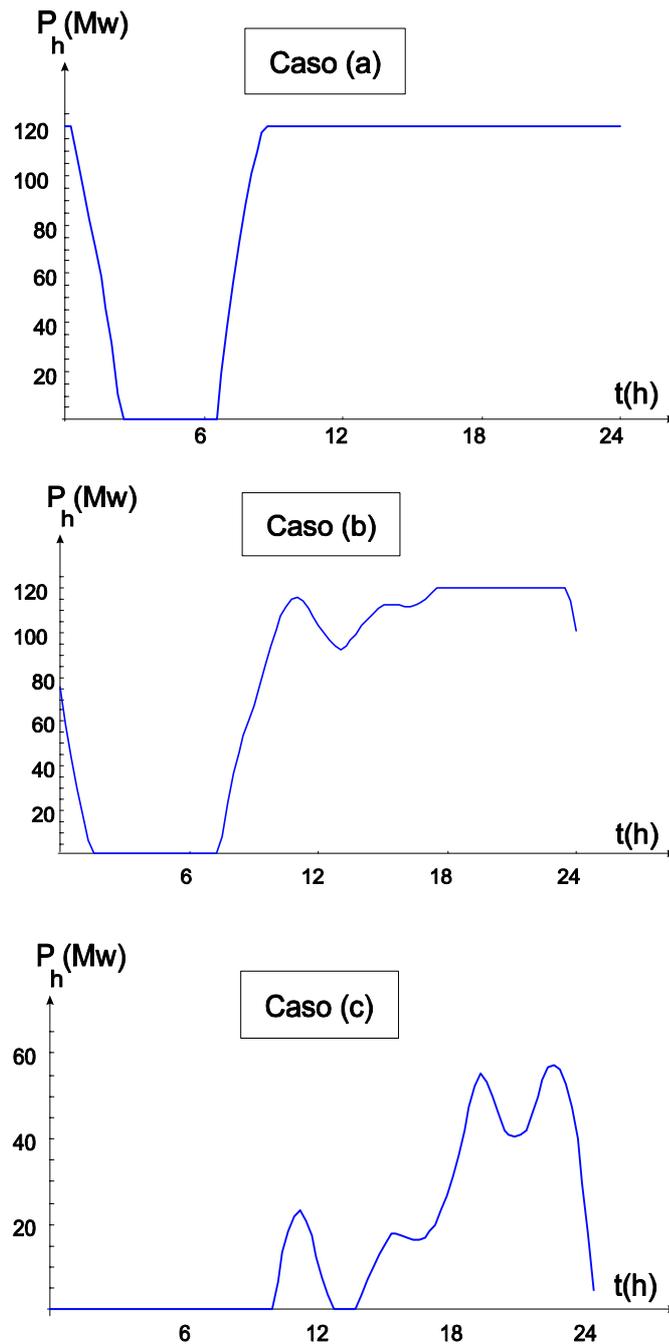


Figura 4.3. Potencia Hidráulica Óptima.

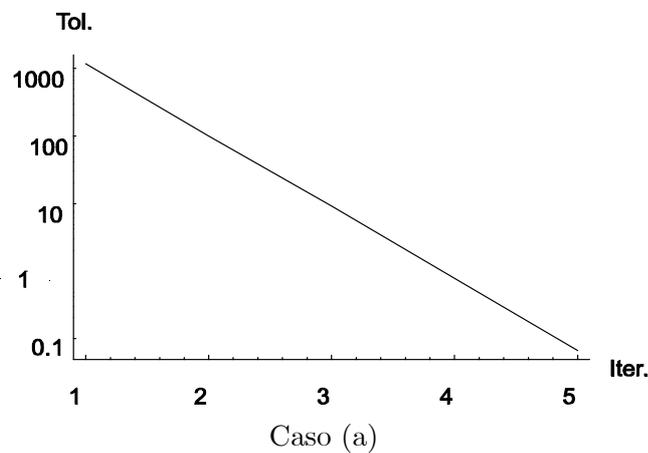
Como se puede observar en la Fig. 4.3, la potencia generada por la central hidráulica disminuye cuando el costo asignado al agua consumida aumenta (casos (b) y (c)). De hecho, en el primer caso la central hidráulica se comporta exactamente igual que el caso libre (sin costo del agua) consume todo el agua disponible, mientras que en el caso (b) consume $9,02803 \cdot 10^6 m^3$ y en el (c) consume $1,90879 \cdot 10^6 m^3$, de los $11 \cdot 10^6 m^3$ disponibles.

En la siguiente tabla mostramos el incremento del costo cuando se valora el agua consumida por la central hidráulica:

Tabla II. Costo de la solución óptima.

	Libre	Caso (a)	Caso (b)	Caso (c)
Costo térmico	910045,95€	910045,95€	919222,44€	954353,65€
Costo agua		41250,0€	42883,16€	9830,28€
Costo total	910045,95€	951295,95€	962105,6€	964183,93€

El algoritmo muestra una rápida convergencia a la solución óptima. En este ejemplo, son suficientes 5 iteraciones para obtener un error menor que 10^{-1} en el volumen de agua consumido por la central hidráulica para el caso (a). En los casos (b) y (c) se necesitan 6 y 9 iteraciones respectivamente para obtener un error menor que el propuesto inicialmente (10^{-15}) en la condición de transversalidad. En la Fig. 4.4 se muestra la variación del error relativo en valor absoluto.



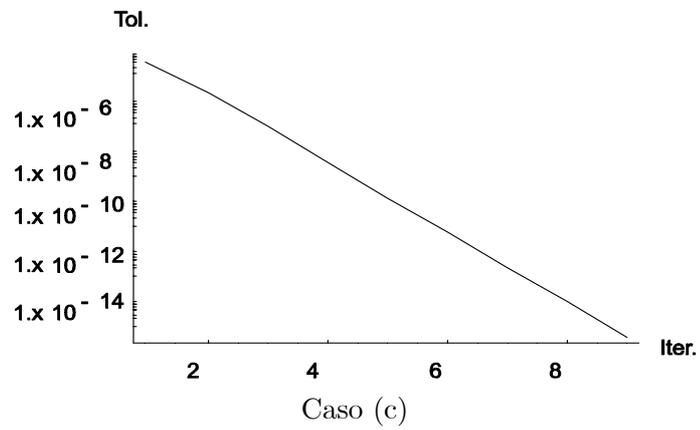
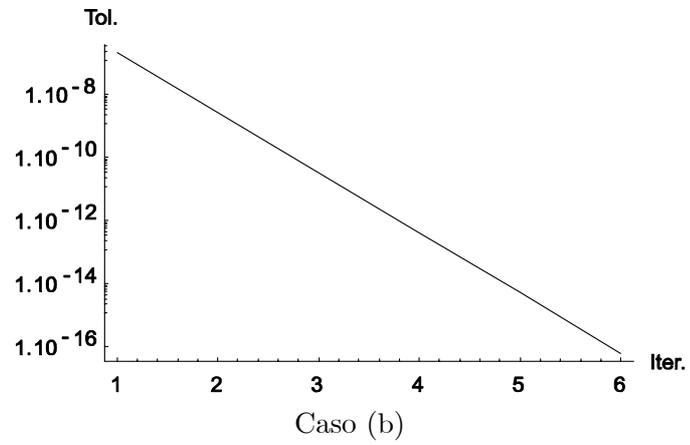


Figura 4.4. Convergencia a la Solución Óptima.

Capítulo 5

PROBLEMAS CON LAGRANGIANO NO REGULAR. CENTRALES DE BOMBEO

5.1. INTRODUCCIÓN

En el tercer capítulo se realizaron una serie de consideraciones que permitieron replantear el problema clásico de optimización hidrotérmica, presentándolo como un problema variacional sin ligaduras. En este capítulo, planteamos el estudio de sistemas hidrotérmicos que constan de centrales hidráulicas de bombeo.

En los últimos tiempos, distintos trabajos se han dedicado al estudio de este problema y son muy diversas las técnicas empleadas en su resolución. Señalamos algunos trabajos a continuación.

Guan y otros [73] presentan un algoritmo basado en técnicas de relajación lagrangiana. Descomponen el subproblema hidráulico con centrales de bombeo por horas. Para evitar oscilaciones en la solución, aproximan de forma cuadrática la función de generación de estas centrales y determinan su comportamiento óptimo minimizando una función de una variable.

Allan y otros [1], [2], utilizan la simulación secuencial de Monte-Carlo para el problema con restricciones del flujo de carga. Prestan especial atención a la coordinación entre las unidades térmicas y las hidráulicas, apareciendo centrales de bombeo con limitación de energía en sus simulaciones. **Hannett** y otros [76] trabajan con un modelo de simulación dinámica, mientras que **Puntel** y otros [117] utilizan una aproximación probabilística y **Hongwei** y otros [78] desarrollan un nuevo método en el que combinan programación dinámica, algoritmos genéticos y técnicas de optimización híbridas.

La mayoría de estas técnicas de resolución (relajación lagrangiana, programación lineal, dinámica,...) son empleadas para, combinadas con otros métodos de análisis, reducir la complejidad matemática del problema y obtener la solución mediante un algoritmo de convergencia. Lo que se busca con ellas es que el modelo refleje la realidad del sistema; demasiadas simplificaciones o malas modelizaciones pueden conducir a soluciones rápidas pero imprecisas. Nos interesa que el algoritmo empleado reduzca la posibilidad de estancamiento en un mínimo local, que converja con rapidez y resulte eficaz cuando hay muchas variables.

Nuestro propósito es estudiar, desde un punto de vista teórico, los sistemas hidrotérmicos que constan de centrales de bombeo, lo cual hace que el lagrangiano del funcional no sea C^1 respecto del caudal. Buscamos garantizar condiciones de existencia de solución y aportar un algoritmo que nos permita, independientemente del número de centrales y del modelo de generación-bombeo de las mismas, obtener la solución.

En este capítulo, planteamos el estudio de sistemas hidrotérmicos que constan de una única central hidráulica de bombeo. En estos problemas, la derivada de H con respecto a z' ($H_{z'}$) presenta una discontinuidad en $z' = 0$ que es la frontera entre la zona de generación de potencia (valores positivos de z') y la zona de bombeo (valores negativos de z'). Por tanto, nos encontramos en una situación en la que el integrando del funcional es continuo pero no de clase C^1 con respecto a z' .

Para localizar el mínimo de nuestro funcional hemos optado, en primer lugar, por la utilización de técnicas del análisis no diferenciable. En concreto, del gradiente generalizado o gradiente de Clarke, obteniendo una condición necesaria para la existencia de mínimo. El estudio se realiza en primer lugar con carácter general, sin imponer más restricciones a las funciones admisibles que su pertenencia a $\widehat{C}^1[0, T]$ y las ya establecidas restricciones de volumen disponible. En segundo lugar, se considera el caso en que imponemos, además, restricciones naturales de generación y bombeo a la central hidráulica.

A continuación, presentaremos un estudio, desde el punto de vista del cálculo variacional, para el caso particular en el que el funcional, con lagrangiano, no C^1 respecto de z' , sea convexo y no dependiente de z , obteniendo una condición suficiente de mínimo. Aplicaremos los teoremas desarrollados en este apartado a un problema hidrotérmico, obteniendo algunos resultados específicos para el mismo.

Seguidamente nos planteamos la generalización de uno de estos resultados. Demostraremos que la discontinuidad de la derivada del integrando no se traduce en discontinuidad de la derivada para las extremales. De hecho, veremos que la derivada de todo extremo presenta un intervalo de constancia cuando éste toma el valor para el cual se presenta la discontinuidad de la derivada del integrando.

Por último, construimos un algoritmo, implementado con el programa Mathematica que resuelve de forma simple el problema y, como ejemplo de su aplicación práctica, mostramos la resolución de un problema real de optimización hidrotérmica con una central hidráulica de bombeo.

El trabajo desarrollado en este capítulo ha dado lugar a dos publicaciones, [18] y [23] de Bayón y otros, a las cuales haremos referencia en la sección correspondiente.

5.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Planteamos, a continuación, el problema hidrotérmico que consta de una central térmica (térmica equivalente) y de una única central hidráulica de bombeo: H₁-T₁.

Permitiremos que las funciones admisibles para \bar{H} no tengan más restricciones que su pertenencia a $\widehat{C}^1[0, T]$ y las restricciones de volumen disponible. Quedarán de este modo incluidas en nuestro estudio las ya mencionadas centrales de bombeo¹ al permitir que la función de generación hidráulica efectiva $H(t, z, z')$ esté definida para valores negativos de z' (caudal).

En estas condiciones, denotamos por φ_b al problema de minimizar el funcional

$$F(z) = \int_0^T L(t, z(t), z'(t)) dt$$

con $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ función de clase C^0 , siendo $L_z(\cdot, \cdot, \cdot)$ de clase C^0 y $L_{z'}(t, z, \cdot)$ función continua a trozos, de la forma

$$L(t, z(t), z'(t)) = \Psi(P_d(t) - H(t, z(t), z'(t)))$$

dentro del conjunto

$$\Theta_b := \{z \in \widehat{C}^1[0, T] \mid z(0) = 0, z(T) = b\}$$

Suponemos que $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $H : \Omega_H \subset [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, en el interior de sus dominios de definición, verifican: Ψ es estrictamente creciente y estrictamente convexa y seguimos considerando la positividad estricta de $H_{z'}$ y el carácter estrictamente creciente de $L_{z'}$ con respecto a z' .

En una sección posterior de este capítulo realizaremos un estudio análogo al que se desarrollará para este problema, considerando en este caso el funcional sobre un conjunto de funciones admisibles en el que aparecerán restricciones mínimas y máximas sobre la función de generación hidráulica H .

En el siguiente apartado establecemos condiciones necesarias de mínimo del funcional F para el caso en que el lagrangiano L es continuo pero no de clase C^1 respecto de z' dentro del conjunto Θ_b .

5.3. CONDICIONES NECESARIAS DE MÍNIMO

Resultados clásicos de cálculo variacional aseguran que si $L \in C^1$, entonces un mínimo $q \in C^1$ (fuerte o débil) satisface, $\forall t \in [0, T]$, la ecuación

$$L_{z'}(t, q(t), q'(t)) = Const. + \int_0^t L_z(x, q(x), q'(x)) dx$$

¹Las centrales de bombeo disponen de la capacidad de bombear agua, en determinados momentos, con el propósito de utilizarla en otros de modo más eficiente. Cuando se produce el bombeo, obviamente, se está descargando un caudal negativo y se está generando una potencia también negativa (la que consume la bomba).

En Grau [72] se establecen algunos resultados que aportan condiciones suficientes para la existencia de mínimo de un problema H_1 - T_1 similar a \wp_b , pero considerando L de clase C^1 . Es natural el interés de extender las condiciones necesarias de mínimo a funcionales cuyos integrandos no sean diferenciables. El desarrollo realizado por Clarke [39], con la introducción del gradiente generalizado, proporciona un gran avance en este estudio.

En esta sección se recoge un trabajo publicado en [23], donde el problema planteado \wp_b se formula en el marco del análisis no diferenciable y se presenta una condición necesaria de mínimo.

5.3.1. Gradiente generalizado de Clarke

Presentamos algunos conceptos y resultados de la teoría de diferenciación generalizada desarrollada por Clarke [39].

El análisis no diferenciable trabaja con funciones f localmente Lipschitzianas que son diferenciables casi en cualquier punto (en el sentido de medida de Lebesgue), definidas sobre un espacio de Banach \mathbb{X} .

Definición. Sea $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ función Lipschitziana en x . Se llama *gradiente generalizado de f en x o gradiente de Clarke*, y se denota por $\partial f(x)$, el subconjunto de X^* dado por:

$$\partial f(x) = \{ \xi \in \mathbb{X}^* / f^\circ(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle, \forall v \in \mathbb{X} \}$$

donde $\mathbb{X}^* = \{ \xi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} \text{ funciones lineales continuas} \}$ es el espacio dual de X , $\langle \xi, v \rangle$ o $\langle v, \xi \rangle$ denota $\xi(v)$, $\forall v \in X$, y $f^\circ(x; v)$ la derivada direccional generalizada de f en x en la dirección v ,

$$f^\circ(x; v) = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}$$

A continuación, nos centraremos en el caso en que \mathbb{X} es un espacio de dimensión finita y presentaremos el gradiente generalizado de cierta clase importante de funcionales integrales (integrales sobre subespacios de L^∞), enfoque que nos interesa para nuestro problema.

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y Ω_f el conjunto (de medida nula) de puntos donde f no es diferenciable. Al ser $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, identificamos \mathbb{X}^* con \mathbb{X} , por lo que $\partial f(x)$ será un subconjunto de \mathbb{R}^n .

Teorema. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ función localmente Lipschitziana en x y sea S cualquier conjunto de medida de Lebesgue 0 en \mathbb{R}^n . Entonces

$$\partial f(x) = \text{co} \{ \lim \nabla f(x_i) : x_i \rightarrow x, x_i \notin S, x_i \notin \Omega_f \}. \quad (1)$$

Es decir, considerada cualquier sucesión x_i convergente a x que evite los puntos de S y Ω_f , y tal que la sucesión de los gradientes $\nabla f(x_i)$ converja, el gradiente generalizado resulta ser la envoltura convexa de los límites de los gradientes de todas estas sucesiones. Obviamente, si f es diferenciable en x , el gradiente generalizado coincide con el gradiente.

Proposición 5.1 *Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f'(x) = \begin{cases} \phi^-(x) & \text{si } x < x_0 \\ \phi^+(x) & \text{si } x > x_0, \end{cases}$$

con ϕ^+ y ϕ^- continuas en x_0 y $\phi^+(x_0) > \phi^-(x_0)$, entonces $\partial f(x_0) = [\phi^-(x_0), \phi^+(x_0)]$.

Demostración. Determinamos $\partial f(x_0)$ sobre la base de (1).

Para $x_i < x_0$, se verifica que

$$\lim_{x_i \rightarrow x_0} \nabla f(x_i) = \lim_{x_i \rightarrow x_0} \phi^-(x_i) = \phi^-(x_0)$$

Para $x_i > x_0$, se verifica que

$$\lim_{x_i \rightarrow x_0} \nabla f(x_i) = \lim_{x_i \rightarrow x_0} \phi^+(x_i) = \phi^+(x_0)$$

Por lo que

$$\partial f(x_0) = \text{co} \{ \lim \nabla f(x_i) : x_i \rightarrow x_0, x_i \notin S, x_i \notin \Omega_f \} = [\phi^-(x_0), \phi^+(x_0)]. \quad (2)$$

■

Extendemos el estudio a funcionales integrales sobre un espacio $(\mathbb{T}, \mathfrak{S}, \mu)$ de medida σ -finita positiva e \mathbb{Y} un espacio separable Banach. Se denota por $L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{Y})$ el espacio de funciones esencialmente acotadas y medibles de \mathbb{T} a \mathbb{Y} , con la norma usual del supremo. Sea \mathbb{X} un subespacio cerrado de $L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{Y})$ y $f_t : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ una familia de funciones ($t \in \mathbb{T}$). Consideramos una función f sobre \mathbb{X} definida por

$$f(x) = \int_{\mathbb{T}} f_t(x(t)) \mu(dt)$$

Supuesto que f está definida (finitamente) en un punto x , para caracterizar $\partial f(x)$ suponemos que existe $\epsilon > 0$ y una función k en $L^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ tal que, para todo $t \in \mathbb{T}$, para todo v_1, v_2 en $B_{\mathbb{Y}}(x(t), \epsilon)$,

$$|f_t(v_1) - f_t(v_2)| \leq k(t) \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{Y}}$$

Suponemos también que la aplicación $t \rightarrow f_t(v)$ es medible para cada $v \in \mathbb{Y}$. En estas condiciones, se verifica el siguiente resultado:

Teorema. *Bajo las hipótesis descritas anteriormente, f es Lipschitziana en un entorno de x y se verifica que*

$$\partial f(x) \subset \int_{\mathbb{T}} \partial f_t(x(t)) \mu(dt). \quad (3)$$

La interpretación de la expresión (3) es la siguiente: para todo $\xi \in \partial f(x)$ existe una aplicación

$$\xi_t : \mathbb{T} \xrightarrow{t \rightarrow \xi_t} \mathbb{X}^* \quad / \quad \xi_t \in \partial f_t(x) \quad \mu - a.e.$$

que verifica que para todo $v \in \mathbb{X}$, la función $t \rightarrow \langle \xi_t, v \rangle$ perteneciente a $L^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ cumple que

$$\langle \xi, v \rangle = \int_{\mathbb{T}} \langle \xi_t, v \rangle \mu(dt)$$

Una vez obtenidos estos resultados, tomamos como funcional f el siguiente:

$$F(z) = \int_0^T L(t, z(t), z'(t)) dt$$

donde z es una función absolutamente continua de $[0, T]$ en \mathbb{R} . Determinamos el gradiente generalizado de F , ∂F , a través del teorema anterior, teniendo en cuenta que ahora:

$(\mathbb{T}, \mathfrak{S}, \mu) = [0, T]$ con la medida de Lebesgue, $\mathbb{Y} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ espacio separable Banach, el subespacio cerrado \mathbb{X} de $L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{Y})$ es

$$\mathbb{X} = \left\{ (s, v) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^2) \quad / \quad \text{para algún } c \in \mathbb{R}, s(t) = c + \int_0^t v(\tau) d\tau \right\}$$

y la familia de funciones $f_t : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ ($t \in \mathbb{T}$) con $f_t(s, v) = L(t, s, v)$. (Obsérvese que para cualquier $(s, v) \in \mathbb{X}$, tenemos que $f(s, v) = F(s)$).

Sea (\hat{s}, \hat{v}) un elemento cualquiera de \mathbb{X} (por lo que $\hat{v} = (d/dt)\hat{s}$), suponemos que el integrando L es medible en t , y que para algún $\varepsilon > 0$ y alguna función $k(\cdot)$ en $L^1([0, T], \mathbb{R})$ se verifica

$$|L(t, s_1, v_1) - L(t, s_2, v_2)| \leq k(t) \|(s_1 - s_2, v_1 - v_2)\|$$

para todo (s_i, v_i) en $B((\hat{s}(t), \hat{v}(t)), \varepsilon)$. Bajo estas condiciones se verifican las hipótesis del teorema anterior, por lo que si $\xi \in \partial f(\hat{s}, \hat{v})$, podemos deducir la existencia de una función medible $\xi_t = (r(t), p(t))$ tal que

$$(r(t), p(t)) \in \partial L(t, \hat{s}(t), \hat{v}(t)) \quad a.e.$$

(donde ∂L denota el gradiente generalizado con respecto a (s, v)) y donde, para cualquier $(s, v) \in \mathbb{X}$, se cumple

$$\langle \xi, (s, v) \rangle = \int_0^T \langle \xi_t, (s(t), v(t)) \rangle dt = \int_0^T [r(t)s(t) + p(t)v(t)] dt$$

En la siguiente proposición se presenta la condición necesaria de existencia de mínimo:

Proposición. (*Extremo local*) Si f tiene un mínimo o máximo local en x , entonces $0 \in \partial f(x)$.

En el caso del funcional F , si tiene un mínimo local en \widehat{s} , por la proposición anterior $\xi = 0 \in \partial f(\widehat{s}, \widehat{v})$ y, por tanto,

$$\int_0^T [r(t)s(t) + p(t)v(t)] dt = 0$$

de donde se deduce fácilmente que $p(\cdot)$ es absolutamente continua y además $r = p'$ a.e. En este caso tenemos una versión no diferenciable de la ecuación de Euler-Lagrange

$$(p'(t), p(t)) \in \partial L(t, \widehat{s}(t), \widehat{s}'(t)) \text{ a.e.} \quad (4)$$

5.3.2. Condición necesaria

Si $L_{z'}$ fuese continua y $z(t)$ verificase la ecuación de Euler del funcional $F(z)$, tendríamos que

$$L_z(t, z(t), z'(t)) - \frac{d}{dt} (L_{z'}(t, z(t), z'(t))) = 0$$

y sin más que integrar obtendríamos la conocida expresión de Du-Bois-Reymond:

$$-L_{z'}(t, z(t), z'(t)) + \int_0^t L_z(s, z(s), z'(s)) ds = -L_{z'}(0, z(0), z'(0)) = K \in \mathbb{R}^+$$

obteniendo de nuevo la denominada constante de coordinación, K .

Al presentar $L_{z'}(t, z, \cdot)$ una discontinuidad para ciertos valores de z' , adoptamos la siguiente notación

$$L_{z'}^+(t, z, z') := L_{z'}(t, z, z'_+); \quad L_{z'}^-(t, z, z') := L_{z'}(t, z, z'_-)$$

Definición 5.1 Llamamos $\mathfrak{Y}_z^+(t)$ y $\mathfrak{Y}_z^-(t)$ a las expresiones siguientes que tienen en cuenta las derivadas laterales de L respecto de z' en los puntos de discontinuidad de $L_{z'}(t, z, \cdot)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}_z^+(t) &= \int_0^t L_z(\tau, z(\tau), z'(\tau)) d\tau - L_{z'}^+(t, z(t), z'(t)) \\ \mathfrak{Y}_z^-(t) &= \int_0^t L_z(\tau, z(\tau), z'(\tau)) d\tau - L_{z'}^-(t, z(t), z'(t)) \end{aligned}$$

Con estas consideraciones podemos demostrar el siguiente resultado (condición necesaria de mínimo).

Teorema 5.1 (Tercer teorema de coordinación) Si q es mínimo del funcional

$$F(z) = \int_0^T L(t, z(t), z'(t)) dt$$

siendo $L(t, \cdot, \cdot)$ localmente Lipschitziana, $L(\cdot, z, z')$ medible y $L_{z'}(t, z, \cdot)$ continua a trozos en el conjunto $\Theta_b := \{z \in \widehat{C}^1[0, T] \mid z(0) = 0 \wedge z(T) = b\}$, entonces $\exists K \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\begin{cases} \mathfrak{Y}_q^+(t) \leq K \leq \mathfrak{Y}_q^-(t) & \text{si } q'(t) \text{ es punto de discontinuidad de } L_{z'}(t, q(t), \cdot) \\ \mathfrak{Y}_q^+(t) = \mathfrak{Y}_q^-(t) = K & \text{si } L_{z'}(t, q(t), \cdot) \text{ es continua en } q'(t) \end{cases}$$

Demostración. Por ser $z \in \widehat{C}^1[0, T]$, tenemos garantizado que $z(t)$ y $z'(t)$ son funciones esencialmente acotadas y medibles, es decir

$$(z, z') \in \mathbb{X} = \left\{ (s, v) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^2) \ / \ \text{para algún } c \in \mathbb{R}, s(t) = c + \int_0^t v(\tau) d\tau \right\}.$$

Por otra parte, es obvio que el funcional F satisface las hipótesis que nos permiten garantizar que se verifica la ecuación (3):

$$\partial F(z) \subset \int_0^T \partial L(t, z(t), z'(t)) dt.$$

Supongamos, en primer lugar, que la función $L_{z'}(t, z, \cdot)$ es discontinua en $q'(t)$. Teniendo en cuenta que $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ está definida en un espacio de dimensión finita, y haciendo uso de (1), obtenemos el gradiente de Clarke en $(q(t), q'(t))$ sobre la base de (2):

$$\partial L(t, q(t), q'(t)) = \left(L_z(t, q(t), q'(t)), \left[L_{z'}^-(t, q(t), q'(t)), L_{z'}^+(t, q(t), q'(t)) \right] \right) \text{ a.e.}$$

Por ser q mínimo de F en Θ_b , es

$$\int_0^T [r(t)s(t) + p(t)v(t)] dt = 0,$$

de donde se deduce que $p(\cdot) \in \widehat{C}^1[0, T]$ y además $r = p'$ a.e., por lo que la ecuación (4) se puede expresar en la forma:

$$\begin{aligned} (p'(t), p(t)) &\in \left(L_z(t, q(t), q'(t)), \left[L_{z'}^-(t, q(t), q'(t)), L_{z'}^+(t, q(t), q'(t)) \right] \right) \text{ a.e.} \\ \left\{ \begin{array}{l} p'(t) = L_z(t, q(t), q'(t)) \implies p(t) + K = \int_0^t L_z(\tau, q(\tau), q'(\tau)) d\tau \\ p(t) \in \left[L_{z'}^-(t, q(t), q'(t)), L_{z'}^+(t, q(t), q'(t)) \right]. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} L_{z'}^-(t, q(t), q'(t)) &\leq \int_0^t L_z(\tau, q(\tau), q'(\tau)) d\tau - K \leq L_{z'}^+(t, q(t), q'(t)) \\ L_{z'}^-(t, q(t), q'(t)) - \int_0^t L_z(\tau, q(\tau), q'(\tau)) d\tau &\leq -K \leq \\ &\leq L_{z'}^+(t, q(t), q'(t)) - \int_0^t L_z(\tau, q(\tau), q'(\tau)) d\tau \\ \mathbb{Y}_q^+(t) &\leq K \leq \mathbb{Y}_q^-(t). \end{aligned}$$

Si la función $L_{z'}(t, z, \cdot)$ es continua en $q'(t)$, entonces

$$L_{z'}^+(t, q(t), q'(t)) \equiv L_{z'}^-(t, q(t), q'(t))$$

y $\mathbb{Y}_q^+(t) = \mathbb{Y}_q^-(t)$, y en tal caso

$$\mathbb{Y}_q^+(t) = \mathbb{Y}_q^-(t) = K.$$

■

Obsérvese que las características de nuestro problema \wp_b nos van a permitir asegurar que se cumplen las dos hipótesis necesarias para garantizar que se verifica el teorema anterior:

i) $L(t, \cdot, \cdot)$ es localmente Lipschitziana. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $L_{z'}(t, z, \cdot)$ es discontinua en $z' \equiv 0$. El problema puede surgir en puntos de la forma $(t_0, z_0, 0)$. Veamos que $L(t, \cdot, \cdot)$ es localmente Lipschitziana también en estos puntos, es decir, que existe $k > 0$ tal que

$$|L(t, x, x') - L(t, y, y')| \leq k \|\bar{x} - \bar{y}\|, \quad \forall (t, x, x'), (t, y, y') \in B((t_0, z_0, 0), \varepsilon)$$

denotando por \bar{x} e \bar{y} los vectores de funciones (x, x') e (y, y') respectivamente y siendo $\|\cdot\|$ la norma del supremo. Distinguimos tres posibilidades:

a) Sean \bar{x} e \bar{y} tales que $x', y' > 0$; entonces, por el teorema de valor medio para funciones de varias variables, se tiene

$$\begin{aligned} |L(t, x, x') - L(t, y, y')| &= |DL(t, z_1, z'_1)| \cdot \|\bar{x} - \bar{y}\| \leq \\ &\leq \left(\left| \frac{\partial L(t, z_1, z'_1)}{\partial z} \right| + \left| \frac{\partial L(t, z_1, z'_1)}{\partial z'} \right| \right) \cdot \|\bar{x} - \bar{y}\| \leq k \cdot \|\bar{x} - \bar{y}\| \end{aligned}$$

siendo $\bar{z}_1 = \lambda \bar{x} + (1 - \lambda) \bar{y}$ con $\lambda \in [0, 1]$ y, dado que las derivadas parciales L_z y $L_{z'}$ están acotadas en dicho punto, podemos suponer que $\left(\left| \frac{\partial L(t, z_1, z'_1)}{\partial z} \right| + \left| \frac{\partial L(t, z_1, z'_1)}{\partial z'} \right| \right) \leq k$, para algún $k > 0$.

b) Sean \bar{x} e \bar{y} tales que $x', y' < 0$; entonces, razonando de forma análoga a la anterior, siendo $\bar{z}_2 = \lambda \bar{x} + (1 - \lambda) \bar{y}$ con $\lambda \in [0, 1]$, se tiene

$$\begin{aligned} |L(t, x, x') - L(t, y, y')| &= |DL(t, z_2, z'_2)| \cdot \|\bar{x} - \bar{y}\| \leq \\ &\leq \left(\left| \frac{\partial L(t, z_2, z'_2)}{\partial z} \right| + \left| \frac{\partial L(t, z_2, z'_2)}{\partial z'} \right| \right) \cdot \|\bar{x} - \bar{y}\| \leq k \cdot \|\bar{x} - \bar{y}\| \end{aligned}$$

c) Sean \bar{x} e \bar{y} tales que $x' \geq 0$ e $y' \leq 0$. Distinguimos dos casos:

c1) Si $x' = y' = 0$, en cuyo caso $L(t, \cdot, 0)$ es Lipschitziana, consecuencia de estar $L_z(t, \cdot, 0) \forall t \in [0, T]$ acotada en un entorno de $(z(t), 0)$.

c2) En otra situación, se verifica que:

$$\begin{aligned} |L(t, x, x') - L(t, y, y')| &= |L(t, x, x') - L(t, x, 0) + L(t, x, 0) - L(t, y, y')| \leq \\ &\leq |L(t, x, x') - L(t, x, 0)| + |L(t, x, 0) - L(t, y, y')| \leq \\ &\leq |DL(t, z_1, z'_1)| \cdot \|x'\| + |DL(t, z_2, z'_2)| \cdot \|(x - y, -y')\| \leq \\ &\leq k \cdot \|\bar{x} - \bar{y}\| + k \cdot \|\bar{x} - \bar{y}\| = 2k \cdot \|\bar{x} - \bar{y}\| \end{aligned}$$

siendo $\bar{z}_1 = \lambda \bar{x} + (1 - \lambda)(x, 0)$ y $\bar{z}_2 = \lambda(x, 0) + (1 - \lambda) \bar{y}$ con $\lambda \in [0, 1]$.

Por tanto, garantizamos que la función $L(t, \cdot, \cdot)$ es localmente Lipschitziana.

ii) $t \rightarrow L_t$ es medible Lebesgue (consecuencia de ser $L(\cdot, z, z')$ continua con respecto a t).

Obsérvese, asimismo, que la condición exigida en el teorema ($t \rightarrow L_t$ es medible) es más débil que la que tenemos en \wp_b ($L(\cdot, z, z')$ continua). Podríamos, por tanto, aplicar el resultado a problemas donde la función $L(\cdot, z, z')$ no sea necesariamente continua, lo que se traduce en poder considerar problemas hidrotérmicos donde la potencia demandada sea discontinua.

A partir del teorema 5.1 podemos proceder a la búsqueda del mínimo del funcional, mediante la construcción de las extremales q_K .

5.3.3. Construcción de la solución

Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $L_{z'}(t, z, \cdot)$ es continua con un solo punto de discontinuidad en $z' = 0$. Siguiendo la misma idea que en el problema de Bolza, buscaremos, para cada K , la función q_K que satisfaga las ecuaciones del teorema anterior y, de entre ellas, la que dé lugar a una función admisible, $q_K \in \Theta_b$. La construcción se llevará a cabo formando y encadenando sucesivamente los arcos de extremal donde $q'(t) \neq 0$ y los arcos donde la central hidráulica ni genera potencia ni bombea agua ($q'(t) = 0$) hasta completar todo el intervalo $[0, T]$.

Procederemos de la forma siguiente:

I) Para cada K , construimos q_K . Concatenación de arcos de extremal:

Primer arco] Dada K , distinguimos los siguientes casos:

i) Si $-L_{z'}^+(0, 0, 0) \leq K \leq -L_{z'}^-(0, 0, 0)$ (zona de parada de la central hidráulica), tomamos $q'_K(t) = 0$ en el intervalo maximal $[0, t_1]$, donde $\forall t \in [0, t_1]$ se satisface

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}_{q_K}^+(t) &= \int_0^t L_z(s, q_K(s), q'_K(s))ds - L_{z'}^+(t, q_K(t), q'_K(t)) \leq K \\ K &\leq \int_0^t L_z(s, q_K(s), q'_K(s))ds - L_{z'}^-(t, q_K(t), q'_K(t)) = \mathbb{Y}_{q_K}^-(t). \end{aligned}$$

ii) Si $-L_{z'}^+(0, 0, 0) > K$ (zona de generación hidráulica), entonces existe solución positiva $q'_K(0)$ para la ecuación $-L_{z'}(0, 0, q'_K(0)) = K$. En este caso, construimos un arco de extremal, $q_K(t)$, solución de la ecuación de Euler en el intervalo maximal $[0, t_1]$, donde $\forall t \in [0, t_1]$ se satisface $q'_K(t) > 0$ y

$$K = \mathbb{Y}_{q_K}(t) = \int_0^t L_z(s, q_K(s), q'_K(s))ds - L_{z'}(t, q_K(t), q'_K(t))$$

iii) Si $-L_{z'}^-(0, 0, 0) < K$ (zona de bombeo), entonces existe solución negativa $q'_K(0)$ para la ecuación $-L_{z'}(0, 0, q'_K(0)) = K$. En este caso, construimos un arco

de extremal, $q_K(t)$, solución de la ecuación de Euler en el intervalo maximal $[0, t_1]$, donde $\forall t \in [0, t_1]$ se satisface $q'_K(t) < 0$ y

$$K = \mathbb{Y}_{q_K}(t) = \int_0^t L_z(s, q_K(s), q'_K(s))ds - L_{z'}(t, q_K(t), q'_K(t))$$

Arco i-ésimo] Caben dos posibilidades:

i) Si $[t_{i-1}, t_i]$ es un intervalo maximal de parada de la central hidráulica, es decir, $q'_K(t) = 0$ en dicho intervalo, consideraremos el intervalo maximal $[t_i, t_{i+1}]$ que verifica que $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$K = \int_0^{t_i} L_z(s, q_K(s), q'_K(s))ds + \int_{t_i}^t L_z(s, \omega(s), \omega'(s))ds - L_{z'}(t, \omega(t), \omega'(t))$$

con $\omega(t_i) = q_K(t_i)$, satisfaciendo la ecuación de Euler en su dominio maximal $[t_i, t_{i+1}]$ y la ecuación anterior. Tomaremos $q_K(t) = \omega(t)$, $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$.

ii) Si $[t_{i-1}, t_i]$ es un intervalo maximal donde, $q'_K(t) \neq 0$ en dicho intervalo, consideraremos el intervalo maximal $[t_i, t_{i+1}]$ que verifica que $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\int_0^{t_i} L_z(s, q_K(s), q'_K(s))ds + \int_{t_i}^t L_z(s, \omega(s), 0)ds - L_{z'}^+(t, \omega(t), \omega'(t)) \leq K$$

$$K \leq \int_0^{t_i} L_z(s, q_K(s), q'_K(s))ds - \int_{t_i}^t L_z(s, \omega(s), 0)ds - L_{z'}^-(t, \omega(t), \omega'(t))$$

con $\omega(t_i) = q_K(t_i)$, satisfaciendo la ecuación anterior y $\omega'(t) = 0$ en el intervalo maximal $[t_i, t_{i+1}]$. Tomaremos $q_K(t) = \omega(t)$, $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$.

II) Determinamos K tal que $q_K \in \Theta_b$. El procedimiento es similar al método de tiro empleado para la resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden con condiciones de contorno. Consideramos la función $\varphi(K) := q_K(T)$ y calculamos la raíz de $\varphi(K) - b = 0$, cálculo que podemos realizar de forma aproximada a través de métodos elementales.

A continuación, vamos a considerar un caso particular del problema planteado, caso en el que el lagrangiano no depende de $z(t)$.

5.4. CASO PARTICULAR $L(t, z'(t))$

En esta sección estudiamos el caso particular del problema \wp_b en que el lagrangiano no regular es independiente de $z(t)$. Este estudio, publicado en [18], utiliza exclusivamente herramientas del cálculo variacional para establecer las condiciones suficientes de mínimo. Planteamos el problema de la forma siguiente:

Consideramos la variedad afín (funciones admisibles)

$$\Theta_b := \{z \in \widehat{C}^1[0, T] \mid z(0) = 0 \wedge z(T) = b\}$$

de espacio director

$$V := \{z \in \widehat{C}^1[0, T] \mid z(0) = 0 \wedge z(T) = 0\}$$

la función subintegral $L(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^0 , con $L_{z'}(t, \cdot)$ continua a trozos, del funcional $F : \Theta_b \rightarrow \mathbb{R}$ definido de la manera siguiente:

$$F(z) = \int_0^T L(t, z'(t)) dt.$$

Como $L_{z'}(t, \cdot)$ presenta discontinuidades, el funcional F no es, en general, diferenciable Gâteaux. A pesar de todo, la función $\Psi_q(x) = F(q+x\omega)$, aunque distintas, puede tener derivadas laterales en el cero. Consideramos la definición y propiedades siguientes:

Definición Sea A variedad afín de espacio director V . Si $q \in A$ y $\omega \in V$, denotaremos por $\delta^+ F(q, \omega)$ a la derivada direccional de F en q en la dirección de ω por la derecha; es decir:

$$\begin{aligned} \delta^+ F(q, \omega) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(q + \varepsilon \omega) - F(q)}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T [L(t, q(t) + \varepsilon \omega(t), q'(t) + \varepsilon \omega'(t)) - L(t, q(t), q'(t))] dt \end{aligned}$$

Nótese que se verifican las siguientes propiedades:

a) Si $q \in A$ proporciona el valor mínimo de F en A , entonces para cada $\omega \in V$

$$\delta^+ F(q, \omega) \geq 0.$$

b) Si F es convexo y en $q \in A$ se cumple que $\delta^+ F(q, \omega) \geq 0$ para cada $\omega \in V$, entonces q proporciona el valor mínimo de F en A .

Denotamos por

$$L_{z'}^+(t, z') := L_{z'}(t, z'_+) \quad \text{y} \quad L_{z'}^-(t, z') := L_{z'}(t, z'_-).$$

Obsérvese que, en este caso particular, $\mathbb{Y}_z^+(t) = -L_{z'}^+(t, z')$ y $\mathbb{Y}_z^-(t) = -L_{z'}^-(t, z')$.

5.4.1. Condición suficiente de mínimo

Establecemos, en los teoremas siguientes, la condición suficiente de mínimo y el método para su construcción, caso de ser F un funcional convexo. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $L_{z'}(t, \cdot)$ es continua con un solo punto de discontinuidad en $z' = 0$.

Teorema 5.2 Sea $F(z) = \int_0^T L(t, z'(t)) dt$ siendo $L(\cdot, \cdot)$ continua y $L_{z'}(t, \cdot)$ discontinua en $z' = 0$ y sea $q \in A$. Si $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} L_{z'}(t, q'(t)) = K & \text{si } q'(t) \neq 0 \\ L_{z'}^-(t, 0) \leq K \leq L_{z'}^+(t, 0) & \text{si } q'(t) = 0 \end{cases}$$

entonces $\delta^+ F(q; \omega) \geq 0$ para cada $\omega \in V$.

Demostración. Sea $\omega \in V$. Consideramos, en primer lugar, los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} \Theta_{=} & : = \{t \in [0, T] \mid q'(t) = 0\} \\ \Theta_{\neq} & : = \{t \in [0, T] \mid q'(t) \neq 0\} \\ \Omega^+ & : = \{t \in \Theta_{=} \mid \omega'(t) > 0\} \\ \Omega^- & : = \{t \in \Theta_{=} \mid \omega'(t) < 0\} \\ \Omega^0 & : = \{t \in \Theta_{=} \mid \omega'(t) = 0\} \end{aligned}$$

Como L es de clase C^1 en Θ_{\neq} , tenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Theta_{\neq}} [L(t, q'(t) + \varepsilon \omega'(t)) - L(t, q'(t))] dt = \int_{\Theta_{\neq}} \omega'(t) \cdot L_{z'}(t, q'(t)) dt$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \int_{\Theta_{=}} [L(t, \varepsilon \omega'(t)) - L(t, 0)] dt & = \\ & = \int_{\Omega^+} [L(t, \varepsilon \omega'(t)) - L(t, 0)] dt + \\ & \quad + \int_{\Omega^-} [L(t, \varepsilon \omega'(t)) - L(t, 0)] dt \end{aligned}$$

Además, es fácil ver que las funciones Φ_1 y Φ_2

$$\Phi_1(y) := \int_{\Omega^+} L(t, y \cdot \omega'(t)) dt$$

$$\Phi_2(y) := \int_{\Omega^-} L(t, y \cdot \omega'(t)) dt$$

son derivables en cero por la derecha

$$\Phi_1'(0^+) = \int_{\Omega^+} \omega'(t) L_{z'}^+(t, 0) dt$$

$$\Phi_2'(0^+) = \int_{\Omega^-} \omega'(t) L_{z'}^-(t, 0) dt$$

de modo que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega^+} [L(t, \varepsilon \omega'(t)) - L(t, 0)] dt &= \int_{\Omega^+} \omega'(t) \cdot L_{z'}^+(t, 0) dt \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega^-} [L(t, \varepsilon \omega'(t)) - L(t, 0)] dt &= \int_{\Omega^-} \omega'(t) \cdot L_{z'}^-(t, 0) dt. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \delta^+ F(q; \omega) &= \int_{\Theta \neq} \omega'(t) \cdot L_{z'}(t, q'(t)) dt + \\ &\quad + \int_{\Omega^+} \omega'(t) \cdot L_{z'}^+(t, 0) dt + \int_{\Omega^-} \omega'(t) \cdot L_{z'}^-(t, 0) dt. \end{aligned}$$

Además, como $\omega(0) = \omega(T) = 0$, tenemos que

$$\int_{\Theta \neq} \omega'(t) dt + \int_{\Omega^0} \omega'(t) dt + \int_{\Omega^+} \omega'(t) dt + \int_{\Omega^-} \omega'(t) dt = \int_0^T \omega'(t) dt = 0$$

por lo que

$$\int_{\Theta \neq} K \cdot \omega'(t) dt + \int_{\Omega^+} K \cdot \omega'(t) dt + \int_{\Omega^-} K \cdot \omega'(t) dt = 0$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \delta^+ F(q; \omega) &= \int_{\Theta \neq} \omega'(t) \cdot (L_{z'}(t, q'(t)) - K) dt + \\ &\quad + \int_{\Omega^+} \omega'(t) \cdot (L_{z'}^+(t, 0) - K) dt + \int_{\Omega^-} \omega'(t) \cdot (L_{z'}^-(t, 0) - K) dt \end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} L_{z'}^+(t, q'(t)) - K &\geq 0 \text{ para cada } t \in \Omega^+ \\ L_{z'}^-(t, q'(t)) - K &\leq 0 \text{ para cada } t \in \Omega^- \\ L_{z'}(t, q'(t)) - K &= 0 \text{ para cada } t \in \Theta \neq \end{aligned}$$

concluimos que $\delta^+ F(q; \omega) \geq 0$. ■

Teorema 5.3 Sea $F(z) = \int_0^T L(t, z'(t)) dt$ en las condiciones del teorema anterior. Si la función $L_{z'}(t, \cdot)$ es estrictamente creciente para cada t y

$$K \in \bigcap_{t \in [0, T]} [\lim_{x \rightarrow -\infty} L_{z'}(t, x), \lim_{x \rightarrow \infty} L_{z'}(t, x)]$$

entonces $q_K(t) := \int_0^t \omega_K(s) ds$, con

$$\omega_K(t) = 0 \quad \text{si } L_{z'}^-(t, 0) \leq K \leq L_{z'}^+(t, 0)$$

y

$$L_{z'}(t, \omega_K(t)) = K \quad \text{en otro caso,}$$

proporciona el valor mínimo de F en

$$\Omega_K := \{z \in \widehat{C}^1[0, T] \mid z(0) = 0 \wedge z(T) = q_K(T)\}.$$

Demostración. El carácter creciente de $L_{z'}(t, \cdot)$ para todo t garantiza la convexidad de $L(t, z'(t))$ y, en consecuencia, la del funcional F .

Obsérvese que K pertenece a la imagen de la función $L_{z'}(t, \cdot)$ para cada $t \in [0, T]$, asegurando así la existencia de solución de $L_{z'}(t, x) = K$ para el caso en que no se verifique que $L_{z'}^-(t, 0) \leq K \leq L_{z'}^+(t, 0)$. Por consiguiente, $\omega_K(t)$ está bien definida y es claro que $q_K \in \Omega_K$.

Si $q'_K \equiv 0$, entonces para cada $t \in [0, T]$

$$L_{z'}^-(t, 0) \leq K \leq L_{z'}^+(t, 0)$$

y, de acuerdo al teorema 5.2, $\delta^+ F(q_K; \omega) \geq 0$. Entonces, como F es convexa, $q_K \equiv 0$ proporciona el mínimo de F sobre

$$\Omega_K = \{z \in \widehat{C}^1[0, T] \mid z(0) = 0 \wedge z(T) = q_K(T) = 0\}.$$

Si $\exists \tau \in [0, T]$ tal que $q'_K(\tau) \neq 0$, tomamos $K = L_{z'}(t, q'_K(\tau))$ y teniendo en cuenta cómo se ha construido q_K se verifica que

$$\begin{cases} L_{z'}(t, q'_K(t)) = K & \text{si } 0 \neq \omega_K(t) = q'_K(t) \\ L_{z'}^-(t, 0) \leq K \leq L_{z'}^+(t, 0) & \text{si } 0 = \omega_K(t) = q'_K(t) \end{cases}$$

y, de acuerdo al teorema 5.2, q_K proporciona el mínimo de F sobre

$$\Omega_K := \{z \in \widehat{C}^1[0, T] \mid z(0) = 0 \wedge z(T) = q_K(T)\}.$$

■

5.4.2. Aplicación a un problema hidrotérmico

Aportamos algunos resultados específicos, para un problema de coordinación hidrotérmica, derivados de los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Como caso particular del teorema 5.3, obtenemos un resultado que hace referencia a un sistema hidrotérmico con una central hidráulica de bombeo cuya producción de potencia H es una función lineal del caudal de descarga ($m \cdot z'(t)$) y cuya potencia consumida durante el bombeo es también una función lineal del caudal bombeado ($M \cdot z'(t)$). Denotamos por P_d la potencia demandada y por Ψ la función de costo de combustible de la térmica equivalente.

Proposición 5.2 Sea $\Psi \in C^1[\mathbb{R}]$, Ψ' estrictamente creciente, $P_d \in C[0, T]$ y $L(t, z'(t)) := \Psi(P_d(t) - H(z'(t)))$

con

$$F(z) := \int_0^T \Psi(P_d(t) - H(z'(t))) dt$$

$$H(x) := \begin{cases} m \cdot x & \text{si } x \geq 0 \\ M \cdot x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} ; \quad (0 < m < M)$$

Si $K > 0$ y $[\frac{K}{M}, \frac{K}{m}] \subset \Psi'[\mathbb{R}]$, entonces

$$q_K(t) := \int_0^t \omega_K(s) ds$$

con

$$\omega_K(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } \Psi'^{-1}(\frac{K}{m}) \geq P_d(t) \geq \Psi'^{-1}(\frac{K}{M}) \\ \frac{\Psi'^{-1}(\frac{K}{m}) - P_d(t)}{-m} & \text{si } \Psi'^{-1}(\frac{K}{m}) < P_d(t) \\ \frac{\Psi'^{-1}(\frac{K}{M}) - P_d(t)}{-M} & \text{si } P_d(t) < \Psi'^{-1}(\frac{K}{M}) \end{cases}$$

proporciona el valor mínimo de F en

$$\Omega_K := \{z \in \widehat{C}^1[0, T] \mid z(0) = 0 \wedge z(T) = q_K(T)\}.$$

Demostración. Teniendo en cuenta el hecho de que F es convexa², bastará con demostrar que se verifica la condición suficiente de extremal establecida en el teorema 5.3.

Si $\omega_K(t) = 0$, entonces $\Psi'^{-1}(\frac{K}{m}) \geq P_d(t) \geq \Psi'^{-1}(\frac{K}{M})$, por lo que

$$\frac{K}{m} \geq \Psi'(P_d(t)) \geq \frac{K}{M} \implies \begin{cases} L_{z'}^-(t, 0) = -M \cdot \Psi'(P_d(t)) \leq -K \\ L_{z'}^+(t, 0) = -m \cdot \Psi'(P_d(t)) \geq -K \end{cases}$$

con lo cual

$$L_{z'}^-(t, 0) \leq -K \leq L_{z'}^+(t, 0).$$

Si $\omega_K(t) < 0$, entonces $P_d(t) < \Psi'^{-1}(\frac{K}{M})$

$$L_{z'}(t, \omega_K) = -M \cdot \Psi' \left(P_d(t) - M \cdot \frac{\Psi'^{-1}(\frac{K}{M}) - P_d(t)}{-M} \right) = -K.$$

²La convexidad del funcional F queda garantizada con las propiedades asumidas en el planteamiento del problema hidrotérmico al ser Ψ creciente y convexa y H cóncava con respecto a z' .

Si $\omega_K(t) > 0$, entonces $\Psi'^{-1}(\frac{K}{m}) < P_d(t)$

$$L_{z'}(t, \omega_K) = -m \cdot \Psi' \left(P_d(t) - m \cdot \frac{\Psi'^{-1}(\frac{K}{m}) - P_d(t)}{-m} \right) = -K.$$

Es obvio que se satisface el teorema 5.3 para la constante $-K$. ■

En la figura siguiente se muestra el significado de la proposición anterior:

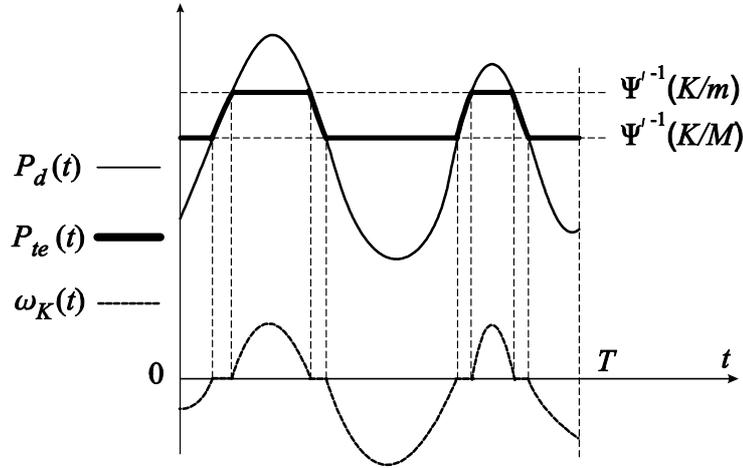


Figura 5.1. Significado de la Proposición 5.2.

La extremal que proporciona el mínimo, $q_K(t) := \int_0^t \omega_K(s) ds$, nos garantiza que la potencia generada por la térmica equivalente, denotada por

$$P_{te}(t) := P_d(t) - H(t, z'(t))$$

será constante en los arcos de extremal en los cuales la central hidráulica esté generando potencia o consumiéndola con el bombeo (no esté parada), y su valor será:

$$P_{te}(t) = \begin{cases} \Psi'^{-1}(K/m) & \text{si } \Psi'^{-1}(K/m) \leq P_d(t) \\ \Psi'^{-1}(K/M) & \text{si } P_d(t) \leq \Psi'^{-1}(K/M). \end{cases}$$

En otro caso (periodo de cambio de la zona de bombeo a generación o a la inversa), es obvio que $P_{te}(t) = P_d(t)$.

Corolario 5.1 *Bajo las condiciones anteriores, si*

$$m \max_{t \in [0, T]} \Psi'(P_d(t)) \leq M \min_{t \in [0, T]} \Psi'(P_d(t))$$

entonces $\omega \equiv 0$ proporciona el valor mínimo de F en

$$\Theta_b := \{z \in \widehat{C}^1[0, T] \mid z(0) = 0 \wedge z(T) = 0\}.$$

Demostración. Sea K tal que

$$m \max_{t \in [0, T]} \Psi'(P_d(t)) \leq K \leq M \min_{t \in [0, T]} \Psi'(P_d(t)).$$

Tenemos que, $\forall t \in [0, T]$

$$\max_{t \in [0, T]} \Psi'(P_d(t)) \leq K/m \implies P_d(t) \leq \Psi'^{-1}(K/m)$$

$$K \leq M \min_{t \in [0, T]} \Psi'(P_d(t)) \implies P_d(t) \geq \Psi'^{-1}(K/M)$$

$$\Psi'^{-1}(K/m) \geq P_d(t) \geq \Psi'^{-1}(K/M)$$

por lo que estamos en condiciones de usar la proposición 5.2 y concluir que $\omega \equiv 0$ minimiza el funcional en Θ_b . ■

El significado de este corolario es que si el volumen de agua disponible es nulo (al final del intervalo de optimización debe ser igual la cantidad de agua turbinada que la bombeada) y se verifica la siguiente desigualdad

$$m \max_{t \in [0, T]} \Psi'(P_d(t)) \leq M \min_{t \in [0, T]} \Psi'(P_d(t))$$

entonces el funcionamiento óptimo del sistema consiste en no usar la planta hidráulica, es decir, la térmica equivalente debe asumir toda la potencia demandada. Los factores que favorecen la verificación de la desigualdad anterior son los tres³ siguientes:

$$i) m \ll M; \quad ii) \Psi' \cong const.; \quad iii) P_d \cong const.$$

Como acabamos de ver en la interpretación de la proposición 5.2, la derivada de la extremal $q_K(t) := \int_0^t \omega_K(s) ds$, que proporciona el valor mínimo del funcional, no pasa bruscamente de la zona negativa a la positiva ni viceversa, sino que se mantiene un cierto tiempo constantemente igual a cero. A continuación, analizaremos este hecho desde un punto de vista más general.

5.5. TRANSICIÓN SUAVE

En esta sección presentamos un aspecto cualitativo de los extremos de funcionales con lagrangiano $L(t, z, \cdot)$ no regular. Demostraremos que, bajo ciertas condiciones, la derivada de la extremal donde se alcanza el mínimo presenta un intervalo de constancia, siendo la constante el valor de z' para el cual $L_{z'}$ presenta la discontinuidad. En el caso particular de las centrales de bombeo se traduce en la existencia

³Si el volumen de agua disponible para la central hidráulica al final del intervalo de optimización es cero, no compensará usar la central si:

- i) la potencia consumida en bombear una cierta cantidad de agua es "mucho mayor" que la generada por la central al turbinar esa misma cantidad de agua,
- ii) Ψ se aproxima a una función lineal, o
- iii) la potencia demandada no presenta grandes variaciones.

de un intervalo de parada cuando se produce el tránsito de la zona positiva (zona de generación de potencia) a la negativa (zona de bombeo) y viceversa. También queda garantizada la continuidad de la derivada de esta extremal.

Consideramos la variedad afín (funciones admisibles)

$$A := \{z \in \widehat{C}^1[0, T] \mid z(0) = \alpha \wedge z(T) = \beta\}$$

de espacio director

$$V := \{z \in \widehat{C}^1[0, T] \mid z(0) = 0 \wedge z(T) = 0\}$$

y, por último, la función subintegral $L(\cdot, \cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^0 , con $L_z(\cdot, \cdot, \cdot)$ de clase C^0 y $L_{z'}(t, z, \cdot)$ continua a trozos, del funcional $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ definido de la manera siguiente:

$$F(z) = \int_0^T L(t, z(t), z'(t)) dt.$$

Demostremos, en el siguiente teorema, que la discontinuidad de la derivada del integrando no se traduce en discontinuidad de la derivada de los extremos, sino en intervalos en los que éstos son constantes. Consideramos previamente la siguiente definición.

Definición 5.2 Sea $t_0 \in (0, T)$ y $\varepsilon > 0$. Denotaremos por $h_\varepsilon^{t_0}$ la función definida en $[0, T]$ del modo siguiente:

$$h_\varepsilon^{t_0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, t_0 - \varepsilon] \cup [t_0 + \varepsilon, T] \\ (t - t_0 + \varepsilon) & \text{si } t \in [t_0 - \varepsilon, t_0] \\ -(t - t_0 - \varepsilon) & \text{si } t \in [t_0, t_0 + \varepsilon] \end{cases}$$

Se cumple que $h_\varepsilon^{t_0} \in \widehat{C}^1[0, T]$ y $0 \leq h_\varepsilon^{t_0}(t) \leq \varepsilon$, $\forall t \in [0, T]$, siendo

$$(h_\varepsilon^{t_0})'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, t_0 - \varepsilon) \cup (t_0 + \varepsilon, T] \\ 1 & \text{si } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0) \\ -1 & \text{si } t \in (t_0, t_0 + \varepsilon) \end{cases}$$

Teorema 5.4 Sea $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ función subintegral del funcional F en las condiciones anteriormente expuestas, y supongamos que la función $L_{z'}(t_0, z(t_0), \cdot)$ es estrictamente creciente (decreciente) y discontinua en $a \in \mathbb{R}$. Si q es mínimo (máximo) de F , entonces:

- (i) t_0 no es punto aislado de cambio de signo de $q' - a$.
- (ii) $q' \equiv a$ en algún intervalo que contiene a t_0 .
- (iii) q' es continua en t_0 .

Demostración. Supondremos sin pérdida de generalidad que $a = 0$.

(i) Procederemos por reducción al absurdo.

Sea $q \in A$ mínimo de F , y supongamos, en primer lugar, que q' es negativo a izquierda de t_0 y positivo a derecha de t_0 .

Es decir, supongamos que existen $t_0 \in (0, T)$ y $\theta > 0$ tal que

$$q'(t_0 - t) < 0 < q'(t_0 + t) \quad \forall t \in (0, \theta);$$

el crecimiento estricto de $L_{z'}$, así como su discontinuidad, implica que

$$L_{z'}^-(t_0, q(t_0), 0) < L_{z'}^+(t_0, q(t_0), 0)$$

Teniendo en cuenta que $\forall t \in [0, T]$, $0 \leq h_\varepsilon^{t_0}(t) \leq \varepsilon$, resulta evidente que existe $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño como para que se verifique la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)} [L_{z'}(t, q(t), q'(t)) + h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t))] < \\ & < \inf_{t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)} [L_{z'}(t, q(t), q'(t)) - h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t))] \end{aligned}$$

de donde se deducen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0} [L_{z'}(t, q(t), q'(t)) + h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t))] dt \leq \\ & \leq \varepsilon \cdot \sup_{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)} [L_{z'}(t, q(t), q'(t)) + h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t))] < \\ & < \varepsilon \cdot \inf_{t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)} [L_{z'}(t, q(t), q'(t)) - h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t))] \leq \\ & \leq \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} [L_{z'}(t, q(t), q'(t)) - h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t))] dt = I_2. \end{aligned}$$

Tengamos en cuenta ahora que

$$\begin{aligned} h_\varepsilon^{t_0}(t) &= 0, \quad \forall t \in [0, t_0 - \varepsilon] \cup [t_0 + \varepsilon, T], \text{ y} \\ (h_\varepsilon^{t_0})'(t) &= 0, \quad \forall t \in [0, t_0 - \varepsilon] \cup (t_0 + \varepsilon, T] \end{aligned}$$

de modo que

$$\delta F(q, h_\varepsilon^{t_0}) = \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} [h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t)) + (h_\varepsilon^{t_0})'(t) \cdot L_{z'}(t, q(t), q'(t))] dt$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \delta F(q, h_\varepsilon^{t_0}) &= \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0} [h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t)) + 1 \cdot L_{z'}(t, q(t), q'(t))] dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} [h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t)) + (-1) \cdot L_{z'}(t, q(t), q'(t))] dt \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\delta F(q, h_\varepsilon^{t_0}) &= \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} [L_{z'}(t, q(t), q'(t)) + h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t))] dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} [L_{z'}(t, q(t), q'(t)) - h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t))] dt \\ &= I_1 - I_2 < 0\end{aligned}$$

contradiendo la suposición de que q es mínimo de F .

Si q' fuese positivo a izquierda de t_0 y negativo a derecha de t_0 , la demostración sería análoga tomando $\delta F(q, -h_\varepsilon^{t_0})$.

ii) Inmediato por (i).

iii) Supongamos que $q'(t_0-) < q'(t_0+)$ (Si suponemos que $q'(t_0-) > q'(t_0+)$, la demostración sería análoga). Pueden presentarse los casos siguientes:

- a) $q'(t_0-) < 0 < q'(t_0+)$
- b) $q'(t_0+) q'(t_0-) > 0$
- c) $q'(t_0+) = 0 > q'(t_0-)$
- d) $q'(t_0+) > 0 = q'(t_0-)$

a) contradice el ya demostrado apartado (i).

A (b) no le afecta la discontinuidad del lagrangiano y, por tanto, q' es continua en t_0 por el estricto crecimiento de $L_{z'}(t_0, z_0, \cdot)$.

Para (c), en virtud del apartado (i), existirá $\varepsilon > 0$ de modo que $q'(x) = 0$ en $[t_0, t_0 + \varepsilon]$.

Podemos elegir ε de tal modo que $q'(x) < 0$ en $[t_0 - \varepsilon, t_0)$. En este caso

$$\delta^+ F(q, h_\varepsilon^{t_0}) = \int_0^T [h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t)) + (h_\varepsilon^{t_0})'(t) \cdot L_{z'}^+(t, q(t), q'(t))] dt$$

y, razonando de modo idéntico al apartado (i), tendremos que $\delta^+ F(q, h_\varepsilon^{t_0}) < 0$, lo que supone de nuevo una contradicción con el hecho de ser q mínimo de F .

Por último, para (d), en virtud del apartado (i), existirá $\varepsilon > 0$ de modo que $q'(x) = 0$ en $[t_0 - \varepsilon, t_0]$.

Podemos elegir ε de tal modo que $q'(x) < 0$ en $(t_0, t_0 + \varepsilon]$. En este caso

$$\delta^+ F(q, -h_\varepsilon^{t_0}) = \int_0^T [-h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t)) - (h_\varepsilon^{t_0})'(t) \cdot L_{z'}^-(t, q(t), q'(t))] dt$$

donde, razonando de modo idéntico al apartado (i), tendremos de nuevo la contradicción $\delta^+ F(q, -h_\varepsilon^{t_0}) < 0$. ■

Obsérvese que este resultado tiene una interpretación muy clara en términos de centrales de bombeo: las centrales de bombeo, en su funcionamiento óptimo, nunca pasan bruscamente de generar potencia a bombear agua o viceversa, sino que realizan una transición suave. Antes del paso, permanecen un cierto tiempo sin actividad.

A continuación, planteamos y estudiamos el problema considerando restricciones en el conjunto de funciones admisibles, restricciones que hacen que el problema represente más fielmente la realidad del problema hidrotérmico.

5.6. LAGRANGIANO NO REGULAR Y RESTRICCIONES

Hasta ahora hemos considerado el problema hidrotérmico que consta de una central térmica (equivalente térmica) y una central hidráulica de bombeo, de la forma más general posible⁴: funciones admisibles pertenecientes a $\widehat{C}^1[0, T]$ con las restricciones de volumen disponible. Si bien es cierto que permitimos que los caudales tengan valores negativos (zona de bombeo de la central hidráulica), es obvio que, por razones naturales (disponibilidad de agua) y técnicas (capacidad de las centrales), la central hidráulica tendrá unos límites tanto en generación como en bombeo. Tomaremos como límite inferior⁵ H_{\min} el mayor consumo de la central hidráulica (máxima capacidad de bombeo) y la función $H_s(t) = \min \{H_{\max}, P_d(t)\}$, siendo H_{\max} la máxima capacidad de producción de la central, como límite superior para $H(t, z(t), z'(t))$ en cualquier instante. Así,

$$H_{\min} \leq H(t, z(t), z'(t)) \leq H_s(t)$$

En estas condiciones, el problema es minimizar el funcional

$$F(z) = \int_0^T L(t, z(t), z'(t)) dt$$

con $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ función de clase C^0 , siendo $L_z(\cdot, \cdot, \cdot)$ de clase C^0 y $L_{z'}(t, z, \cdot)$ función continua a trozos, de la forma

$$L(t, z(t), z'(t)) = \Psi(P_d(t) - H(t, z(t), z'(t)))$$

dentro del conjunto

$$\Theta_b := \{z \in \widehat{C}^1[0, T] \mid z(0) = 0, z(T) = b, H_{\min} \leq H(t, z(t), z'(t)) \leq H_s(t)\}$$

Supondremos el cumplimiento de las mismas propiedades que anteriormente a las funciones $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $H : \Omega_H \subset [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, en el interior de sus dominios de definición. Ψ es estrictamente creciente y estrictamente convexa y seguimos considerando la positividad estricta de $H_{z'}$ y el carácter estrictamente creciente de $L_{z'}$ con respecto a z' , y supondremos⁶ además que $H_z(t, z(t), 0) = 0$.

Pretendemos establecer las condiciones necesarias de mínimo para este problema con lagrangiano no regular y restricciones en las funciones admisibles, haciendo uso, para ello, de la función de coordinación, $\mathbb{Y}_q(t)$, de $q \in \Theta_b$.

Obsérvese que para el problema planteado, excepto en aquellos valores de z' para los cuales $L_{z'}(t, z, \cdot)$ no es continua, seguirá siendo válido el primer teorema de coordinación, por un lado, para todos aquellos valores que hacen que $0 \leq H(t, z(t), z'(t)) \leq$

⁴Obtenemos resultados de carácter general, aplicables a otros problemas de características similares.

⁵Suponemos $H_{\min} < 0$ pues cuando se produce el bombeo, obviamente, se está descargando un caudal negativo y se está generando una potencia también negativa.

⁶Si el caudal es nulo no se producirá variación en el volumen turbinado, $H_z(t, z(t), 0) = 0$.

$H_s(t)$ (la central produzca energía) y, de forma análoga, para todos aquellos valores que hacen que $H_{\min} \leq H(t, z(t), z'(t)) \leq 0$ (la central consuma energía al estar bombeando).

Teorema 5.5 (Cuarto teorema de coordinación) *Si q es mínimo del funcional*

$$F(z) = \int_0^T L(t, z(t), z'(t)) dt$$

siendo $L(t, \cdot, \cdot)$ localmente Lipschitziana, $L(\cdot, z, z')$ medible y $L_{z'}(t, z, \cdot)$ continua a trozos, en el conjunto

$$\Theta_b := \{z \in \widehat{C}^1[0, T] \mid z(0) = 0, z(T) = b, H_{\min} \leq H(t, z(t), z'(t)) \leq H_s(t)\},$$

entonces $\exists K \in \mathbb{R}^+$ tal que:

i) Si $q'(t)$ es punto de discontinuidad de $L_{z'}(t, q(t), \cdot)$,

$$\mathbb{Y}_q^+(t) \leq K \leq \mathbb{Y}_q^-(t).$$

ii) Si $L_{z'}(t, q(t), \cdot)$ es continua en $q'(t)$,

$$\mathbb{Y}_q(t) \text{ es } \begin{cases} \leq K & \text{si } H(t, q(t), q'(t)) = H_{\min} \\ = K & \text{si } H_{\min} < H(t, q(t), q'(t)) < H_s(t) \\ \geq K & \text{si } H(t, q(t), q'(t)) = H_s(t). \end{cases}$$

Demostración.

Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $L_{z'}(t, z(t), \cdot)$ es continua con un solo punto de discontinuidad en $z' = 0$ y, por comodidad, supondremos que hay un único intervalo $[t_1, t_2]$ con $t_1, t_2 \in (0, T)$ donde $z' = 0$ (es decir, la central hidráulica permanece parada en el intervalo $[t_1, t_2]$). Es obvio que $q(t) = q(t_1) \quad \forall t \in [t_1, t_2]$.

Consideramos las distintas situaciones que pueden presentarse en el intervalo $[0, T] = [0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup [t_2, T]$:

- a) Generación - Parada - Generación: donde $L_{z'}^+(t_1, q(t_1), 0) = L_{z'}^+(t_2, q(t_2), 0)$,
- b) Generación - Parada - Bombeo: donde $L_{z'}^+(t_1, q(t_1), 0) = L_{z'}^-(t_2, q(t_2), 0)$,
- c) Bombeo - Parada - Generación: donde $L_{z'}^-(t_1, q(t_1), 0) = L_{z'}^+(t_2, q(t_2), 0)$, y
- d) Bombeo - Parada - Bombeo: donde $L_{z'}^-(t_1, q(t_1), 0) = L_{z'}^-(t_2, q(t_2), 0)$.

Es fácil ver que se cumplen las expresiones anteriores en cada uno de los casos teniendo en cuenta el tercer teorema de coordinación. Así, para el caso (a), en t_1 ,

$$\int_0^{t_1} L_z(\tau, q(\tau), q'(\tau)) d\tau - L_{z'}^+(t_1, q(t_1), 0) = K$$

en t_2 ,

$$\int_0^{t_2} L_z(\tau, q(\tau), q'(\tau)) d\tau - L_{z'}^+(t_2, q(t_2), 0) = K$$

y del hecho de que $H_z(t, z(t), 0) = 0$ se obtiene $L_z(t, z(t), 0) = 0$, de donde

$$\int_{t_1}^{t_2} L_z(\tau, q(\tau), q'(\tau)) d\tau = 0$$

y, por tanto, $L_{z'}^+(t_1, q(t_1), 0) = L_{z'}^+(t_2, q(t_2), 0)$. Razonando de forma análoga se obtienen el resto de expresiones.

Además, $\forall t \in [t_1, t_2]$, $z'(t) = 0$ es punto de discontinuidad de $L_{z'}(t, q(t), \cdot)$ y, de nuevo, por el tercer teorema de coordinación

$$\int_0^t L_z(\tau, q(\tau), q'(\tau)) d\tau - L_{z'}^+(t, q(t), 0) \leq K \leq \int_0^t L_z(\tau, q(\tau), q'(\tau)) d\tau - L_{z'}^-(t, q(t), 0)$$

y, como

$$K = \int_0^{t_1} L_z(\tau, q(\tau), q'(\tau)) d\tau - L_{z'}^+(t_1, q(t_1), 0)$$

$$\int_{t_1}^t L_z(\tau, q(\tau), q'(\tau)) d\tau = 0,$$

deducimos que para los casos (a) y (b) se verifica

$$L_{z'}^-(t, q(t), 0) \leq L_{z'}^+(t_1, q(t_1), 0) \leq L_{z'}^+(t, q(t), 0) \quad (5)$$

Razonando de forma análoga obtenemos que para los casos (c) y (d) se verifica

$$L_{z'}^-(t, q(t), 0) \leq L_{z'}^-(t_1, q(t_1), 0) \leq L_{z'}^+(t, q(t), 0) \quad (6)$$

Por otro lado, en $[0, t_1]$ y $[t_2, T]$ estamos en una zona libre de generación o bombeo, donde únicamente podrán aparecer intervalos con restricciones mínimas o máximas en las potencias de generación hidráulica. Se verificará, por tanto, el primer teorema de coordinación:

$$\mathbb{Y}_q(t) \text{ es } \begin{cases} \leq K & \text{si } H(t, q(t), q'(t)) = H_{\text{mín}} \\ = K & \text{si } H_{\text{mín}} < H(t, q(t), q'(t)) < H_s(t) \\ \geq K & \text{si } H(t, q(t), q'(t)) = H_s(t) \end{cases}$$

Realizamos la demostración del teorema para el caso (a):

En particular, del primer teorema de coordinación, obtenemos para t_1 que

$$K = -L_{z'}^+(t_1, q(t_1), q'(t_1)) \cdot \exp \left[- \int_0^{t_1} \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}^+(s, q(s), q'(s))} ds \right]$$

y para t_2

$$K = -L_{z'}^+(t_2, q(t_2), q'(t_2)) \cdot \exp \left[- \int_0^{t_2} \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}^+(s, q(s), q'(s))} ds \right]$$

Para todo $t \in [t_1, t_2]$ por (5) se verifica que

$$\begin{aligned} & L_{z'}^-(t, q(t), 0) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}^-(s, q(s), q'(s))} ds \right] \leq \\ & \leq L_{z'}^+(t_1, q(t_1), 0) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}^+(s, q(s), q'(s))} ds \right] \leq \\ & \leq L_{z'}^+(t, q(t), 0) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}^+(s, q(s), q'(s))} ds \right]. \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^t \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}^+(s, q(s), q'(s))} ds = \int_0^{t_1} \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}^+(s, q(s), q'(s))} ds + \int_{t_1}^t \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}^+(s, q(s), q'(s))} ds$$

y $\int_{t_1}^t \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}^+(s, q(s), q'(s))} ds = 0$, entonces

$$L_{z'}^+(t_1, q(t_1), 0) \cdot \exp \left[- \int_0^{t_1} \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}^+(s, q(s), q'(s))} ds \right] = -K,$$

de donde

$$\begin{aligned} & L_{z'}^-(t, q(t), 0) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}^-(s, q(s), q'(s))} ds \right] \leq -K \leq \\ & \leq L_{z'}^+(t, q(t), 0) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}^+(s, q(s), q'(s))} ds \right]. \end{aligned}$$

Además, como $\forall t \in [t_1, t_2]$, $q'(t) = 0$

$$\begin{aligned} & L_{z'}^-(t, q(t), q'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}^-(s, q(s), q'(s))} ds \right] \leq -K \leq \\ & \leq L_{z'}^+(t, q(t), q'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}^+(s, q(s), q'(s))} ds \right] \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\mathbb{Y}_q^+(t) \leq K \leq \mathbb{Y}_q^-(t).$$

La demostración para el resto de los casos sería análoga, empleando también la desigualdad (5) en el caso (b) y la (6) en los casos (c) y (d).

Si el intervalo de parada contiene a 0 o a T la demostración sería similar, teniendo en cuenta que

$$\int_{t_1}^{t_2} L_z(\tau, q(\tau), q'(\tau)) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{H_z(s, q(s), q'(s))}{H_{z'}(s, q(s), q'(s))} ds = 0.$$

■

A partir de este teorema y por un camino bastante simple procederemos, a continuación, a la búsqueda del mínimo del funcional, mediante la construcción de las extremales q_K .

5.6.1. Construcción de la solución

Se tratará de encontrar para cada K , la función q_K que satisfaga las ecuaciones del teorema 5.5 y, de entre ellas, la que dé lugar a una función admisible, $q_K \in \Theta_b$. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $L_{z'}(t, z, \cdot)$ es continua con un solo punto de discontinuidad en $z' = 0$. En general, la configuración de q'_K no puede realizarse en todo el intervalo $[0, T]$ de una sola vez. La construcción necesariamente se llevará a cabo formando y encadenando sucesivamente los arcos de extremal donde o bien se satisface la ecuación de Euler (arcos de extremal interiores), o bien $q'(t) = 0$ (la central térmica genera toda la potencia demandada), o bien $H(t, q(t), q'(t)) = H_s(t)$ (la central hidráulica está a su potencia máxima de generación o genera toda la potencia demandada), o bien $H(t, q(t), q'(t)) = H_{\min}$ (la central hidráulica está a su potencia máxima de bombeo), hasta completar todo el intervalo $[0, T]$.

Consideremos m el caudal necesario en el instante inicial $t = 0$ para que la central alcance su máxima capacidad de bombeo: $H(0, 0, m) = H_{\min}$ y denotemos por M el caudal necesario en el instante inicial $t = 0$ para que la central hidráulica alcance su máxima capacidad de generación, es decir, $H(0, 0, M) = H_s(0)$. Denotemos también por

$$K_m = -L_{z'}(0, 0, m) \quad \text{y} \quad K_M = -L_{z'}(0, 0, M)$$

las constantes de coordinación respectivas para esos caudales iniciales.

Observemos que $\forall x \in (m, M)$ (con la hipótesis $L_{z'z'}(t, z, z') > 0$) tenemos que

$$K_M < -L_{z'}(0, 0, x) < K_m.$$

Procederemos de la forma siguiente:

I) Para cada K , construimos q_K . Concatenación de arcos de extremal:

Primer arco] Dada K , distinguimos los siguientes casos:

i) Si $-L_{z'}^+(0, 0, 0) \leq K \leq -L_{z'}^-(0, 0, 0)$ (zona de parada de la central hidráulica), tomamos $q'_K(t) = 0$ en el intervalo maximal $[0, t_1]$, donde $\forall t \in [0, t_1]$ se satisface

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}_{q_K}^+(t) &= -L_{z'}^+(t, q_K(t), q'_K(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, q_K(s), q'_K(s))}{H_{z'}^+(s, q_K(s), q'_K(s))} ds \right] \leq K \\ K &\leq -L_{z'}^-(t, q_K(t), q'_K(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, q_K(s), q'_K(s))}{H_{z'}^-(s, q_K(s), q'_K(s))} ds \right] = \mathbb{Y}_{q_K}^-(t). \end{aligned}$$

ii) Si $-L_{z'}^+(0, 0, 0) > K$ (zona de generación hidráulica) y $K_M < K$, existe solución positiva $q'_K(0)$ para la ecuación $-L_{z'}(0, 0, q'_K(0)) = K$. En este caso construimos un arco de extremal interior, $q_K(t)$, solución de la ecuación de Euler en el intervalo maximal $[0, t_1]$ (con $q_K(0) = 0$), donde $\forall t \in [0, t_1]$ se satisface $q'_K(t) > 0$ y

$$K = \mathbb{Y}_{q_K}(t) = -L_{z'}(t, q_K(t), q'_K(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, q_K(s), q'_K(s))}{H_{z'}(s, q_K(s), q'_K(s))} ds \right].$$

iii) Si $-L_{z'}^+(0, 0, 0) > K$ (zona de generación hidráulica) y $K \leq K_M$, tomaremos $q_K(t) = w(t)$, la solución de la ecuación diferencial $H(t, w(t), w'(t)) = H_s(t)$ con $w(0) = 0$ en el intervalo maximal $[0, t_1]$, donde $\forall t \in [0, t_1]$ se verifica que

$$K \leq \mathbb{Y}_\omega(t) = -L_{z'}(t, \omega(t), \omega'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, \omega(s), \omega'(s))}{H_{z'}(s, \omega(s), \omega'(s))} ds \right].$$

iv) Si $-L_{z'}^-(0, 0, 0) < K$ (zona de bombeo) y $K < K_m$, existe solución negativa $q'_K(0)$ para la ecuación $-L_{z'}(0, 0, q'_K(0)) = K$. En este caso construimos un arco de extremal interior, $q_K(t)$, solución de la ecuación de Euler en el intervalo maximal $[0, t_1]$ (con $q_K(0) = 0$), donde $\forall t \in [0, t_1]$ se satisface $q'_K(t) < 0$ y

$$K = \mathbb{Y}_{q_K}(t) = -L_{z'}(t, q_K(t), q'_K(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, q_K(s), q'_K(s))}{H_{z'}(s, q_K(s), q'_K(s))} ds \right].$$

v) Si $-L_{z'}^-(0, 0, 0) < K$ (zona de bombeo) y $K \geq K_m$, tomaremos $q_K(t) = w(t)$, la solución de la ecuación diferencial $H(t, w(t), w'(t)) = H_{\min}$ con $w(0) = 0$ en el intervalo maximal $[0, t_1]$, donde $\forall t \in [0, t_1]$ se verifica que

$$K \geq \mathbb{Y}_\omega(t) = -L_{z'}(t, \omega(t), \omega'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, \omega(s), \omega'(s))}{H_{z'}(s, \omega(s), \omega'(s))} ds \right].$$

Arco i-ésimo] Caben dos posibilidades:

A) Si $[t_{i-1}, t_i]$ es un intervalo maximal de parada o intervalo fronterizo de la central hidráulica, es decir, $q'_K(t) = 0$ ó $H(t, q_K(t), q'_K(t)) = H_s(t)$ ó $H(t, q_K(t), q'_K(t)) = H_{\min}$ en dicho intervalo, consideraremos el intervalo maximal $[t_i, t_{i+1}]$ que verifica que $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$K = -L_{z'}(t, \omega(t), \omega'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^{t_i} \frac{H_z(s, q_K(s), q'_K(s))}{H_{z'}(s, q_K(s), q'_K(s))} ds - \int_{t_i}^t \frac{H_z(s, \omega(s), \omega'(s))}{H_{z'}(s, \omega(s), \omega'(s))} ds \right],$$

siendo $\omega(t)$ un arco interior de la extremal, con $\omega(t_i) = q_K(t_i)$, satisfaciendo la ecuación de Euler en su dominio maximal $[t_i, t_{i+1}]$ y la ecuación anterior. Tomaremos $q_K(t) = \omega(t)$, $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$.

B) Si q_K tiene un arco interior en $[t_{i-1}, t_i]$, podemos distinguir, a su vez, tres casos:

i) Si $H(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i)) = H_{\min}$, consideraremos el intervalo maximal $[t_i, t_{i+1}]$, que verifica que $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$K \geq -L_{z'}(t, \omega(t), \omega'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^{t_i} \frac{H_z(s, q_K(s), q'_K(s))}{H_{z'}(s, q_K(s), q'_K(s))} ds - \int_{t_i}^t \frac{H_z(s, \omega(s), \omega'(s))}{H_{z'}(s, \omega(s), \omega'(s))} ds \right],$$

siendo $\omega(t)$ una solución de la ecuación diferencial

$$H(t, \omega(t), \omega'(t)) = H_{\min}, \text{ con } \omega(t_i) = q_K(t_i).$$

En este caso tomaremos $q_K(t) = \omega(t)$, $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$.

ii) Si $H(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i)) = H_s(t_i)$, consideraremos el intervalo maximal $[t_i, t_{i+1}]$, que verifica que $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$K \leq -L_{z'}(t, \omega(t), \omega'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^{t_i} \frac{H_z(s, q_K(s), q'_K(s))}{H_{z'}(s, q_K(s), q'_K(s))} ds - \int_{t_i}^t \frac{H_z(s, \omega(s), \omega'(s))}{H_{z'}(s, \omega(s), \omega'(s))} ds \right],$$

siendo $\omega(t)$ una solución de la ecuación diferencial

$$H(t, \omega(t), \omega'(t)) = H_s(t), \text{ con } \omega(t_i) = q_K(t_i).$$

En este caso tomaremos $q_K(t) = \omega(t)$, $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$.

iii) En otro supuesto, consideraremos el intervalo maximal $[t_i, t_{i+1}]$, que verifica $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\begin{aligned} & -L_{z'}^+(t, \omega(t), \omega'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^{t_i} \frac{H_z(s, q_K(s), q'_K(s))}{H_{z'}(s, q_K(s), q'_K(s))} ds - \int_{t_i}^t \frac{H_z(s, \omega(s), \omega'(t))}{H_{z'}^+(s, \omega(s), \omega'(t))} ds \right] \leq K \\ K & \leq -L_{z'}^-(t, \omega(t), \omega'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^{t_i} \frac{H_z(s, q_K(s), q'_K(s))}{H_{z'}(s, q_K(s), q'_K(s))} ds - \int_{t_i}^t \frac{H_z(s, \omega(s), \omega'(t))}{H_{z'}^-(s, \omega(s), \omega'(t))} ds \right], \end{aligned}$$

con $\omega(t_i) = q_K(t_i)$, satisfaciendo la ecuación anterior y $\omega'(t) = 0$ en el el intervalo maximal $[t_i, t_{i+1}]$. Tomaremos $q_K(t) = \omega(t)$, $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$.

II) Determinamos K , de forma análoga a la realizada en los casos anteriores, tal que $q_K \in \Theta_b$.

5.6.2. Cálculo aproximado de la solución

Este proceso es relativamente simple de implementar, con el uso de una versión discretizada de las ecuaciones del teorema 5.5 en los instantes $t_j = T \cdot j/n$, con $j = 0, 1, \dots, n-1$. Para la construcción computacional de q_K utilizaremos, según los casos, las ecuaciones discretizadas siguientes en los instantes t_j :

Si $q'(t_j) = 0$,

$$-L_{z'}^+(t_j, z(t_j), z'(t_j)) \cdot \exp \left[- \frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, z(t_i), z'(t_i))}{H_{z'}^+(t_i, z(t_i), z'(t_i))} \right] \leq K$$

$$K \leq -L_{z'}^-(t_j, z(t_j), z'(t_j)) \cdot \exp \left[- \frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, z(t_i), z'(t_i))}{H_{z'}^-(t_i, z(t_i), z'(t_i))} \right].$$

Si $q'(t_j) \neq 0$ y $H_{\min} < H(t, q(t_j), q'(t_j)) < H_s(t_j)$

$$-L_{z'}(t, z(t_j), z'(t_j)) \cdot \exp \left[- \frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, z(t_i), z'(t_i))}{H_{z'}(t_i, z(t_i), z'(t_i))} \right] = K.$$

Si $q'(t_j) \neq 0$ y $H(t, q(t_j), q'(t_j)) = H_s(t_j)$

$$-L_{z'}(t, z(t_j), z'(t_j)) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, z(t_i), z'(t_i))}{H_{z'}(t_i, z(t_i), z'(t_i))} \right] \geq K.$$

Si $q'(t_j) \neq 0$ y $H_{\min} = H(t, q(t_j), q'(t_j))$

$$-L_{z'}(t, z(t_j), z'(t_j)) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, z(t_i), z'(t_i))}{H_{z'}(t_i, z(t_i), z'(t_i))} \right] \leq K.$$

El algoritmo que proponemos se basa en la construcción, para cada K , de una sucesión doble $(q_K(t_i), q'_K(t_i))$, definida por recurrencia, de la manera siguiente:

i) $q_K(0) = 0$ (volumen inicial).

ii) $q'_K(0)$ (caudal inicial) que determinaremos en función de los casos siguientes:

a) Si $-L_{z'}^+(0, 0, 0) \leq K \leq -L_{z'}^-(0, 0, 0)$, tomaremos $q'_K(0) = 0$.

b) Si $-L_{z'}^+(0, 0, 0) > K$ y $K_M < K$, entonces determinaremos $q'_K(0)$ tal que se verifique la ecuación:

$$K = -L_{z'}(0, 0, q'_K(0)).$$

c) Si $-L_{z'}^+(0, 0, 0) > K$ y $K \leq K_M$, entonces determinaremos $q'_K(0)$ tal que se verifique la ecuación:

$$H_s(0) = H(0, 0, q'_K(0)).$$

d) Si $-L_{z'}^-(0, 0, 0) < K$ y $K < K_m$, entonces determinaremos $q'_K(0)$ tal que se verifique la ecuación:

$$K = -L_{z'}(0, 0, q'_K(0)).$$

e) Si $-L_{z'}^-(0, 0, 0) < K$ y $K \geq K_m$, entonces determinaremos $q'_K(0)$ tal que se verifique la ecuación:

$$H_{\min} = H(0, 0, q'_K(0)).$$

iii) $q_K(t_i) = q_K(t_{i-1}) + \frac{T}{n} q'_K(t_{i-1})$ (acumulador de caudales).

iv) Distinguimos dos casos en función de que $q'_K(t_j)$ pueda ser igual o distinto a cero.

a) Si tomando $q'_K(t_j) = 0$ se verifica

$$\begin{aligned} & -L_{z'}^+(t_j, q_K(t_j), 0) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))}{H_{z'}^+(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))} \right] \leq K \\ & \leq -L_{z'}^-(t_j, q_K(t_j), 0) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))}{H_{z'}^-(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))} \right], \end{aligned}$$

efectivamente admitiremos que, en t_j , $q'_K(t_j)$ sea 0.

b) Si, por el contrario, tomando $q'_K(t_j) = 0$ no se verifica la expresión anterior, caben varias posibilidades:

1^a) Si

$$K < -L_{z'}^+(t_j, q_K(t_j), 0) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))}{H_{z'}^+(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))} \right]$$

y existe X tal que se verifica

$$K = -L_{z'}(t, q_K(t_j), X) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))}{H_{z'}(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))} \right],$$

tomamos $q'_K(t_j) = X$.

2^a) Si

$$K < -L_{z'}^+(t_j, q_K(t_j), 0) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))}{H_{z'}^+(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))} \right]$$

y no existe X verificando la igualdad del apartado anterior, sino que

$$K < -L_{z'}(t, q_K(t_j), X) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))}{H_{z'}(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))} \right],$$

tomaremos $q'_K(t_j)$ como aquel que satisface la siguiente igualdad:

$$H(t_j, q_K(t_j), q'_K(t_j)) = H_s(t_j).$$

3^a) Si

$$K > -L_{z'}^-(t_j, q_K(t_j), 0) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))}{H_{z'}^-(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))} \right]$$

y existe X tal que se verifica

$$K = -L_{z'}(t, q_K(t_j), X) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))}{H_{z'}(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))} \right],$$

tomamos $q'_K(t_j) = X$.

4^a) Si

$$K > -L_{z'}^-(t_j, q_K(t_j), 0) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))}{H_{z'}^-(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))} \right]$$

y no existe X verificando la igualdad del tercer apartado, sino que

$$K > -L_{z'}(t, q_K(t_j), q'_K(t_j)) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))}{H_{z'}(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))} \right],$$

tomaremos $q'_K(t_j)$ como aquel que satisface la siguiente igualdad:

$$H(t_j, q_K(t_j), q'_K(t_j)) = H_{\text{mín}}.$$

Observación 6 En los arcos correspondientes a puntos de discontinuidad de

$L_{z'}(t, q_K(t), \cdot)$:

a) La condición

$$-L_{z'}^+(t, q_K(t), q'_K(t)) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))}{H_{z'}(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))} \right] \leq K$$

es equivalente a la no existencia de solución positiva, X , en el instante t , de la ecuación

$$-L_{z'}(t, q_K(t), X) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))}{H_{z'}(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))} \right] = K,$$

siendo X la incógnita.

No hay más que tener en cuenta el carácter estrictamente creciente de $L_{z'}$ con respecto a z' , si existiera X tal que $q'_K(t) = 0 < X$, necesariamente

$$L_{z'}(t, q_K(t), q'_K(t)) < L_{z'}(t, q_K(t), X).$$

b) La condición

$$K \leq -L_{z'}^-(t, q_K(t), q'_K(t)) \cdot \exp \left[-\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))}{H_{z'}(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))} \right]$$

es equivalente a la no existencia de solución negativa, X , en el instante t , de la ecuación

$$-L_{z'}(t, q_K(t), X) \cdot \exp \left[\frac{T}{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{H_z(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))}{H_{z'}(t_i, q_K(t_i), q'_K(t_i))} \right] = K.$$

De nuevo, por el carácter estrictamente creciente de $L_{z'}$ con respecto a z' , si existiera X tal que $X < q'_K(t) = 0$, necesariamente

$$L_{z'}(t, q_K(t), X) < L_{z'}(t, q_K(t), q'_K(t)).$$

Por tanto, si se verifican las dos desigualdades, forzosamente estamos en una zona de parada de la central hidráulica.

Obsérvese que en los instantes donde los valores obtenidos para z y z' violen las restricciones mínimas y máximas de capacidad de bombeo y generación respectivamente de la central, se impondrá a la solución mantenerse en la frontera hasta que se den las condiciones para su abandono, y en los arcos correspondientes a puntos de discontinuidad de $L_{z'}(t, q_K(t_j), \cdot)$ estamos en una zona de parada de la central hidráulica. Para la programación del algoritmo se tendrán en cuenta las observaciones 4, 5 y 6 ya realizadas.

5.7. EJEMPLO

Hemos elaborado un programa con el paquete Mathematica que resuelve este problema de optimización, y la solución puede ser construida de forma simple teniendo en cuenta el teorema 5.1 y el método desarrollado en la sección anterior. Mostramos su aplicación a un problema hidrotérmico que consta de ocho centrales de la red térmica Asturiana y de una central hidráulica de bombeo de carga variable.

Los datos de las centrales térmicas son los representados en la tabla I del ejemplo 3.1, siendo las unidades de los coeficientes las ya reseñadas en este mismo ejemplo y la equivalente minimizadora, $\Upsilon(x)$, la obtenida en el apartado (c) para funciones de costo incorporando pérdidas de transmisión del sistema con restricciones en sus potencias generadas.

Consideraremos un modelo de central hidráulica de carga variable cuya generación de potencia P_h variará dependiendo de la positividad o negatividad (bombeo) del caudal descargado. La potencia generada por la central hidráulica P_h dependerá de $z(t)$ y $z'(t)$ y la potencia consumida durante el bombeo será una función lineal de la cantidad de agua bombeada ($M \cdot z'(t)$). Así, podemos expresar la generación hidráulica como la función definida a trozos por:

$$P_h(t, z(t), z'(t)) := \begin{cases} A(t) \cdot z'(t) - B \cdot z(t) \cdot z'(t) & \text{si } z'(t) > 0 \\ M \cdot z'(t) & \text{si } z'(t) \leq 0 \end{cases}$$

donde $A(t)$ y B son los coeficientes que dependen de las características del embalse

$$A(t) := \frac{B_y}{G}(S_0 + t \cdot i); \quad B = \frac{B_y}{G}.$$

Así, la función de generación hidráulica efectiva es:

$$H(t, z(t), z'(t)) := \begin{cases} P_h(t, z(t), z'(t)) - b_{ll}P_h^2(t, z(t), z'(t)) & \text{si } z'(t) > 0 \\ P_h(t, z(t), z'(t)) & \text{si } z'(t) \leq 0, \end{cases}$$

donde b_{ll} es el coeficiente de pérdidas.

Representamos en la tabla siguiente los datos relativos a la central hidráulica

Tabla I: Datos de la central hidráulica.

Eficiencia G ($m^4/h.Mw$):	526315
Restricción de volumen b (m^3):	$1,1 \cdot 10^7$
Flujo natural de agua i (m^3/h):	$3,1313 \cdot 10^5$
Coefficiente de pérdidas b_{ll} ($1/Mw$):	0,00015
Volumen inicial S_0 (m^3):	$200 \cdot 10^8$
Coefficiente B_y (m^{-2}):	$149,5 \cdot 10^{-11}$
Potencia máxima $P_{m\acute{a}x}$	70

Consideramos, en primer lugar, $M = M_1 = 59,0825 \cdot 10^{-6}$ ($h.Mw/m^3$), que representa la potencia consumida por unidad de agua bombeada.

El intervalo de optimización es $[0, 24]$, con una discretización de $24 \cdot 4$ subintervalos y utilizamos el método de la secante para determinar el valor de K para el cual $q_K(T) - b = 0$. En 3 iteraciones:

$$|q_K(T) - b| < 10^{-5} (m^3)$$

para $K = 1505,602956057 \cdot 10^{-6}$.

La figura 5.2 representa la potencia térmica óptima P_{te} (Mw) y la potencia demandada P_d (Mw) y la figura 5.3 representa la potencia óptima de la central hidráulica P_h (Mw).

Obsérvese que la potencia térmica óptima permanece constante en todos los instantes en que la central hidráulica está bombeando situación en la que se verifican las hipótesis de la proposición 5.2.

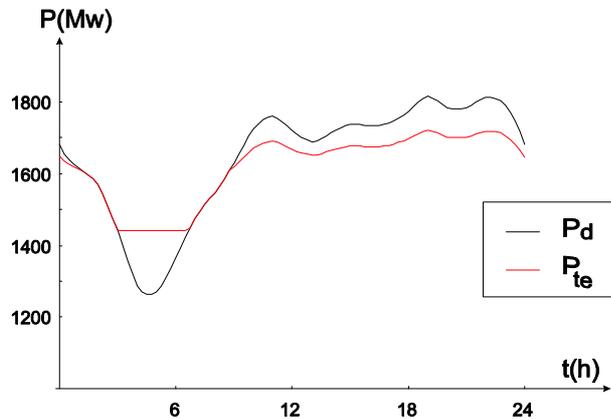


Figura 5.2. Potencia demandada $P_d(t)$ y potencia térmica óptima $P_{te}(t)$.

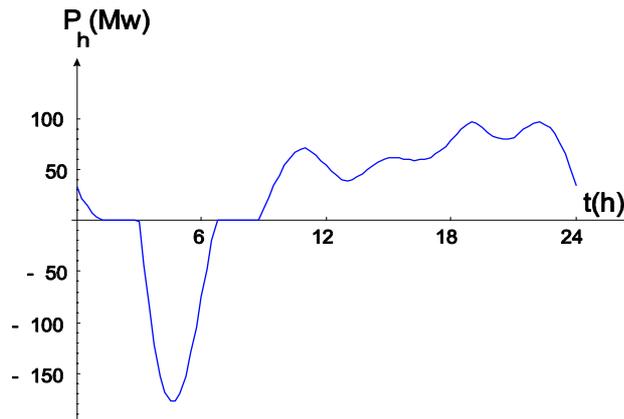


Figura 5.3. Potencia hidráulica óptima.

A continuación, planteamos la optimización del mismo sistema hidrotérmico fijando una restricción de potencia máxima para la central hidráulica de 75 Mw. Obtenemos $K = 1502,867808946486 \cdot 10^{-6}$ en 6 iteraciones respetando la tolerancia establecida de 10^{-3} . Obsérvese que al imponer restricción máxima de generación en la central hidráulica se produce una disminución en la cantidad de agua bombeada.

Aportamos como dato que el máximo bombeo en este caso es el correspondiente a $-160,199 Mw$ mientras que en el caso libre es de $-176,735 Mw$.

Mostramos en las figuras 5.4 la solución óptima de la central hidráulica obtenida.

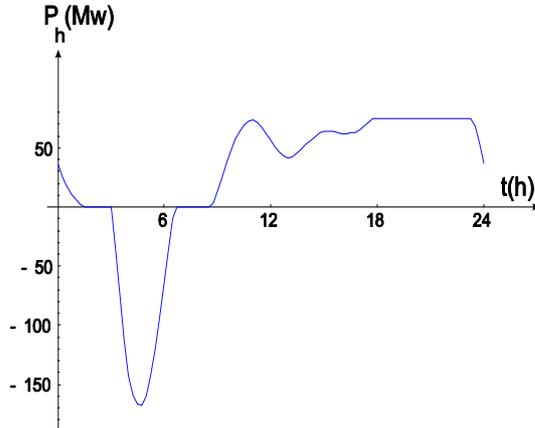


Figura 5.4. Potencia hidráulica óptima ($P_{m\acute{a}x} = 75$).

A continuación, con el fin de mostrar el comportamiento de la central hidráulica en función del aumento del costo al bombear agua, hemos desarrollado el mismo ejemplo tomando $M = M_2 = 60,7868 \cdot 10^{-6}$. Presentamos, en la figura 5.5, la solución óptima de la central hidráulica en este caso.

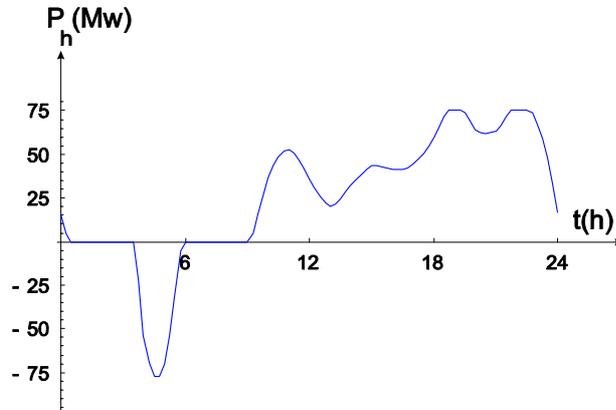


Figura 5.5. Potencia hidráulica óptima para M_2 .

Obsérvese como varía (figuras 5.4 y 5.5) el intervalo de transición suave (teorema 5.4) al considerar valores diferentes de M : cuanto mayor es M , más largo es el intervalo de parada de la central.

Para finalizar en la tabla siguiente se reseñan los costos de la solución óptima en cada uno de los casos considerados.

Tabla II. Costo de la solución óptima.

M_1 y $P_{m\acute{a}x}$ libre	M_1 y $P_{m\acute{a}x} = 75$	M_2 y $P_{m\acute{a}x} = 75$
1103780 €	1103790 €	1103950 €

Capítulo 6

PROBLEMA MULTIDIMENSIONAL

6.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo abordamos el estudio de los sistemas que constan de varias centrales hidráulicas. El problema de optimización de un sistema hidrotérmico, cuando son varias las centrales hidráulicas, es muy complejo, téngase en cuenta, que el problema variacional asociado está ligado a la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno.

Grau, en [72], sugirió la utilización de un algoritmo inspirado en el método del descenso coordinado cíclico y demostró su convergencia asumiendo importantes simplificaciones. El procedimiento consiste en resolver, bajo ciertas condiciones, el problema de optimización de un sistema hidrotérmico con n centrales hidráulicas, $H_n - T_1$, como límite de una sucesión de problemas con una única central hidráulica, $H_1 - T_1$.

En este capítulo, retomando esta idea, hemos realizado una nueva y más general demostración de la convergencia del citado algoritmo utilizando una adecuada adaptación del teorema global de convergencia de Zangwill [?]. Asimismo, se propone un modo de acelerar la convergencia del algoritmo utilizando una técnica inspirada en el método de Gauss-Southwell para lo cual se introduce un concepto sustitutorio al del gradiente que hemos denominado desajuste.

Para la resolución de cada uno de los problemas $H_1 - T_1$, utilizaremos los algoritmos desarrollados en los capítulos precedentes.

Finalmente, presentamos la resolución de problemas reales de optimización hidrotérmica con los que se evidencia la potencia del algoritmo propuesto, implementado con el programa Mathematica.

6.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el capítulo 2, para m centrales térmicas y n hidráulicas, habíamos planteado el problema hidrotérmico generalizado H_n-T_m . En el capítulo siguiente se dieron las condiciones para poder, a partir de m centrales térmicas, construir la térmica equivalente. De este modo, el problema H_n-T_m fue sustituido por otro equivalente de la forma H_n-T_1 .

En esta situación, admitiremos la posibilidad de que el sistema hidráulico conste tanto de centrales de bombeo como de las que no tienen esta capacidad. Supongamos que de las n centrales hidráulicas las k primeras son de bombeo (lagrangiano no regular). En este caso, consideraremos, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, sin pérdida de generalidad, que la función $L_{z'_i}(t, \bar{\mathbf{z}}, z'_1, \dots, z'_{i-1}, \cdot, z'_{i+1}, \dots, z'_n)$ (continua a trozos) presenta una única discontinuidad en $z'_i = 0$ (zona de parada de la central hidráulica i -ésima). Denotaremos por S_i el conjunto de puntos donde $L_{z'_i}$ no es continua, es decir:

$$S_i := \{(t, \bar{\mathbf{z}}, z'_1, \dots, z'_{i-1}, 0, z'_{i+1}, \dots, z'_n) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{2n}\}$$

Bajo estas consideraciones, el problema hidrotérmico generalizado con restricciones de desigualdad para las potencias generadas consiste en la minimización del funcional

$$F(\bar{\mathbf{z}}) = \int_0^T L(t, \bar{\mathbf{z}}(t), \bar{\mathbf{z}}'(t)) dt$$

siendo $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ función de clase C^2 $\left([0, T] \times \mathbb{R}^{2n} - \bigcup_{i=1}^k S_i\right)$ y $L(\cdot, \cdot, \bar{\mathbf{z}}')$ función de clase $C^2([0, T] \times \mathbb{R}^{2n})$, de la forma

$$L(t, \bar{\mathbf{z}}(t), \bar{\mathbf{z}}'(t)) = \Psi(P_d(t) - H(t, \bar{\mathbf{z}}(t), \bar{\mathbf{z}}'(t)))$$

en el conjunto¹

$$\Theta := \{\bar{\mathbf{z}} \in (C^1[0, T])^n \mid \bar{\mathbf{z}}(0) = \bar{\mathbf{0}}, \bar{\mathbf{z}}(T) = \bar{\mathbf{b}}, H_{i \text{ mín}} \leq H_i(t, \bar{\mathbf{z}}(t), \bar{\mathbf{z}}'(t)) \leq H_{i \text{ máx}}\}.$$

La búsqueda del mínimo del problema planteado se hace, en los capítulos precedentes, en el conjunto de funciones admisibles $\widehat{C}^1[0, T]$. Sin embargo, como pudimos comprobar (transición suave) en el caso de problemas variacionales con restricciones y, como veremos en el capítulo siguiente (teorema 7.4.) para problemas con lagrangiano no regular, se obtiene que el mínimo, caso de existir, se alcanza en una función de clase C^1 , razón por la cual vamos a considerar en el conjunto Θ funciones admisibles sólo de este tipo.

Obsérvese, por otra parte, que el trabajar con centrales de bombeo supone admitir que los caudales pueden tomar valores negativos y, por tanto, $H_{i \text{ mín}}$ representará el máximo gasto de la central "i" cuando bombea.

¹Si consideramos el problema de Bolza, con

$$\Theta := \{\bar{\mathbf{z}} \in (C^1[0, T])^n \mid \bar{\mathbf{z}}(0) = \bar{\mathbf{0}}, \bar{\mathbf{z}}(T) = \bar{\mathbf{b}}, 0 \leq H_i(t, \bar{\mathbf{z}}(t), \bar{\mathbf{z}}'(t)) \leq H_{i \text{ máx}}\}$$

los desarrollos serían idénticos.

Consideraremos además las siguientes hipótesis:

- Supondremos que la función $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente y estrictamente convexa, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Consideraremos que $\forall \bar{\mathbf{q}} \in \Theta$:

$$H(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) = \sum_{i=1}^n H_i(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)), \text{ y}$$

$$\frac{\partial^2 H_i(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t))}{\partial z'_i \partial z'_j} = 0$$

siendo $H_i(\cdot, \cdot, \cdot)$ la función de generación hidráulica de la central i -ésima².

- Consideraremos que los caudales admisibles están uniformemente acotados. Para cada central hidráulica $i = 1, \dots, n$, $\exists N_i, M_i \in \mathbb{R}$ tales que $\forall \bar{\mathbf{z}} \in \Theta$:

$$N_i \leq z'_i(t) \leq M_i \quad \forall t \in [0, T]$$

- Supondremos que $L_{z'_i}(t, \bar{\mathbf{z}}, z'_1, \dots, z'_{i-1}, z'_{i+1}, \dots, z'_n)$ es estrictamente creciente con respecto a z'_i .

- Si $(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) \in S_i$, siendo $\bar{\mathbf{q}} = (q_1, \dots, q_n)$, entonces³ para cada $i = 1, \dots, n$,

$$H_{i \text{ mín}} \neq H_i(t, \bar{\mathbf{q}}(t), q'_1(t), \dots, q'_{i-1}(t), 0, q'_{i+1}(t), \dots, q'_n(t)) \neq H_{i \text{ máx}}$$

y

$$\frac{\partial H_i(t, \bar{\mathbf{z}}(t), z'_1(t), \dots, z'_{i-1}(t), 0, z'_{i+1}(t), \dots, z'_n(t))}{\partial z'_i} = 0$$

- Seguimos considerando la positividad estricta de

$$\frac{\partial H_i(t, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}')}{\partial z'_i}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

- Tomamos en Θ la topología con la cual las sucesiones convergentes son las sucesiones que convergen uniformemente así como también sus derivadas. Dicha topología es la inducida por la siguiente norma:

$$\|\bar{\mathbf{q}}\|^* := \max\{\|\bar{\mathbf{q}}\|_\infty, \|\bar{\mathbf{q}}'\|_\infty\} = \max\left\{\max_{i=1, \dots, n} \|q_i\|_\infty, \max_{i=1, \dots, n} \|q'_i\|_\infty\right\}$$

El algoritmo de resolución que vamos a proponer se basa en la obtención de la solución de un problema de tipo $H_n - T_1$, a partir de la resolución de una sucesión de problemas de tipo $H_1 - T_1$ que analizamos en el siguiente apartado.

²Obsérvese que, en términos de centrales hidráulicas, la nulidad de las derivadas parciales cruzadas significa que en el régimen de funcionamiento de la central i -ésima no influye el caudal del resto de las centrales.

³Suponemos, por simplificar, que en los momentos de máxima generación o bombeo no se producen discontinuidades de $L_{z'_i}$ y que, en los puntos de discontinuidad de $L_{z'_i}$, no hay variación de la función de generación-bombeo respecto del volumen.

6.2.1. Planteamiento para el caso uni-dimensional

Definición 6.1 Para cada $\bar{\mathbf{q}} = (q_1, \dots, q_n) \in \Theta$, llamaremos

$$H_{\bar{\mathbf{q}}}^i(t, z, z') = H(t, q_1(t), \dots, q_{i-1}(t), z, q_{i+1}(t), \dots, q_n(t), q'_1(t), \dots, z', \dots, q'_n(t))$$

a la potencia generada por el sistema hidráulico, como función del caudal y volumen turbinado por la central i -ésima, suponiendo un determinado comportamiento para el resto de las centrales.

Definición 6.2 Si $\bar{\mathbf{q}} = (q_1, \dots, q_n) \in \Theta$, consideraremos

$$L_{\bar{\mathbf{q}}}^i(t, z, z') = L(t, q_1(t), \dots, q_{i-1}(t), z, q_{i+1}(t), \dots, q_n(t), q'_1(t), \dots, z'_i, \dots, q'_n(t))$$

y el funcional $F_{\bar{\mathbf{q}}}^i : \Theta_i \rightarrow \mathbb{R}$ siguiente:

$$F_{\bar{\mathbf{q}}}^i(z) := F(q_1, \dots, q_{i-1}, z, q_{i+1}, \dots, q_n) = \int_0^T L_{\bar{\mathbf{q}}}^i(t, z(t), z'(t)) dt,$$

donde

$$L_{\bar{\mathbf{q}}}^i(t, z, z') = \Psi (P_d(t) - H_{\bar{\mathbf{q}}}^i(t, z, z')) , \text{ y}$$

$$\Theta_{\bar{\mathbf{q}}}^i := \{z \in C^1[0, T] / z(0) = 0, z(T) = b_i, H_{i \text{ mín}} \leq H_{\bar{\mathbf{q}}}^i(t, z, z') \leq H_{i \text{ máx}} \}.$$

Así, la minimización del funcional $F_{\bar{\mathbf{q}}}^i$ implicaría la minimización sobre la componente i -ésima de un elemento del conjunto Θ suponiendo un cierto comportamiento para las restantes. $F_{\bar{\mathbf{q}}}^i$ alcanza el mínimo, caso de existir, en el conjunto $\Theta_{\bar{\mathbf{q}}}^i$.

Definición 6.3 Llamaremos aplicación minimizadora i -ésima la aplicación $\Phi_i : \Theta \rightarrow \Theta$ tal que para cada $\bar{\mathbf{q}} = (q_1, \dots, q_i, \dots, q_n) \in \Theta$

$$\Phi_i(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n) = (q_1, \dots, q_i^*, \dots, q_n),$$

donde

$$F_{\bar{\mathbf{q}}}^i(q_i^*) < F_{\bar{\mathbf{q}}}^i(z_i)$$

$\forall z_i \in \Theta_{\bar{\mathbf{q}}}^i - \{q_i^*\}$, es decir, q_i^* minimiza $F_{\bar{\mathbf{q}}}^i$.

Establecemos, en la sección siguiente, un resultado que nos permite caracterizar los candidatos a mínimo del problema n -dimensional.

6.3. CONDICIÓN NECESARIA DE MÍNIMO

Consideremos, en primer lugar, la siguiente definición.

Definición 6.4 Si $(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) \notin S_i, \forall t$, llamaremos i -ésima función de coordinación de $\bar{\mathbf{q}} \in \Theta$ la definida en $[0, T]$ de la manera siguiente:

$$\Upsilon_{\bar{\mathbf{q}}}^i(t) = -L_{z'_i}(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_{z_i}(s, \bar{\mathbf{q}}(s), \bar{\mathbf{q}}'(s))}{H_{z'_i}(s, \bar{\mathbf{q}}(s), \bar{\mathbf{q}}'(s))} ds \right]$$

Denotaremos

$$(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i)^+(t) = -L_{z'_i}^+(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_{z_i}(s, \bar{\mathbf{q}}(s), \bar{\mathbf{q}}'(s))}{H_{z'_i}^+(s, \bar{\mathbf{q}}(s), \bar{\mathbf{q}}'(s))} ds \right],$$

y

$$(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i)^-(t) = -L_{z'_i}^-(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_{z_i}(s, \bar{\mathbf{q}}(s), \bar{\mathbf{q}}'(s))}{H_{z'_i}^-(s, \bar{\mathbf{q}}(s), \bar{\mathbf{q}}'(s))} ds \right].$$

Teorema 6.1 (Teorema de coordinación n -dimensional) Si $\bar{\mathbf{q}} = (q_1, \dots, q_n) \in \Theta$ es solución del problema planteado, entonces existe $\{K_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ tal que⁴:

i) Si $(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) \in S_i$,

$$(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i)^+(t) \leq K_i \leq (\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i)^-(t).$$

ii) Si $(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) \notin S_i$,

$$\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i(t) \text{ es } \begin{cases} \leq K_i & \text{si } H_i(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) = H_{i \text{ mín}} \\ = K_i & \text{si } H_{i \text{ mín}} < H_i(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) < H_{i \text{ máx}} \\ \geq K_i & \text{si } H_i(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) = H_{i \text{ máx}} \end{cases}$$

Demostración. Recurriendo al cuarto teorema de coordinación y teniendo en cuenta que el Principio del Mínimo de Pontryagin se cumple para cada una de las componentes $i = 1, \dots, n$, fijadas las restantes, podemos concluir que para cada $i = 1, \dots, n$, existe $K_i \in \mathbb{R}$ verificando la tesis del teorema. ■

Haremos la suposición adicional de que para cada $\bar{\mathbf{q}} \in \Theta$ y para $i = 1, \dots, n$, $F_{\bar{\mathbf{q}}}^i$ posee un único mínimo y, por tanto, la condición de minimalidad que se deriva del teorema de coordinación en el problema correspondiente es también condición suficiente de mínimo. Bajo estas condiciones, vemos que el problema uni-dimensional, $F_{\bar{\mathbf{q}}}^i$, alcanzará su mínimo en la componente i -ésima de $\phi_i(\bar{\mathbf{q}})$, función de clase C^1 .

Además, conforme se ha definido $F_{\bar{\mathbf{q}}}^i$, obsérvese que, dado $\bar{\mathbf{q}} = (q_1, \dots, q_i, \dots, q_n)$ y denotando por $\bar{\mathbf{q}}_i^* = (q_1, \dots, q_i^*, \dots, q_n)$ y por $\bar{\mathbf{q}}_i^{*'} = (q_1', \dots, q_i^{*'}, \dots, q_n')$, se verifican:

i) $\left(L_{z'_i}^i \right)_{z'_i}(t, q_i(t), q_i'(t)) = L_{z'_i}(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)).$

ii) $\left(H_{z_i}^i \right)_{z_i}(t, q_i(t), q_i'(t)) = H_{z_i}(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)).$

iii) $\left(H_{z'_i}^i \right)_{z'_i}(t, q_i(t), q_i'(t)) = H_{z'_i}(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)).$

iv) Si $q_i^{*'}(t)$ es punto de continuidad de $\left(L_{z'_i}^i \right)_{z'_i}(t, q_i^*(t), \cdot)$, entonces $L_{z'_i}$ es continua en $(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i^{*'}(t))$ y recíprocamente.

v) Si $q_i^{*'}(t)$ es punto de discontinuidad de $\left(L_{z'_i}^i \right)_{z'_i}(t, q_i^*(t), \cdot)$, entonces $L_{z'_i}$ es discontinua en $(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i^{*'}(t))$ y recíprocamente. Por tanto, $q_i^{*'}(t) = 0$.

⁴Obsérvese que en el caso de las centrales hidráulicas sin capacidad de bombeo (lagrangiano regular), $L_{z'_i}$ es continua en $[0, T] \times \mathbb{R}^{2n}$, es decir, sólo es aplicable el apartado (ii) del teorema ($S_i = \emptyset$ para cada $i \in \{k+1, \dots, n\}$).

Proposición 6.1 Si $\bar{\mathbf{q}} \in \Theta$, entonces $\phi_i(\bar{\mathbf{q}}) = (q_1, \dots, q_i^*, \dots, q_n)$ es de clase C^1 y existe $\{K_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ tal que:

i) Si $q_i^*(t)$ es punto de discontinuidad de $\left(L_{\bar{\mathbf{q}}}^i\right)_{z'_i}(t, q_i^*(t), \cdot)$,

$$\left(\mathbb{Y}_{\phi_i(\bar{\mathbf{q}})}^i\right)^+(t) \leq K_i \leq \left(\mathbb{Y}_{\phi_i(\bar{\mathbf{q}})}^i\right)^-(t).$$

ii) Si $\left(L_{\bar{\mathbf{q}}}^i\right)_{z'_i}(t, q_i^*(t), \cdot)$ es continua en $q_i^*(t)$,

$$\mathbb{Y}_{\phi_i(\bar{\mathbf{q}})}^i(t) \text{ es } \begin{cases} \leq K_i & \text{si } H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i^{*'}(t)) = H_{i \text{ mín}} \\ = K_i & \text{si } H_{i \text{ mín}} < H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i^{*'}(t)) < H_{i \text{ máx}} \\ \geq K_i & \text{si } H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i^{*'}(t)) = H_{i \text{ máx}}. \end{cases}$$

Demostración. Como q_i^* minimiza a $F_{\bar{\mathbf{q}}}^i$, a partir de los teoremas 5.4 y 7.4, concluimos que $\phi_i(\bar{\mathbf{q}})$ es de clase C^1 . Nos apoyamos en el primer teorema para asegurar la pertenencia a C^1 del mínimo del problema planteado en aquellos puntos de discontinuidad de $\left(L_{\bar{\mathbf{q}}}^i\right)_{z'_i}$. El segundo teorema junto con algunos otros resultados, que se muestran en el capítulo siguiente (el conjunto $\Theta_{\bar{\mathbf{q}}}^i$ es moldeable), nos garantizan para aquellos puntos donde $\left(L_{\bar{\mathbf{q}}}^i\right)_{z'_i}$ es continua, que el mínimo de $F_{\bar{\mathbf{q}}}^i$, q_i^* , es C^1 . Por tanto, $\phi_i(\bar{\mathbf{q}})$ es de clase C^1 .

Por otra parte, considerando de nuevo que q_i^* minimiza a $F_{\bar{\mathbf{q}}}^i$, siguiendo un razonamiento análogo al del teorema de coordinación n-dimensional, podemos concluir que existe $\{K_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ tal que

i) Si $q_i^*(t)$ es punto de discontinuidad de $\left(L_{\bar{\mathbf{q}}}^i\right)_{z'_i}(t, q_i^*(t), \cdot)$, entonces $L_{z'_i}$ es discontinua en $\left(t, \phi_i(\bar{\mathbf{q}}), \phi_i(\bar{\mathbf{q}})\right)$, de donde

$$\left(\mathbb{Y}_{\phi_i(\bar{\mathbf{q}})}^i\right)^+(t) \leq K_i \leq \left(\mathbb{Y}_{\phi_i(\bar{\mathbf{q}})}^i\right)^-(t).$$

ii) De forma análoga, si $\left(L_{\bar{\mathbf{q}}}^i\right)_{z'_i}(t, q_i^*(t), \cdot)$ es continua en $q_i^*(t)$, entonces $L_{z'_i}$ es continua en $\left(t, \phi_i(\bar{\mathbf{q}}), \phi_i(\bar{\mathbf{q}})\right)$, de donde

$$\mathbb{Y}_{\phi_i(\bar{\mathbf{q}})}^i(t) \text{ es } \begin{cases} \leq K_i & \text{si } H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i^{*'}(t)) = H_{i \text{ mín}} \\ = K_i & \text{si } H_{i \text{ mín}} < H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i^{*'}(t)) < H_{i \text{ máx}} \\ \geq K_i & \text{si } H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i^{*'}(t)) = H_{i \text{ máx}}. \end{cases}$$

■

Mostramos, a continuación, el algoritmo de optimización de carácter iterativo descendente que proponemos para la resolución de un problema de tipo $H_n - T_1$.

6.4. ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN

En esta sección, como ya hemos comentado, se presenta un algoritmo de resolución numérica del problema hidrotérmico con n centrales hidráulicas, basado en el método de descenso coordinado cíclico.

La idea del método de descenso coordinado es utilizar los ejes coordenados como direcciones de descenso. Así, si consideramos la función $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $G \in C^1(\mathbb{R}^n)$, y $\bar{x} = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$, el método busca el mínimo de G en todas las direcciones \bar{e}_j de forma secuencial. Una vez fijada la dirección de movimiento, el valor de la función objetivo depende solamente de una variable, y sobre esta función "univariante" se pueden utilizar algoritmos de búsqueda para funciones de este tipo. Esto es, el descenso respecto de la coordenada x_j significa que la función $G(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ es minimizada con respecto a x_j mientras consideramos fijas el resto de las componentes.

La diferencia entre los distintos métodos de descenso radica en la regla mediante la cual se selecciona la dirección de movimiento en cada paso del algoritmo. En el caso del descenso coordinado cíclico se minimiza la función G en cada dirección de forma ordenada, desde la primera coordenada hasta la n -ésima. Posteriormente se repite el proceso comenzando de nuevo desde la primera coordenada.

Nuestro objetivo es adaptar la versión de este algoritmo para espacios de dimensión finita a nuestro problema variacional con restricciones.

6.4.1. Construcción del algoritmo

El algoritmo será secuencial. Para el problema $H_n - T_1$ realizará varias iteraciones y en cada iteración k -ésima calculará n pasos, uno por cada central hidráulica. En cada paso se calcula el funcionamiento óptimo de una hidráulica mientras suponemos fijo el comportamiento del resto de las centrales.

La construcción del algoritmo se llevará a cabo de la siguiente manera: comenzando con un cierto $\bar{q}_0 = (q_{0,1}, \dots, q_{0,n})$ admisible, construiremos una sucesión de \bar{q}_k a través de aplicaciones sucesivas y ordenadas de $\{\phi_i\}_{i=1}^n$.

Definición 6.5 Denotaremos por Φ la aplicación $\Phi : \Theta \rightarrow \Theta$ tal que para cada $\bar{q} \in \Theta$

$$\Phi(\bar{q}) = \bar{q}^*,$$

donde

$$\bar{q}^* = (\phi_n \circ \phi_{n-1} \circ \dots \circ \phi_2 \circ \phi_1)(\bar{q}).$$

En cada iteración k -ésima del algoritmo se habrán "minimizado las n centrales hidráulicas" a través de las aplicaciones minimizadoras i -ésimas en el orden establecido, obteniéndose el nuevo elemento, \bar{q}_k , admisible,

$$\bar{q}_k = \Phi(\bar{q}_{k-1}) = (\phi_n \circ \phi_{n-1} \circ \dots \circ \phi_2 \circ \phi_1)(\bar{q}_{k-1}).$$

Definición 6.6 Se llama sucesión descendente del problema $H_n - T_1$ toda sucesión $\{\bar{q}_k\} \subset \Theta$ donde

$$\bar{q}_k = \Phi(\bar{q}_{k-1}).$$

El límite de esta sucesión descendente nos proporcionará el mínimo buscado

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{q}}_k$$

El método desarrollado, desde el punto de vista algorítmico y computacional, se trata de un proceso iterativo que calcula, en cada paso de cada iteración, el funcionamiento óptimo de una central hidráulica, suponiendo fijo el comportamiento de las restantes. De este modo, tenemos un régimen de funcionamiento de las centrales hidráulicas cada vez menos costoso y convergente al óptimo.

En cada iteración k -ésima han de actuar todas las $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ en el orden antes mencionado. Partiendo de un $\bar{\mathbf{q}}_{k-1}$ admisible, la actuación de cada ϕ_i supone la resolución de un problema de tipo $H_1 - T_1$. Al completar la iteración k -ésima se obtendrá un nuevo $\bar{\mathbf{q}}_k$ admisible.

En cada uno de estos pasos, podemos utilizar para la construcción teórica de $\phi_i(\bar{\mathbf{q}})$ las herramientas propuestas en la sección 5.6 del capítulo 5. Se tratará de buscar, para cada K , la función q_K que satisfaga en este caso las ecuaciones de la proposición 6.1 y, de entre ellas, la que dé lugar a una función admisible, $q_K \in \Theta_{\bar{\mathbf{q}}}^i$. Obsérvese que, ahora, consideraremos para cada i

$$K_{m,i} = -\frac{\partial L_{\bar{\mathbf{q}}}^i(0, 0, m)}{\partial z'} \quad \text{con} \quad H_i(0, 0, q_1, \dots, m, \dots, q_n) = H_{i \text{ mín}}$$

y

$$K_{M,i} = -\frac{\partial L_{\bar{\mathbf{q}}}^i(0, 0, M)}{\partial z'} \quad \text{con} \quad H_i(0, 0, q_1, \dots, M, \dots, q_n) = H_{i \text{ máx}},$$

por lo que $\forall x \in (m, M)$ (con la hipótesis de que $L_{z'_i}(t, \bar{\mathbf{z}}, z'_1, \dots, z'_{i-1}, \bullet, z'_{i+1}, \dots, z'_n)$ es estrictamente creciente respecto a z'_i), tenemos que

$$K_{M,i} < -\frac{\partial L_{\bar{\mathbf{q}}}^i(0, 0, x)}{\partial z'} < K_{m,i}.$$

La peculiar forma de $\phi_i(\bar{\mathbf{q}})$, expresada en la proposición 6.1, nos permite abordar su cálculo aproximado utilizando métodos similares a los ya comentados en capítulos precedentes.

Por tanto, la construcción aproximada de $\phi_i(\bar{\mathbf{q}})$ se llevará a cabo con el uso de una versión discretizada de las ecuaciones de la proposición 6.1, en los instantes $t_j = T \cdot j/n$, de forma análoga a la realizada en la sección 5.6.1.

6.4.2. Convergencia del algoritmo

Determinamos que bajo las condiciones impuestas el algoritmo converge a la solución del problema. Recordamos, en primer lugar, algunas definiciones necesarias en este proceso.

Definición. Se dice que un subconjunto $K \subset X$, (X, τ) espacio topológico, es relativamente secuencialmente compacto si cada sucesión de puntos de K tiene una subsucesión que converge a un punto de X .

Definición. Sea $\{f_m\}$ sucesión de funciones definidas en $D \subseteq \mathbb{R}^d$. Sea $x \in D$, $\{f_m\}$ se dice equicontinua en x si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall y \in D$ si $|y - x| < \delta$, entonces

$$|f_m(y) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Definición. Dada $\{f_m\}_{m \in I}$ sucesión de funciones, se dice que está uniformemente acotada si $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|f_m\|_\infty < C, \quad \forall m \in I.$$

Definición. Se dice que una función $f : X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos es secuencialmente continua en el punto $x \in X$ si toda sucesión $\{x_n\}$ en X convergente a x tiene la propiedad de que $f(x_n) \rightarrow f(x)$ en Y .

Teorema. (Arzela-Ascoli) Si una sucesión $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ en $C(X)$ es uniformemente acotada y equicontinua en cada punto de X , entonces posee una subsucesión uniformemente convergente.

Teorema de Zangwill de convergencia global de algoritmos de descenso. Sea $A : X \rightarrow P(X)$ un algoritmo en X y supóngase que, dado x_0 , se genera la sucesión $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ que cumple

$$x_{k+1} \in A(x_k).$$

Dado un conjunto solución $\Gamma \subset X$, supóngase:

i) todos los puntos x_k están contenidos en un conjunto compacto $S \subset X$;

ii) existe una función continua Z en X tal que

a) si $x \notin \Gamma$, entonces $Z(y) < Z(x)$ para toda $y \in A(x)$;

b) si $x \in \Gamma$, entonces $Z(y) \leq Z(x)$ para toda $y \in A(x)$;

iii) la transformación A es cerrada en puntos que están fuera de Γ .

Entonces el límite de cualquier subsucesión convergente de $\{x_k\}$ es una solución.

Bajo estas consideraciones, presentamos, a continuación, una versión topológica del teorema global de convergencia de algoritmos de descenso con unas nuevas hipótesis que no afectan a la corrección de la demostración proporcionada en [?] por Zangwill; en concreto, el carácter cerrado de la función descendente es sustituido por continuidad secuencial y la compacidad por compacidad secuencial relativa.

Teorema 6.2 Sea Φ una transformación en el espacio topológico (X, τ) , y supon-
gamos que, dado $x_0 \in X$, se genera la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por la recurrencia

$$x_{n+1} = \Phi(x_n)$$

verificando lo siguiente:

- i) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K \subset X$, donde K es relativamente secuencialmente compacto.
- ii) Existe una función secuencialmente continua $F : (X, \tau) \rightarrow (R, |\cdot|)$ satisfaciendo:

$$\Phi(x) \neq x \implies F(\Phi(x)) < F(x).$$

- iii) Φ es secuencialmente continua en X .

Entonces toda subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a un punto fijo de Φ .

Demostración. Idéntica a la presentada por Zangwill para el teorema global de convergencia de algoritmos de descensos.

Indicamos que la transformación Φ , asociada al algoritmo considerado en nuestro caso, es punto a punto, y que el conjunto solución es el de puntos fijos de Φ . ■

Aunque en los espacios topológicos metrizable el carácter secuencial de la compacidad y de la continuidad es irrelevante, mantendremos esta nomenclatura para mayor comodidad en las demostraciones.

Tratamos de ver bajo qué condiciones la sucesión generada por nuestro algoritmo verifica el teorema anterior para garantizar su convergencia.

Lema 6.1 Sea (X, τ) un espacio topológico con $K \subset X$ relativamente secuencialmente compacto. Si la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ verifica que todas sus subsucesiones convergentes tienen el mismo límite, entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a ese límite de X .

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo.

Sea $\ell \in X$ el límite de todas las subsucesiones convergentes de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, y supon-
gamos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a ℓ .

Tendremos que existe \mathbb{V} , un entorno de ℓ , tal que $\forall k \in \mathbb{N}$ existe $n_k > k$ cumpliendo $x_{n_k} \notin \mathbb{V}$; de modo que la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ no puede poseer ninguna subsucesión convergente a ℓ , contradiciendo las hipótesis. ■

Caracterizamos, a continuación, la equicontinuidad de una familia de funciones \hat{C}^1 a través de una propiedad de la familia de sus derivadas.

Lema 6.2 Dada una familia de funciones $F = \{\bar{f}_\lambda = (f_{\lambda,1}, \dots, f_{\lambda,n})\}_{\lambda \in \mathbb{I}} \subset (\hat{C}^1[a, b])^n$, si la familia de sus derivadas $\{\bar{f}'_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{I}}$ es uniformemente acotada, entonces F es equicontinua.

Demostración. Sea $C \in \mathbb{R}$ tal que $\|\bar{f}'_\lambda\|_\infty < C, \forall \lambda \in \mathbb{I}$.

Dado $\varepsilon > 0$, sin más que considerar $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$, tendremos que $\forall x, y \in [a, b], \forall \lambda \in \mathbb{I}$

$$|x - y| < \delta \implies |f_{\lambda,i}(x) - f_{\lambda,i}(y)| < |x - y| \cdot C < \delta \cdot C = \varepsilon; \forall i = 1, \dots, n.$$

■

Lema 6.3 Si $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \Theta$ converge uniformemente a $\bar{\mathbf{q}}$ y $\{\bar{\mathbf{q}}'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es equicontinua y uniformemente acotada, entonces

$$\{\bar{\mathbf{q}}'_m\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformemente a } \bar{\mathbf{q}}'.$$

Demostración. Por ser la sucesión $\{\bar{\mathbf{q}}'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ equicontinua y uniformemente acotada, en virtud del teorema de Arzela-Ascoli, existe una subsucesión $\{\bar{\mathbf{q}}'_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente a $\tilde{\mathbf{q}}$. Ahora bien, como $\{\bar{\mathbf{q}}_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\bar{\mathbf{q}}$, tenemos que $\tilde{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}'$.

Además, cualquier otra subsucesión de $\{\bar{\mathbf{q}}'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es también equicontinua y uniformemente acotada, de modo que tendrá, a su vez, una subsucesión convergente.

Por otra parte, cualquier subsucesión de $\{\bar{\mathbf{q}}'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ que converja uniformemente, debe converger a $\bar{\mathbf{q}}'$.

Estamos, por tanto, en las hipótesis del lema 6.1, puesto que $\{\bar{\mathbf{q}}'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es un conjunto relativamente secuencialmente compacto en $(C^0[0, T], \|\cdot\|_\infty)$ y, por tanto,

$$\{\bar{\mathbf{q}}'_m\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformemente a } \bar{\mathbf{q}}'.$$

■

Lema 6.4 Sea $\Omega \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{2n}$ y $L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitziana. Para cada $g \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{2n})$ tal que $(t, g(t), g'(t)) \in \Omega \forall t \in [0, T]$ definimos

$$L_g(t) := L(t, g(t), g'(t)) \quad \text{y} \quad W_g(t) := \int_0^t L(s, g(s), g'(s)) ds.$$

Si $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a $\bar{\mathbf{q}}$ en $(\Theta, \|\cdot\|^*)$ entonces

$$\{L_{\bar{\mathbf{q}}_m}\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformemente a } L_{\bar{\mathbf{q}}}$$

$$\{W_{\bar{\mathbf{q}}_m}\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge puntualmente a } W_{\bar{\mathbf{q}}}.$$

Demostración. Por ser L localmente Lipschitziana en Ω , es lipschitziana en el conjunto $\{(t, g(t), g'(t)) \in \Omega / t \in [0, T]\}$ entonces $\exists C \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|L(t, \bar{\mathbf{q}}_m(t), \bar{\mathbf{q}}'_m(t)) - L(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t))| \leq C \cdot \|\bar{\mathbf{q}}_m - \bar{\mathbf{q}}\|^* \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{y} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Por hipótesis, $\forall \varepsilon > 0 \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|\bar{\mathbf{q}}_m - \bar{\mathbf{q}}\|^* < \frac{\varepsilon}{C}$, $\forall m > m_\varepsilon$.

En consecuencia, $\forall \varepsilon > 0 \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\forall t \in [0, T]$ y $\forall m > m_\varepsilon$

$$|L(t, \bar{\mathbf{q}}_m(t), \bar{\mathbf{q}}'_m(t)) - L(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t))| \leq C \cdot \|\bar{\mathbf{q}}_m - \bar{\mathbf{q}}\|^* \leq \varepsilon.$$

Así pues, $\{L_{\bar{\mathbf{q}}_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $L_{\bar{\mathbf{q}}}$ y, como consecuencia inmediata de ello, tenemos también que $\{W_{\bar{\mathbf{q}}_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a $W_{\bar{\mathbf{q}}}$.

■

En la proposición siguiente, establecemos bajo qué condiciones la sucesión de funciones de coordinación i -ésimas de $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ (uniformemente convergente a $\bar{\mathbf{q}}$) converge puntualmente a la función de coordinación i -ésima de su límite $\bar{\mathbf{q}}$.

Proposición 6.2 Sea L en las condiciones establecidas en el planteamiento del problema. Si $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\bar{\mathbf{q}}$ en $(\Theta, \|\cdot\|_*)$, entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} Si (t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) \notin S_i, \\ Si (t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) \in S_i, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \{\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge puntualmente a } \mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i. \\ \left\{ \begin{array}{l} \bullet \exists \{\bar{\mathbf{q}}_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ tal que} \\ \left\{ \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_{m_k}}^i \right)^+ \right\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge puntualmente a } \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i \right)^+ \\ y/o \\ \bullet \exists \{\bar{\mathbf{q}}_{m_s}\}_{s \in \mathbb{N}} \subset \{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ tal que} \\ \left\{ \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_{m_s}}^i \right)^- \right\}_{s \in \mathbb{N}} \text{ converge puntualmente a } \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i \right)^- \end{array} \right.$$

Demostración. Hagamos para cada $\bar{\mathbf{z}} \in \Theta_{\bar{\mathbf{q}}}$:

$$\mathbb{L}_{\bar{\mathbf{z}}}^i(t) : = -L_{z'_i}(t, \bar{\mathbf{z}}(t), \bar{\mathbf{z}}'(t)),$$

$$\mathbb{S}_{\bar{\mathbf{z}}}^i(t) : = \frac{H_{z_i}(t, \bar{\mathbf{z}}(t), \bar{\mathbf{z}}'(t))}{H_{z'_i}(t, \bar{\mathbf{z}}(t), \bar{\mathbf{z}}'(t))},$$

$$\mathbb{I}_{\bar{\mathbf{z}}}^i(t) : = - \int_0^t \mathbb{S}_{\bar{\mathbf{z}}}^i(s) ds,$$

$$\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i(t) = \mathbb{I}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i(t) \cdot \exp[\mathbb{I}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i(t)].$$

De forma similar, denotaremos por

$$\left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i \right)^+(t) = \left(\mathbb{I}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i \right)^+(t) \cdot \exp\left[\left(\mathbb{I}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i \right)^+(t) \right]$$

$$\left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i \right)^-(t) = \left(\mathbb{I}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i \right)^-(t) \cdot \exp\left[\left(\mathbb{I}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i \right)^-(t) \right],$$

siendo

$$\left(\mathbb{L}_{\bar{\mathbf{z}}}^i \right)^+(t) : = -L_{z'_i}^+(t, \bar{\mathbf{z}}(t), \bar{\mathbf{z}}'(t)), \quad \left(\mathbb{I}_{\bar{\mathbf{z}}}^i \right)^+(t) := - \int_0^t \frac{H_{z_i}(s, \bar{\mathbf{z}}(s), \bar{\mathbf{z}}'(s))}{H_{z'_i}^+(s, \bar{\mathbf{z}}(s), \bar{\mathbf{z}}'(s))} ds$$

$$\left(\mathbb{L}_{\bar{\mathbf{z}}}^i \right)^-(t) : = -L_{z'_i}^-(t, \bar{\mathbf{z}}(t), \bar{\mathbf{z}}'(t)), \quad \left(\mathbb{I}_{\bar{\mathbf{z}}}^i \right)^-(t) := - \int_0^t \frac{H_{z_i}(s, \bar{\mathbf{z}}(s), \bar{\mathbf{z}}'(s))}{H_{z'_i}^-(s, \bar{\mathbf{z}}(s), \bar{\mathbf{z}}'(s))} ds.$$

Podemos distinguir dos casos:

i) Si $(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) \notin S_i$, $L_{z'_i}$ es de clase C^1 y, por tanto, lipschitziana en \bar{S}_i . En virtud del lema 6.4, $\{\mathbb{L}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\mathbb{L}_{\bar{\mathbf{q}}}^i$. Aplicando el mismo razonamiento, dado que $H_{z'_i} \neq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, obtenemos que $\{\mathbb{S}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\mathbb{S}_{\bar{\mathbf{q}}}^i$ y, por consiguiente, $\{\mathbb{I}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a $\mathbb{I}_{\bar{\mathbf{q}}}^i$, de donde concluimos que

$$\{\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge puntualmente a } \mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i.$$

ii) Si $(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) \in S_i$, entonces $L_{z'_i}$ es discontinua en este punto y, por tanto, $q'_i(t) = 0$ es punto de discontinuidad de $\left(L_{\bar{\mathbf{q}}}^i \right)_{z'_i}$. Como $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\bar{\mathbf{q}}$ en $(\Theta, \|\cdot\|_*)$, puede suceder que:

a) $\forall m, q'_{m,i}(t) \geq 0$. Se verifica que $L_{z'_i}$ en $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{i-1} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{n-i}$ es de clase C^1 ; en particular, será localmente lipschitziana y, en virtud del lema 6.4, $\left\{ \left(\mathbb{L}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i \right)^+ \right\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\left(\mathbb{L}_{\bar{\mathbf{q}}}^i \right)^+$. Igualmente considerando $H_{z'_i}^+ \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$, obtenemos que $\left\{ \left(\mathbb{S}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i \right)^+ \right\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\left(\mathbb{S}_{\bar{\mathbf{q}}}^i \right)^+$ y, por consiguiente, $\left\{ \left(\mathbb{I}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i \right)^+ \right\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a $\left(\mathbb{I}_{\bar{\mathbf{q}}}^i \right)^+$, de donde concluimos que

$$\left\{ \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i \right)^+ \right\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge puntualmente a } \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i \right)^+.$$

b) $\forall m, q'_{m,i}(t) \leq 0$. Siguiendo un razonamiento análogo al anterior, concluimos que

$$\left\{ \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i \right)^- \right\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge puntualmente a } \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i \right)^-.$$

c) Existen $\{\bar{\mathbf{q}}_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}, \{\bar{\mathbf{q}}_{m_s}\}_{s \in \mathbb{N}} \subset \{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tales que

$$\begin{cases} q'_{m_k,i}(t) \geq 0 \\ q'_{m_s,i}(t) \leq 0. \end{cases}$$

Razonando de forma similar a los casos anteriores, obtendremos que

$$\begin{cases} \left\{ \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_{m_k}}^i \right)^+ \right\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge puntualmente a } \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i \right)^+ \\ \left\{ \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_{m_s}}^i \right)^- \right\}_{s \in \mathbb{N}} \text{ converge puntualmente a } \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i \right)^-. \end{cases}$$

■

Corolario 6.1 Sea $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ convergente a $\bar{\mathbf{q}}$ en $(\Theta, \|\cdot\|)$, verificando

- a) Si $(t, \bar{\mathbf{q}}_m(t), \bar{\mathbf{q}}'_m(t)) \in S_i, \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i \right)^+(t) \leq K_{m,i} \leq \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i \right)^-(t)$.
b) Si $(t, \bar{\mathbf{q}}_m(t), \bar{\mathbf{q}}'_m(t)) \notin S_i,$

$$\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i(t) \text{ es } \begin{cases} \leq K_{m,i} & \text{si } H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_m(t), \bar{\mathbf{q}}'_m(t)) = H_{i \text{ mín}} \\ = K_{m,i} & \text{si } H_{i \text{ mín}} < H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_m(t), \bar{\mathbf{q}}'_m(t)) < H_{i \text{ máx}} \\ \geq K_{m,i} & \text{si } H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_m(t), \bar{\mathbf{q}}'_m(t)) = H_{i \text{ máx}}. \end{cases}$$

Entonces $\{K_{m,i}\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge y, llamando K_i a su límite, se cumple que

- i) Si $(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) \notin S_i,$

$$\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i(t) \text{ es } \begin{cases} \leq K_i & \text{si } H_i(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) = H_{i \text{ mín}} \\ = K_i & \text{si } H_{i \text{ mín}} < H_i(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) < H_{i \text{ máx}} \\ \geq K_i & \text{si } H_i(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) = H_{i \text{ máx}}. \end{cases}$$

ii) Si $(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) \in S_i$ entonces $\left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i\right)^+(t) \leq K_i \leq \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i\right)^-(t)$.

Demostración. Es evidente que, $\forall i = 1, \dots, n$, $\{K_{m,i}\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge, pues de lo contrario $\{\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i\}_{m \in \mathbb{N}}$ o $\left\{\left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_{m_k}}^i\right)^+\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ o $\left\{\left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_{m_s}}^i\right)^-\right\}_{s \in \mathbb{N}}$ no convergería, contradiciendo la proposición 6.2. Denotemos por K_i su límite.

i) Si $(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) \notin S_i$, entonces se pueden dar tres casos:

- Si $H_{i \text{ mín}} < H_i(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) < H_{i \text{ máx}}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m > k$, $H_{i \text{ mín}} < H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_m(t), \bar{\mathbf{q}}'_m(t)) < H_{i \text{ máx}}$; por tanto,

$$\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i = \lim_{m \rightarrow \infty} K_{m,i} = K_i \text{ si } H_{i \text{ mín}} < H_i(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) < H_{i \text{ máx}}.$$

- Si $H_i(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) = H_{i \text{ máx}}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m > k$, $H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_m(t), \bar{\mathbf{q}}'_m(t)) = H_{i \text{ máx}}$ y, por tanto, para todo $m > k$,

$$\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i(t) \geq K_{m,i} \implies \mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i(t) \geq K_i.$$

- Si $H_i(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) = H_{i \text{ mín}}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m > k$, $H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_m(t), \bar{\mathbf{q}}'_m(t)) = H_{i \text{ mín}}$ y, por tanto, para todo $m > k$,

$$\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_m}^i(t) \leq K_{m,i} \implies \mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i(t) \leq K_i.$$

ii) Si $(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) \in S_i$, entonces, por la proposición 6.2, podemos afirmar que

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \{\bar{\mathbf{q}}_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ tal que } \left\{\left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_{m_k}}^i\right)^+\right\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge puntualmente a } \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i\right)^+ \\ \text{y/o} \\ \exists \{\bar{\mathbf{q}}_{m_s}\}_{s \in \mathbb{N}} \subset \{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ tal que } \left\{\left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_{m_s}}^i\right)^-\right\}_{s \in \mathbb{N}} \text{ converge puntualmente a } \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i\right)^-. \end{array} \right.$$

Además, sabemos que se verifica que, $\left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_{m_k}}^i\right)^+(t) \leq K_{m_k,i} \leq \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_{m_k}}^i\right)^-(t)$ y $\left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_{m_s}}^i\right)^+(t) \leq K_{m_s,i} \leq \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}_{m_s}}^i\right)^-(t)$, de donde se deduce fácilmente que

$$\left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i\right)^+(t) \leq K_i \leq \left(\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i\right)^-(t).$$

■

Teorema 6.3 Si $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ y $\{\phi_i(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ convergen en $(\Theta, \|\cdot\|_*)$ entonces

$$\{\phi_i(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformemente a } \phi_i\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{q}}_m\right).$$

Demostración. Sea $\bar{\mathbf{s}}_m := \phi_i(\bar{\mathbf{q}}_m)$ que converge uniformemente a $\bar{\mathbf{s}}$ y $\bar{\mathbf{s}}'_m$ a $\bar{\mathbf{s}}'$. La proposición 6.1 junto con el corolario 6.1 nos aseguran que:

i) Si $(t, \bar{\mathbf{s}}(t), \bar{\mathbf{s}}'(t)) \notin S_i$,

$$\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{s}}}^i(t) \text{ es } \begin{cases} \leq K_i & \text{si } H_i(t, \bar{\mathbf{s}}(t), \bar{\mathbf{s}}'(t)) = H_{i \text{ mín}} \\ = K_i & \text{si } H_{i \text{ mín}} < H_i(t, \bar{\mathbf{s}}(t), \bar{\mathbf{s}}'(t)) < H_{i \text{ máx}} \\ \geq K_i & \text{si } H_i(t, \bar{\mathbf{s}}(t), \bar{\mathbf{s}}'(t)) = H_{i \text{ máx}}. \end{cases}$$

ii) Si $(t, \bar{s}(t), \bar{s}'(t)) \in S_i$, entonces $(\mathbb{Y}_{\bar{s}}^i)^+(t) \leq K_i \leq (\mathbb{Y}_{\bar{s}}^i)^-(t)$ de donde concluimos que, $\phi_i(\bar{s}) = \bar{s}$.

Nótese ahora que $\bar{\mathbf{q}}_m$ y $\bar{s}_m = \Phi_i(\bar{\mathbf{q}}_m)$ difieren solamente en su componente i -ésima, propiedad que también verifican sus límites; luego, al minimizar sobre esta componente, aplicando ϕ_i , obtendremos el mismo resultado:

$$\phi_i\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{q}}_m\right) = \phi_i(\bar{s}) = \bar{s} = \lim_{m \rightarrow \infty} (\phi_i(\bar{\mathbf{q}}_m)).$$

■

Corolario 6.2 Sea $\Phi := \phi_n \circ \cdots \circ \phi_1$. Si $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ y $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ convergen en $(\Theta, \|\cdot\|_*)$ entonces

$$\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge a } \Phi\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{q}}_m\right).$$

Demostración. Si $\{\bar{\mathbf{q}}_m = (q_{m,1}, \dots, q_{m,n})\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a $\bar{\mathbf{q}} = (q_1, \dots, q_n)$ implica que $\{q_{m,i}\}_{m \in \mathbb{N}}$ y $\{q'_{m,i}\}_{m \in \mathbb{N}}$ convergen uniformemente a q_i y q'_i respectivamente, $\forall i = 1, \dots, n$.

Como $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge en $(\Theta, \|\cdot\|_*)$, consideremos $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_m) = (q_{m,1}^*, \dots, q_{m,n}^*)\}_{m \in \mathbb{N}}$ y $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_m) = (q_{m,1}^{*'}, \dots, q_{m,n}^{*'})\}_{m \in \mathbb{N}}$ convergentes uniformemente a \bar{s}^* y $\bar{s}^{*'}$ respectivamente. Al ser $\Phi = \phi_n \circ \cdots \circ \phi_1$, tenemos que $\phi_n[(\phi_{n-1} \circ \cdots \circ \phi_1)(\bar{\mathbf{q}}_m)]$ converge, de donde deducimos que

$$(\phi_{n-1} \circ \cdots \circ \phi_1)(\bar{\mathbf{q}}_m) = (q_{m,1}^*, \dots, q_{m,n-1}^*, q_{m,n})$$

también converge, pues $q_{m,i}^*$ converge a $s_i^* \forall i = 1, \dots, n-1$ y $q_{m,n}$ converge a q_n por hipótesis.

De igual forma, podemos asegurar que,

$$(\phi_{n-1} \circ \cdots \circ \phi_1)(\bar{\mathbf{q}}_m) = (q_{m,1}^{*'}, \dots, q_{m,n-1}^{*'}, q_{m,n}')$$

también converge, pues $q_{m,i}^{*'}$ converge a $s_i^{*' \forall i = 1, \dots, n-1$ y $q_{m,n}'$ converge por hipótesis.

Aplicando de forma reiterada este razonamiento, concluimos que las sucesiones

$$\{(\phi_{n-2} \circ \cdots \circ \phi_1)(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}, \dots, \{(\phi_2 \circ \phi_1)(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}, \{\phi_1(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$$

son convergentes en $(\Theta, \|\cdot\|_*)$.

Además, en virtud del teorema 6.3, tenemos que:

- Como $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a $\bar{\mathbf{q}}$ y $\{\phi_1(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ es convergente, entonces

$$\{\phi_1(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge a } \phi_1(\bar{\mathbf{q}}).$$

- Como $\{\phi_1(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a $\phi_1(\bar{\mathbf{q}})$ y $\{(\phi_2 \circ \phi_1)(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ es convergente, entonces

$$\{(\phi_2 \circ \phi_1)(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge a } (\phi_2 \circ \phi_1)(\bar{\mathbf{q}}).$$

Continuando el razonamiento, obtenemos que

$$\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge a } \Phi(\bar{\mathbf{q}}).$$

■

Establecemos, en el siguiente corolario, las condiciones para que la aplicación minimizadora, Φ , sea secuencialmente continua.

Corolario 6.3 Si $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge en $(\Theta, \|\cdot\|_*)$ y $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$, $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_m^\bullet)\}_{m \in \mathbb{N}}$ son equicontinuas y uniformemente acotadas, entonces:

$$\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformemente a } \Phi\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{q}}_m\right),$$

$$\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_m^\bullet)\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformemente a } \Phi\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{q}}_m^\bullet\right).$$

Demostración. Sean $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ y $\{\bar{\mathbf{q}}_m'\}_{m \in \mathbb{N}}$ uniformemente convergentes a $\bar{\mathbf{q}}$ y a $\bar{\mathbf{q}}'$ respectivamente. Como $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ es equicontinua y uniformemente acotada, en virtud del teorema de Arzela-Ascoli, existe una subsucesión $\{\bar{\mathbf{q}}_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_{m_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente, y como $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_{m_k}^\bullet)\}_{k \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada y equicontinua, por el lema 6.3, podemos concluir que $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_{m_k}^\bullet)\}_{k \in \mathbb{N}}$ también converge uniformemente.

Además, como $\{\bar{\mathbf{q}}_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\bar{\mathbf{q}}$ y, como acabamos de señalar, $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_{m_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge en $(\Theta, \|\cdot\|_*)$, en virtud del corolario anterior junto con el lema 6.3, podemos afirmar que $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_{m_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\Phi(\bar{\mathbf{q}})$ y $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_{m_k}^\bullet)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\Phi(\bar{\mathbf{q}})$.

Por otra parte, razonando de forma análoga, cualquier otra subsucesión de $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ que converja debe converger también a $\Phi(\bar{\mathbf{q}})$ y, por el lema 6.1 se deduce que $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\Phi(\bar{\mathbf{q}})$.

La convergencia uniforme de $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ a $\Phi(\bar{\mathbf{q}})$ se obtiene aplicando nuevamente el lema 6.1.

■

La siguiente proposición nos asegura que la sucesión descendente generada por el algoritmo propuesto es convergente. Determinamos el espacio donde debemos tomar el punto inicial de búsqueda del mínimo para garantizar que llegamos a éste.

Proposición 6.3 Sea $\mathbb{U} := \Theta \cap \hat{C}^2$. Entonces existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, siendo $U_M := \{\bar{\mathbf{z}} \in U / \|\bar{\mathbf{z}}''\|_\infty < M\}$, se verifica:

- i) $\Phi(U_M) \subseteq U_M$.
- ii) U_M es relativamente secuencialmente compacto en $(\Theta, \|\cdot\|_*)$.
- iii) $\Phi : (\Theta, \|\cdot\|_*) \rightarrow (\Theta, \|\cdot\|_*)$ es secuencialmente continua.
- iv) $F : (\Theta, \|\cdot\|_*) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es secuencialmente continua satisfaciendo

$$\Phi(\bar{\mathbf{x}}) \neq \bar{\mathbf{x}} \implies F(\Phi(\bar{\mathbf{x}})) < F(\bar{\mathbf{x}}).$$

Demostración. $\forall \bar{\mathbf{q}} = (q_1, \dots, q_n) \in \Theta$ tenemos que, por hipótesis, para cada componente i -ésima existen $N_i, M_i \in \mathbb{R}$ tales que $N_i \leq q'_i \leq M_i \forall t \in [0, T]$

$$\|q'_i\|_\infty \leq C_i := \max\{|N_i|, |M_i|\} \implies \|q_i\|_\infty < D_i := \alpha + C_i \cdot T.$$

Sea

$$\mathbb{O} := [0, T] \times \prod_{i=1}^n [-D_i, D_i] \times \prod_{i=1}^n [-C_i, C_i]$$

y sean $f_i : [0, T] \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones asociadas a la ecuación de Euler i -ésima⁵ de $F_{\bar{\mathbf{q}}}^i$

$$z_i''(t) = f_i(t, q_1(t), \dots, z_i(t), \dots, q_n(t), q_1'(t), \dots, z_i'(t), \dots, q_n'(t))$$

Sean

$$A_i := \max_{\mathbb{O}} f_i(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n),$$

$$\max_{\mathbb{O}} \left| \frac{\partial H_i(t, \bar{\mathbf{z}}(t), \bar{\mathbf{z}}'(t))}{\partial z_i} z_i' \right| = c_i,$$

$$\max_{\mathbb{O}} \left| \frac{\partial H_i(t, \bar{\mathbf{z}}(t), \bar{\mathbf{z}}'(t))}{\partial t} \right| = d_i,$$

$$\min_{\mathbb{O}} \left| \frac{\partial H_i(t, \bar{\mathbf{z}}(t), \bar{\mathbf{z}}'(t))}{\partial z_i'} \right| = e_i.$$

Sea $\phi_i(\bar{\mathbf{q}}) = (q_1, \dots, q_i^*, \dots, q_n)$, es decir, que q_i^* minimiza $F_{\bar{\mathbf{q}}}^i$ y, por tanto, $\phi_i(\bar{\mathbf{q}})$ verifica la proposición 6.1. Así, tendremos que:

- Si $q_i^{*'}$ es punto de discontinuidad de $\left(L_{\bar{\mathbf{q}}}^i \right)_{z_i'}$, entonces, por hipótesis, $q_i^{*'}(t) = 0$, de donde $q_i^{*''}(t) = 0$.

- Si $H_{i \min} < H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i^{*'}(t)) < H_{i \max}$, q_i^* satisface la ecuación de Euler de $F_{\bar{\mathbf{q}}}^i$, luego

$$q_i^{*''}(t) = f_i(t, q_1(t), \dots, q_i^*(t), \dots, q_n(t), q_1'(t), \dots, q_i^{*'}(t), \dots, q_n'(t)) \leq A_i.$$

- Si $H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i^{*'}(t)) = H_{i \min}$ o $H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i^{*'}(t)) = H_{i \max}$, calculando la derivada total respecto de t ,

⁵Para cada componente i -ésima ha de verificarse la ecuación de Euler:

$$z_i''(t) = \frac{L_{z_i} - L_{z_i t} - L_{z_i' z_i} z_i'}{L_{z_i' z_i'}}.$$

En el término correspondiente a $L_{z_i' z_i}$ queda descartado que puedan aparecer caudales de otras centrales hidráulicas, (z_j') , pues $\frac{\partial^2 H_i}{\partial z_i' \partial z_j'} = 0$.

$$\frac{\partial H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i'^*(t))}{\partial t} + \frac{\partial H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i'^*(t))}{\partial z_i} q_i'^*(t) + \frac{\partial H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i'^*(t))}{\partial z_i'} q_i^{*''}(t) = 0$$

de donde

$$q_i^{*''}(t) = \frac{\frac{\partial H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i'^*(t))}{\partial z_i} q_i'^*(t) - \frac{\partial H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i'^*(t))}{\partial t}}{\frac{\partial H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i'^*(t))}{\partial z_i'}}. \quad (1)$$

Por tanto,

$$|q_i^{*''}(t)| \leq \frac{\left| \frac{\partial H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i'^*(t))}{\partial z_i} q_i'^*(t) \right| + \left| \frac{\partial H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i'^*(t))}{\partial t} \right|}{\left| \frac{\partial H_i(t, \bar{\mathbf{q}}_i^*(t), \bar{\mathbf{q}}_i'^*(t))}{\partial z_i'} \right|} \leq \frac{c_i + d_i}{e_i} = \aleph_i$$

y, en definitiva,

$$|q_i^{*''}(t)| \leq B_i := \text{Max}\{A_i, \aleph_i\}$$

Tomemos $M := \max_{i=1, \dots, n} \{B_i\}$.

i) Si $\bar{\mathbf{q}} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{U}_M$, por los razonamientos antes realizados, se verifica que

$$\|\phi_i(\bar{\mathbf{q}})\|_\infty \leq M \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Y, obviamente, siendo $\Phi = \phi_n \circ \dots \circ \phi_1$, tenemos que

$$\|\Phi(\bar{\mathbf{q}})\|_\infty \leq M.$$

Además, $q_i^* \in \hat{C}^2 \quad \forall i = 1, \dots, n$, puesto que, o bien satisface la ecuación de Euler del funcional, o bien verifica la ecuación (1), o $q_i^{*''}(t) = 0$, por lo que sólo será discontinua en aquellos puntos donde lo sea $H_{z_i'}$.

Por tanto, $\Phi(\bar{\mathbf{q}}) \in \mathbb{U}_M$.

ii) Sea $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{U}_M$. Por las consideraciones realizadas anteriormente, podemos afirmar que $\|\bar{\mathbf{q}}_m\|_\infty < \max_{i=1, \dots, n} \{D_i\}$, $\|\bar{\mathbf{q}}_m'\|_\infty < \max_{i=1, \dots, n} \{C_i\}$ y $\|\bar{\mathbf{q}}_m''\|_\infty < M$; por tanto, las sucesiones $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, $\{\bar{\mathbf{q}}_m'\}_{m \in \mathbb{N}}$ y $\{\bar{\mathbf{q}}_m''\}_{m \in \mathbb{N}}$ son uniformemente acotadas. Así pues, $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ y $\{\bar{\mathbf{q}}_m'\}_{m \in \mathbb{N}}$, en virtud del lema 6.2, son equicontinuas y estamos en condiciones de utilizar el teorema de Arzela-Ascoli, que nos asegura que existe una subsucesión $\{\bar{\mathbf{q}}_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente a un cierto $\bar{\mathbf{q}} \in \Theta$. Además, en virtud del lema 6.3, $\{\bar{\mathbf{q}}_{m_k}'\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge también uniformemente a $\bar{\mathbf{q}}'$. En definitiva, existe una subsucesión $\{\bar{\mathbf{q}}_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente en el espacio topológico $(\Theta, \|\cdot\|_*)$.

iii) Sea la sucesión $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ convergente en $(\Theta, \|\cdot\|_*)$. Supongamos que $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ y $\{\bar{\mathbf{q}}_m'\}_{m \in \mathbb{N}}$ convergen uniformemente a $\bar{\mathbf{q}}$ y $\bar{\mathbf{q}}'$ respectivamente.

Como para cada $m \in \mathbb{N}$, $\bar{\mathbf{q}}_m \in (C^1[0, T])^n$, en virtud de la proposición 6.1, $\phi_i(\bar{\mathbf{q}}_m) \in (C^1[0, T])^n$; de donde deducimos que $\{\phi_i(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada y equicontinua en Θ . La aplicación reiterada de este razonamiento nos asegura que $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada y equicontinua en Θ .

Además, como $\{\phi_i(\dot{\bar{\mathbf{q}}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}} \in (C^0[0, T])^n$, sin más que tomar el máximo de las cotas para cada una de ellas, resulta que $\{\Phi(\dot{\bar{\mathbf{q}}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada.

Por otro lado, siguiendo las consideraciones hechas al comienzo de esta demostración, al aplicar ϕ_i , cada componente i -ésima, $q_{m,i}^{**}$, de $\{\phi_i(\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ verifica que está acotada. Al considerar la composición $\Phi = \phi_n \circ \cdots \circ \phi_1$ tendremos asegurada la acotación de $q_{m,i}^{**} \forall i = 1, \dots, n$, es decir, $\{\Phi(\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada y, teniendo en cuenta el lema 6.2, podemos afirmar que $\{\Phi(\dot{\bar{\mathbf{q}}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ es equicontinua en Θ .

Al ser $\{\Phi(\bar{\mathbf{q}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ y $\{\Phi(\dot{\bar{\mathbf{q}}}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ uniformemente acotadas y equicontinuas en Θ , la continuidad secuencial de Φ está asegurada por el corolario 6.3.

iv) Si $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a $\bar{\mathbf{q}} \in \Theta$ con la topología $\|\cdot\|^*$, significa que $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ y $\{\bar{\mathbf{q}}'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ convergen uniformemente a $\bar{\mathbf{q}}$ y a $\bar{\mathbf{q}}'$ respectivamente.

Tomando $\mathbb{L}_{\bar{\mathbf{z}}}(t) := L(t, \bar{\mathbf{z}}(t), \bar{\mathbf{z}}'(t))$, estamos en condiciones de utilizar el lema 6.4, que nos garantiza que

$$\{\mathbb{L}_{\bar{\mathbf{q}}_m}\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformemente a } \mathbb{L}_{\bar{\mathbf{q}}}$$

y, por tanto,

$$\left\{ F(\bar{\mathbf{q}}_m) = \int_0^T L(s, \bar{\mathbf{q}}_m(s), \bar{\mathbf{q}}'_m(s)) ds \right\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge a } F(\bar{\mathbf{q}}) = \int_0^T L(s, \bar{\mathbf{q}}(s), \bar{\mathbf{q}}'(s)) ds.$$

Por otro lado, como se desprende de la propia definición de ϕ_i , es obvio que si $\phi_i(\bar{\mathbf{x}}) \neq \bar{\mathbf{x}}$ entonces $F(\phi_i(\bar{\mathbf{x}})) < F(\bar{\mathbf{x}})$, de donde

$$\Phi(\bar{\mathbf{x}}) \neq \bar{\mathbf{x}} \implies F(\Phi(\bar{\mathbf{x}})) < F(\bar{\mathbf{x}}).$$

■

Teorema 6.4 Para todo $\bar{\mathbf{q}}_0 \in \mathbb{U}_M$, la sucesión generada por el algoritmo, $\{\bar{\mathbf{q}}_m = \Phi(\bar{\mathbf{q}}_{m-1})\}_{m \in \mathbb{N}}$, posee una subsucesión que converge uniformemente y su límite es un punto fijo de Φ . Además, cualquier subsucesión convergente de $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ convergerá a un punto fijo de Φ .

Demostración. Basta demostrar que efectivamente la sucesión $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{U}_M$ posee una subsucesión que converge uniformemente y, como en virtud de la proposición 6.3, tenemos garantizada la verificación de las hipótesis del teorema 6.2, podemos concluir que $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión que converge uniformemente a un punto fijo de Φ . Por el propio teorema 6.2 tendremos asegurado que cualquier subsucesión convergente de $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ convergerá a un punto fijo de Φ .

Vemos, por tanto, que la sucesión $\{\bar{\mathbf{q}}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{U}_M$ posee una subsucesión que converge uniformemente.

Para cualquier $\bar{\mathbf{q}}_0 \in \mathbb{U}_M$, por (i) de la proposición 6.3, sabemos que la sucesión $\bar{\mathbf{q}}_m = \Phi(\bar{\mathbf{q}}_{m-1})$ está contenida en \mathbb{U}_M y, siguiendo un razonamiento análogo al punto (ii) de esta misma proposición, podemos concluir que existe una subsucesión $\{\bar{\mathbf{q}}_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge en Θ . ■

Por tanto, bajo las condiciones establecidas, el algoritmo desarrollado, para el problema hidrotérmico generalizado con restricciones, es convergente.

Queremos hacer notar que, si consideramos el problema sin restricciones, la sucesión generada puede no converger e, incluso, puede ocurrir también que el problema carezca de solución. De hecho, cualquier problema que conste de dos centrales hidráulicas de funciones de generación efectiva

$$H_1(t, z_1(t), z'_1(t)) = f(z_1(t)) \cdot z'_1(t) \quad \text{y} \quad H_2(t, z_2(t), z'_2(t)) = g(t) \cdot z'_2(t)$$

respectivamente, no va a tener solución para ninguna pareja de volúmenes disponible.

En efecto, consideremos el sistema hidrotérmico formado por la térmica equivalente y dos centrales hidráulicas de generación efectiva señalada anteriormente. Sea $\bar{\mathbf{q}}(t) = (q_1(t), q_2(t)) \in \Theta := \{\bar{\mathbf{z}} \in (C^1[0, T])^2 / \bar{\mathbf{z}}(0) = 0, \bar{\mathbf{z}}(T) = \bar{\mathbf{b}}\}$. En esta situación,

$$\begin{aligned} H_{\bar{\mathbf{q}}}^1(t, z_1, z'_1) &= H_1(t, z_1(t), z'_1(t)) + H_2(t, q_2(t), q'_2(t)) \\ H_{\bar{\mathbf{q}}}^2(t, z_2, z'_2) &= H_1(t, q_1(t), q'_1(t)) + H_2(t, z_2(t), z'_2(t)), \end{aligned}$$

consideramos la minimización del funcional $F_{\bar{\mathbf{q}}}^i$,

$$F_{\bar{\mathbf{q}}}^i(z_i) = \int_0^T \Psi (P_d(t) - H_{\bar{\mathbf{q}}}^i(t, z_i(t), z'_i(t))) dt,$$

sobre la componente i -ésima suponiendo un determinado comportamiento para la otra central hidráulica (volumen y caudal fijos).

En este caso, si $\bar{\mathbf{q}}(t)$ es mínimo del funcional F , ha de verificarse, para cada $i = 1, 2$, el teorema fundamental de coordinación⁶ correspondiente.

Entonces, para $i = 1$, tendremos que

$$\begin{aligned} &\Psi'(P_d(t) - H_1(t, q_1(t), q'_1(t)) - H_2(t, q_2(t), q'_2(t))) \cdot f(q_1(t)) \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left[-\int_0^t \frac{f'(q_1(s)) \cdot q'_1(s)}{f(q_1(s))} ds\right] = K_1 \end{aligned}$$

y, para la componente correspondiente a la segunda central hidráulica, $i = 2$,

$$\Psi'(P_d(t) - H_1(t, q_1(t), q'_1(t)) - H_2(t, q_2(t), q'_2(t))) \cdot g(t) = K_2.$$

⁶ Como no hay restricciones sobre las funciones admisibles, la extremal solución del problema debe verificar la ecuación de Euler para cada i , es decir, existirán K_1, K_2 tales que $\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^1(t) = K_1$ y $\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^2(t) = K_2$.

De la primera ecuación, deducimos que la potencia térmica óptima debe ser constante.

Proposición 6.4 *Para toda extremal $\bar{q}_1(t)$ del funcional F en las condiciones antes señaladas existe una constante, $K_{\bar{q}} = P_d(0) - f(q_1(0)) \cdot q_1'(0) - g(0) \cdot q_2'(0)$, verificando que*

$$P_d(t) - f(q_1(t)) \cdot q_1'(t) - g(t) \cdot q_2'(t) = K_{\bar{q}}, \quad \forall t \in [0, T]$$

Demostración. Si observamos la primera ecuación obtenida del teorema fundamental de coordinación,

$$\begin{aligned} & \Psi'(P_d(t) - H_1(t, q_1(t), q_1'(t)) - H_2(t, q_2(t), q_2'(t))) \cdot f(q_1(t)) \cdot \\ & \cdot \exp\left[-\int_0^t \frac{f'(q_1(s)) \cdot q_1'(s)}{f(q_1(s))} ds\right] = K_1, \end{aligned}$$

tendremos que

$$\Psi'(P_d(t) - f(q_1(t)) \cdot q_1'(t) - g(t) \cdot q_2'(t)) \cdot f(q_1(t)) \cdot \exp[-\ln f(q_1(t)) + \ln f(q_1(0))] = K_1;$$

como $q_1(0) = 0$, entonces

$$\Psi'(P_d(t) - f(q_1(t)) \cdot q_1'(t) - g(t) \cdot q_2'(t)) \cdot \frac{f(0)}{f(q_1(t))} = K_1,$$

de donde

$$\Psi'(P_d(t) - f(q_1(t)) \cdot q_1'(t) - g(t) \cdot q_2'(t)) = \tilde{K}$$

y

$$P_d(t) - f(q_1(t)) \cdot q_1'(t) - g(t) \cdot q_2'(t) = (\Psi')^{-1}(\tilde{K}) = K_{\bar{q}},$$

es decir, la potencia térmica óptima es constante. ■

Al verificarse, por tanto, que

$$P_d(t) - H_1(t, q_1(t), q_1'(t)) - H_2(t, q_2(t), q_2'(t)) = K_{\bar{q}}, \quad \forall t \in [0, T],$$

de la ecuación obtenida para $i = 2$,

$$\Psi'(P_d(t) - H_1(t, q_1(t), q_1'(t)) - H_2(t, q_2(t), q_2'(t))) \cdot g(t) = K_2,$$

obtenemos que

$$\Psi'(K_{\bar{q}}) \cdot g(t) = K_2,$$

de donde

$$g(t) = \text{constante}$$

Por tanto, el problema (para cualquier $g(t) \neq \text{constante}$) no tiene solución.

6.4.3. Aumento de la velocidad de convergencia

Como ya hemos comentado, la diferencia entre los distintos métodos de descenso radica en la regla mediante la cual se selecciona la coordenada de descenso en cada paso del algoritmo. En el caso del cíclico, se sigue el orden canónico, desde la primera coordenada hasta la última. En el caso del método de descenso coordinado de Gauss-Southwell se selecciona la coordenada del gradiente⁷ con mayor magnitud (mayor valor absoluto), lo que aumenta la rapidez de convergencia.

Inspirados en esta idea y con el objetivo de aumentar la velocidad de convergencia del método propuesto, tratamos de adaptar la versión del algoritmo de Gauss-Southwell a nuestro problema variacional con restricciones.

Proponemos, a continuación, un método de selección de "coordenada" de descenso introduciendo un concepto sustitutorio del gradiente que mide, en algún sentido, el desajuste (alejamiento) de cada componente con respecto a la condición de minimalidad proporcionada por el teorema de coordinación.

Con este fin vamos a considerar la función $\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i(t)$ en el conjunto de instantes χ donde a la componente i -ésima no le afecten las discontinuidades de $L_{z'_i}$ ni estén activas las restricciones:

$$\mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i(t) = -L_{z'_i}(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_{z_i}(s, \bar{\mathbf{q}}(s), \bar{\mathbf{q}}'(s))}{H_{z'_i}(s, \bar{\mathbf{q}}(s), \bar{\mathbf{q}}'(s))} ds \right]$$

$$\chi = \{t \in [0, T] \mid q'_i(t) \neq 0 \text{ y } H_{i \text{ mín}} < H_i(t, \bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{q}}'(t)) < H_{i \text{ máx}} \ \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Definición 6.7 Llamaremos desajuste i -ésimo de $\bar{\mathbf{q}}$ al número positivo

$$\delta_{\bar{\mathbf{q}}}^i = \max_{t \in \chi} \mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i(t) - \min_{t \in \chi} \mathbb{Y}_{\bar{\mathbf{q}}}^i(t).$$

Se determina, en cada iteración k -ésima, el valor de los desajustes en $\bar{\mathbf{q}}$ para todo $i = 1, \dots, n$ y se ordenan de forma decreciente. Denotemos por $\sigma_k \in \Sigma_n$ la permutación que establece el orden inducido por los desajustes en la iteración k -ésima. El algoritmo propuesto efectúa, a lo largo de esta iteración, el descenso siguiendo este orden.

Denotaremos por $\tilde{\Phi}$ a la *aplicación descendente* $\tilde{\Phi} : \Theta \longrightarrow \Theta$ tal que para cada $\bar{\mathbf{q}} \in \Theta$

$$\tilde{\Phi}(\bar{\mathbf{q}}) = (\phi_{\sigma_k(n)} \circ \phi_{\sigma_k(n-1)} \circ \dots \circ \phi_{\sigma_k(2)} \circ \phi_{\sigma_k(1)})(\bar{\mathbf{q}}),$$

siendo $\sigma \in \Sigma_n$ la permutación que establece el orden inducido por los desajustes.

En cada iteración k -ésima del algoritmo se habrán "minimizado las n centrales hidráulicas" a través de las aplicaciones minimizadoras i -ésimas en el orden establecido por σ_k , obteniéndose el nuevo elemento, $\bar{\mathbf{q}}_k$, admisible,

$$\bar{\mathbf{q}}_k = \tilde{\Phi}(\bar{\mathbf{q}}_{k-1}) = (\phi_{\sigma_k(n)} \circ \phi_{\sigma_k(n-1)} \circ \dots \circ \phi_{\sigma_k(2)} \circ \phi_{\sigma_k(1)})(\bar{\mathbf{q}}_{k-1})$$

⁷Obviamente se supone que la función es diferenciable.

La demostración de la convergencia del algoritmo en $(\Theta, \|\cdot\|_*)$, considerando como conjunto solución los puntos fijos, no ha sido establecida, por el momento. Sin embargo, sí es posible justificar la convergencia del algoritmo en un número finito de pasos sin más que considerar como conjunto solución el siguiente:

$$\{\bar{\mathbf{q}} \mid F[\bar{\mathbf{q}}] - F[\tilde{\Phi}(\bar{\mathbf{q}})] < \varepsilon\}$$

es decir, el conjunto de elementos admisibles sobre los que, tras actuar una iteración del algoritmo, el funcional no ha disminuido más de ε . No hay más que tener en cuenta que el valor del funcional está acotado inferiormente y, en consecuencia, no puede darse una sucesión infinita de descensos mayores que ε .

En la sección siguiente, mostraremos un ejemplo en el que comparamos, mediante los resultados de dos tests, el método desarrollado en este capítulo (basado en el descenso coordinado cíclico) con el obtenido con la modificación propuesta para aumentar la velocidad de convergencia (basada en el método de Gauss-Southwell).

6.5. APLICACIÓN A PROBLEMAS HIDROTÉRMICOS

Mostramos, a continuación, varios ejemplos que ponen de manifiesto la importancia de la teoría desarrollada en este capítulo. Consideramos un sistema hidrotérmico que conste de ocho centrales térmicas y utilizaremos diferentes modelos de red hidráulica en nuestro estudio.

En todos los ejemplos tomaremos como sistema térmico el formado por las centrales térmicas de la red Asturiana. Los datos de estas centrales son los representados en la tabla I del ejemplo 3.1, siendo las unidades de los coeficientes las ya reseñadas en este mismo ejemplo al igual que la equivalente minimizadora, $\Upsilon(x)$, obtenida en el apartado (c) para funciones de costo incorporando pérdidas de transmisión del sistema y restricciones en sus potencias generadas.

Consideramos que la red hidráulica tiene varias cuencas de plantas hidráulicas distribuidas en diferentes ríos, así como plantas aisladas. En algunos casos, supondremos que el caudal de descarga de una central va a influir en el caudal de entrada de la central inmediatamente aguas abajo, esto es, diremos que las centrales están acopladas hidráulicamente y consideraremos que las pérdidas de transmisión de las centrales hidráulicas están expresadas por el modelo de Kirchmayer.

En el primer ejemplo, realizaremos el estudio considerando siete centrales hidráulicas, con la configuración de red hidráulica que mostramos en la figura 6.1, teniendo dos de ellas capacidad de bombeo. En el segundo ejemplo, verificaremos la rapidez de convergencia del método inspirado en Gauss-Southwell frente al desarrollado en la sección 6.4.

Ejemplo 6.1 *En este ejemplo supondremos que el sistema hidrotérmico consta de siete centrales hidráulicas y que la potencia de generación activa P_{hi} de la central*

hidráulica i -ésima $i = 1, \dots, 5$, está dada por

$$P_{hi}(t) = A_i(t)z'_i(t) - B_iz'_i(t) [z_i(t) - Acop_i(t)];$$

así, la función de generación hidráulica efectiva es

$$H_i(t) = P_{hi}(t) - b_{ii} (P_{hi}(t))^2,$$

donde $A_i(t)$, y B_i son los coeficientes

$$A_i(t) = \frac{1}{G_i} B_{y_i} (S_{0i} + t \cdot i_i); \quad B_i = \frac{B_{y_i}}{G_i};$$

y $Acop_i(t)$ representa el acoplamiento hidráulico entre centrales. Asimismo consideraremos que las centrales hidráulicas 6 y 7 tienen capacidad de bombeo siendo su función de generación hidráulica la función definida a trozos por:

$$P_h(t, z(t), z'(t)) := \begin{cases} A(t) \cdot z'(t) - B \cdot z(t) \cdot z'(t) & \text{si } z'(t) > 0 \\ M \cdot z'(t) & \text{si } z'(t) \leq 0 \end{cases}$$

Así, la función de generación hidráulica efectiva es:

$$H(t, z(t), z'(t)) := \begin{cases} P_h(t, z(t), z'(t)) - b_{ii} P_h^2(t, z(t), z'(t)) & \text{si } z'(t) > 0 \\ P_h(t, z(t), z'(t)) & \text{si } z'(t) \leq 0, \end{cases}$$

Consideremos que las centrales están dispuestas como indicamos en la figura siguiente.

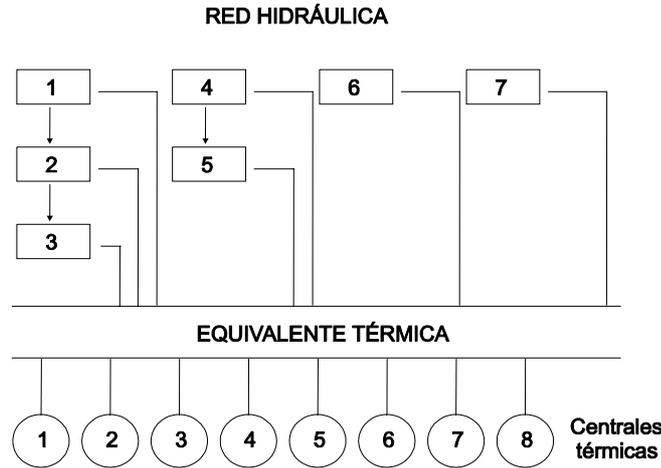


Fig. 6.1. Sistema hidrotérmico.

En este sistema tenemos que

$$Acop_1(t) = 0; \quad Acop_2(t) = z_1(t); \quad Acop_3(t) = z_2(t); \quad Acop_4(t) = 0; \quad y \quad Acop_5(t) = z_4(t).$$

En el caso de las centrales de bombeo tomaremos, para la central hidráulica 6, $M = 5,71936 \cdot 10^{-6}$ y, para la central hidráulica 7, $M = 5,88794 \cdot 10^{-6}$.

Expresamos los datos de las centrales hidráulicas en la siguiente tabla.

Tabla I. Coeficientes de las centrales hidráulicas.

i	1	2	3	4
$G_i (m^4/h.Mw)$	$526,315 \cdot 10^3$	$526,315 \cdot 10^3$	$570,834 \cdot 10^3$	$536,315 \cdot 10^3$
$b_i (m^3)$	$141,6 \cdot 10^5$	$141,6 \cdot 10^5$	$791,2 \cdot 10^5$	$141,6 \cdot 10^5$
$b_{ii} (1/Mw)$	$220 \cdot 10^{-6}$	$220 \cdot 10^{-6}$	$160 \cdot 10^{-6}$	$200 \cdot 10^{-6}$
$i_i (m^3/h)$	$101,952 \cdot 10^5$	$101,952 \cdot 10^5$	$301,952 \cdot 10^5$	$101,952 \cdot 10^5$
$S_{0_i} (m^3)$	$203,904 \cdot 10^9$	$203,904 \cdot 10^9$	$407,808 \cdot 10^8$	$203,904 \cdot 10^9$
$B_{y_i} (m^{-2})$	$149,51 \cdot 10^{-12}$	$149,51 \cdot 10^{-12}$	$149,51 \cdot 10^{-11}$	$159,51 \cdot 10^{-12}$
$P_{i\text{máx}} (Mw)$	60	60	390	60

i	5	6	7
$G_i (m^4/h.Mw)$	$580,834 \cdot 10^3$	$546,315 \cdot 10^3$	$540,834 \cdot 10^3$
$b_i (m^3)$	$691,2 \cdot 10^5$	$101,6 \cdot 10^5$	$91,2 \cdot 10^5$
$b_{ii} (1/Mw)$	$170 \cdot 10^{-6}$	$220 \cdot 10^{-6}$	$160 \cdot 10^{-6}$
$i_i (m^3/h)$	$401,952 \cdot 10^5$	$101,952 \cdot 10^5$	$101,952 \cdot 10^5$
$S_{0_i} (m^3)$	$407,808 \cdot 10^8$	$203,904 \cdot 10^9$	$207,808 \cdot 10^8$
$B_{y_i} (m^{-2})$	$159,51 \cdot 10^{-11}$	$149,51 \cdot 10^{-12}$	$149,51 \cdot 10^{-12}$
$P_{i\text{máx}} (Mw)$	360	60	80

Consideraremos el problema de coordinación hidrotérmica a corto plazo en un intervalo de optimización $[0, 24]$ con una discretización de 96 subintervalos.

Mostramos en la figura 6.2 la gráfica de la potencia demandada y la potencia óptima de la térmica equivalente.

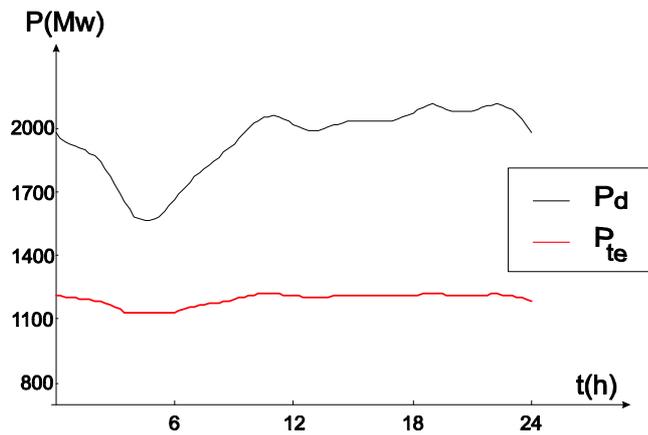


Fig. 6.2. Potencia demandada $P_d(t)$ y potencia térmica óptima $P_{te}(t)$.

En las figuras 6.3 y 6.4 representamos la potencia óptima de cada una de las

centrales térmicas y la potencia óptima de las centrales hidráulicas respectivamente.

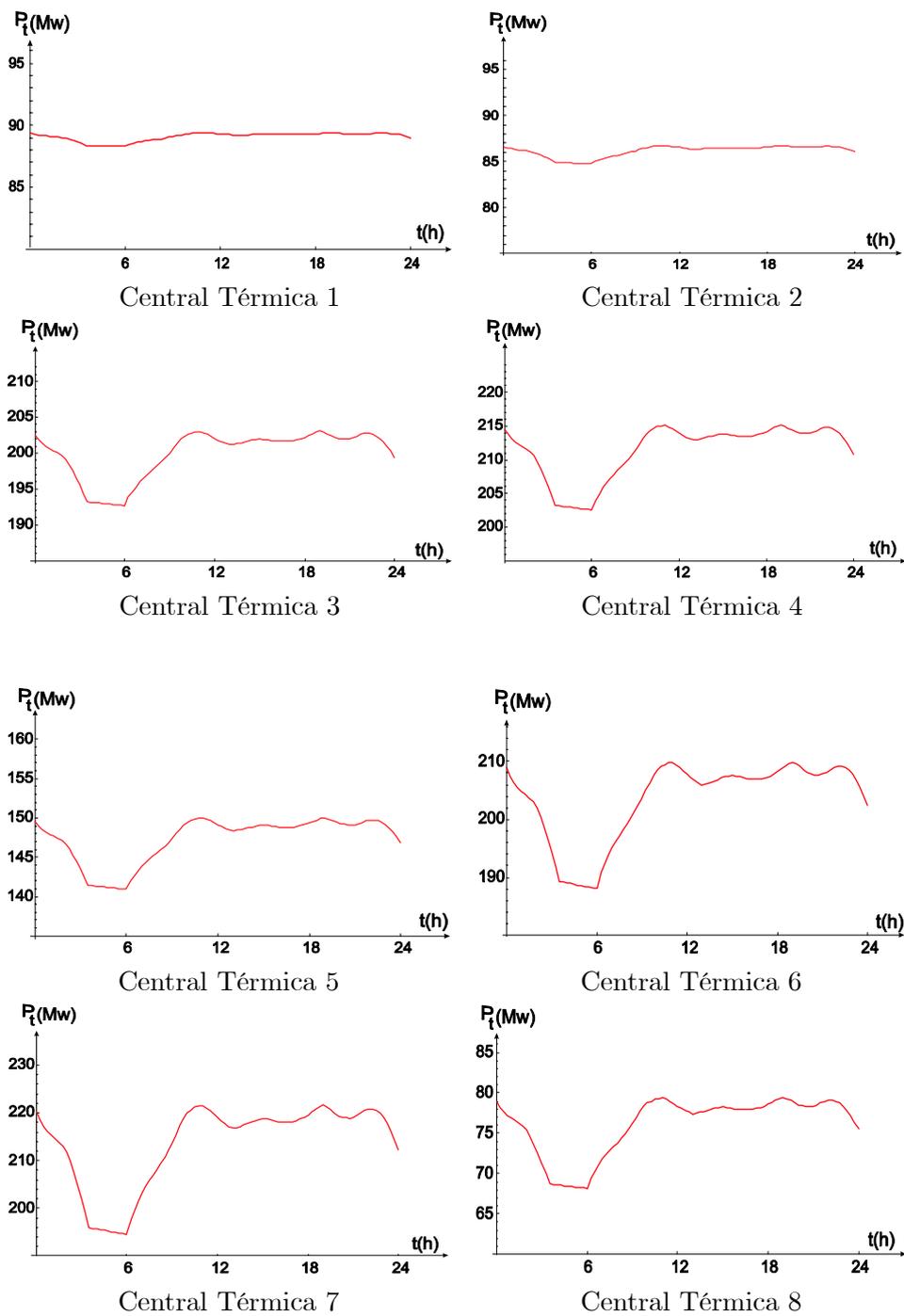
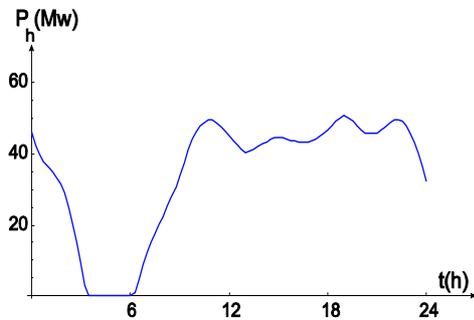
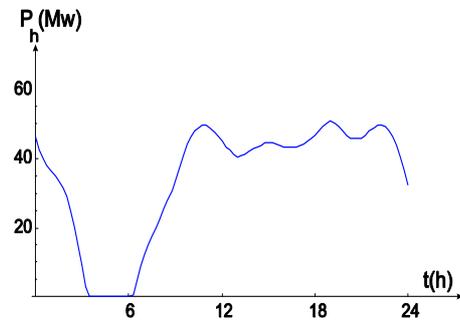


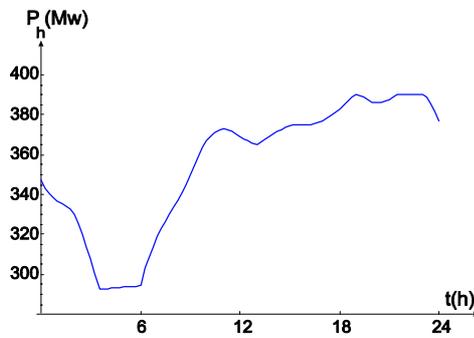
Fig. 6.3. Potencia Térmica Óptima.



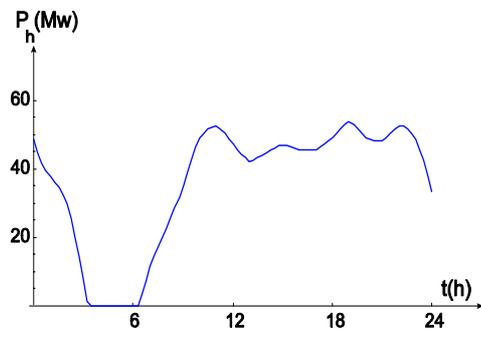
Central Hidráulica 1



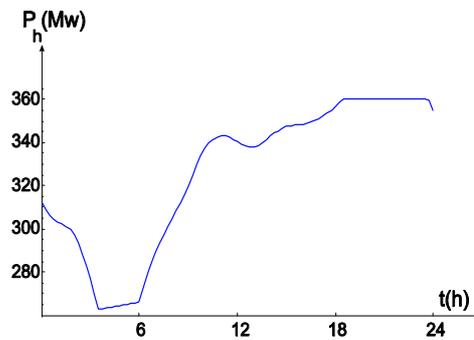
Central Hidráulica 2



Central Hidráulica 3



Central Hidráulica 4



Central Hidráulica 5

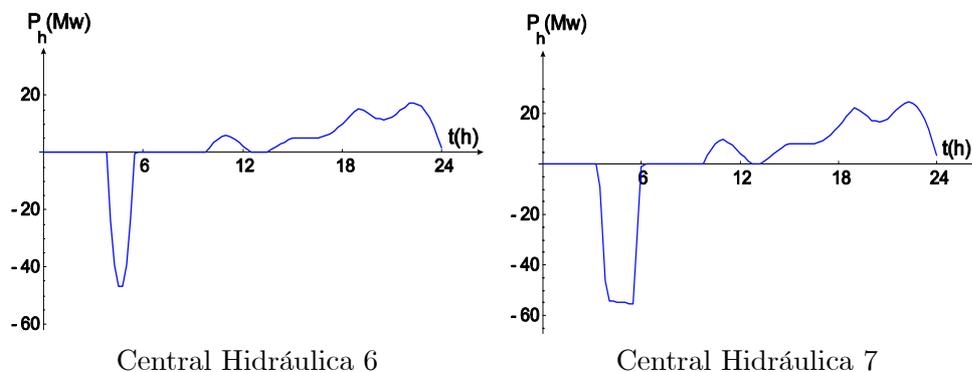


Fig. 6.4. Potencia Hidráulica Óptima.

Como se puede observar en la Fig. 6.4, la potencia generada por las plantas 3 y 5 (con un volumen de agua grande b) está limitada por el máximo técnico 390 y 360 respectivamente, mientras que las plantas 1, 2 y 4 (con menos agua disponible) no alcanzan su máximo valor. Las tres centrales presentan intervalos (de mayor o menor amplitud) donde se apagan, coincidiendo con el valle de la potencia demandada. Asimismo, las centrales con capacidad de bombeo 6 y 7 tienen un comportamiento muy similar bombeando agua en estos instantes de baja demanda.

Utilizaremos el método de la secante para determinar el valor de K_i para cada una de las centrales hidráulicas para el cual $q_{K_i}(T) - b_i = 0$. Tomamos como referencia para acotar el error la suma de las tolerancias permitidas a cada central, tol_i , siendo, en este caso, tol_i la diferencia, en valor absoluto, de la K_i determinada de una iteración y la siguiente. El algoritmo muestra una rápida convergencia a la solución óptima, son suficientes 8 iteraciones para obtener un error menor que el propuesto inicialmente (10^{-7}). En la Fig. 6.5 se muestra, con escala logarítmica, la variación del error relativo en valor absoluto.

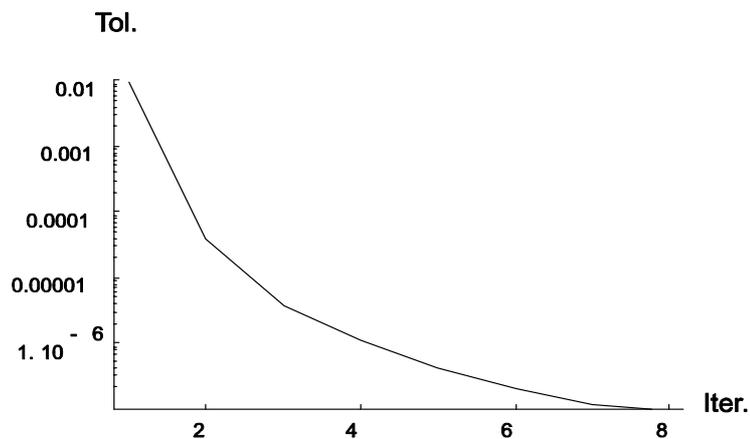


Fig. 6.5. Convergencia a la solución óptima.

Ejemplo 6.2 En este ejemplo comparamos el método desarrollado en este capítulo (tipo CCD) con el propuesto (tipo Gauss-Southwell) para aumentar la rapidez de convergencia.

Para ello, se ha contemplado en el programa, implementado con el Mathematica, la opción de realizarlo o bien adaptando la versión del algoritmo de Gauss-Southwell al problema multidimensional con restricciones que estamos considerando o bien la versión del tipo CCD.

En la figura 6.6 presentamos la velocidad de convergencia de cada uno de los métodos, para el sistema hidrotérmico del ejemplo 6.1, considerando el error menor que $(5, 5 \cdot 10^{-12})$. Obsérvese que para errores grandes el comportamiento de ambos métodos es muy similar; sin embargo, al exigir errores más pequeños se incrementa la velocidad de convergencia en el método Gauss-Southwell respecto al CCD.

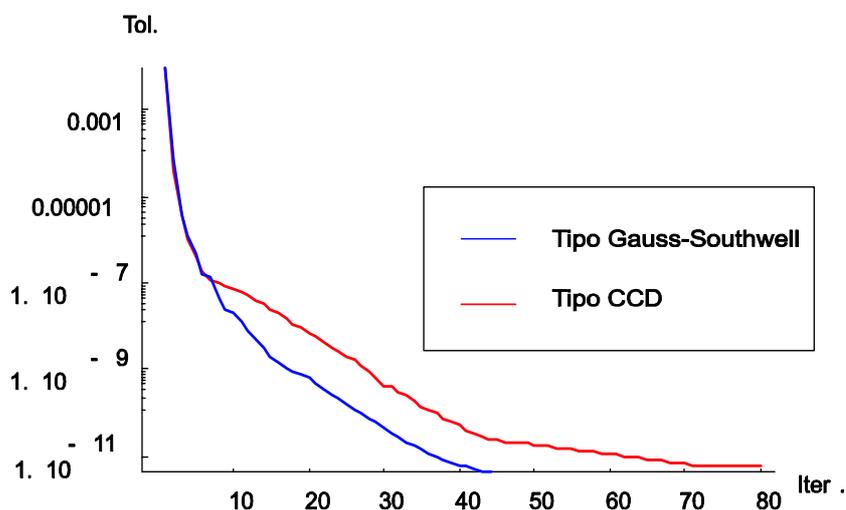


Fig. 6.6. Convergencia con 7 centrales hidráulicas.

A continuación, aplicamos ambos métodos a un sistema hidrotérmico que consta de veinte centrales hidráulicas, cuyos coeficientes han sido obtenidos a partir de datos reales de una central. Hemos considerado que las centrales hidráulicas son de carga variable y que no existe acoplamiento hidráulico entre ellas.

Mostramos en la tabla siguiente la expresión que genera cada uno de los coeficientes de las centrales hidráulicas consideradas.

Tabla II. Datos de los coeficientes

	Central hidráulica i -ésima
G_i ($m^4/h.Mw$)	$526315 + 1000 \cdot i$
b_i (m^3)	$(25 + 5 \cdot i) 10^6$
b_{ii} ($1/Mw$)	$2 \cdot 10^{-4} + 10^{-5} \cdot i$
i_i (m^3/h)	$(10, 18 + i) 10^6$
S_{0i} (m^3)	$(200 + 5 \cdot i) 10^9$
B_{yi} (m^{-2})	$(149, 5 - 2 \cdot i) 10^{-12}$
$P_{i \text{ máx}}$ (Mw)	500

En la fig. 6.7 presentamos la gráfica de la convergencia de ambos métodos para alcanzar la tolerancia fijada que, en este caso, es de (10^{-11}) . Obsérvese de nuevo cómo el método tipo Gauss-Southwell presenta una convergencia mucho más rápida que el método tipo CCD al disminuir el error exigido.

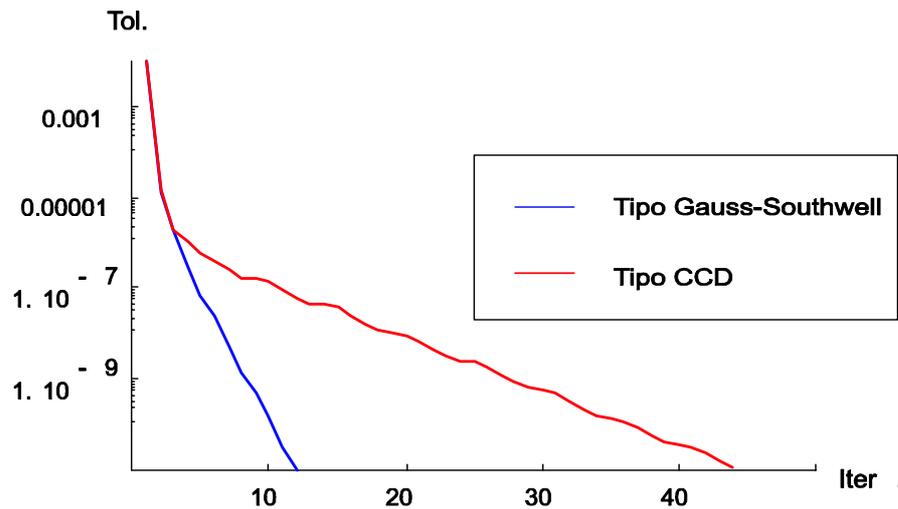


Fig. 6.7. Convergencia con 20 centrales hidráulicas.

También, es muy importante resaltar que el hecho de considerar más centrales hidráulicas no implica que se necesiten más iteraciones para alcanzar la tolerancia fijada. Como vemos en los ejemplos resueltos la velocidad de convergencia depende fundamentalmente de las características del problema a resolver. Esto hace de dicho método una herramienta idónea para trabajar con sistemas de grandes dimensiones.

Capítulo 7

PRIMERA CONDICIÓN DE WEIERSTRASS-ERDMANN. CONJUNTOS MOLDEABLES

7.1. INTRODUCCIÓN

Aunque las funciones admisibles consideradas para el problema de optimización hidrotérmica son de clase \widehat{C}^1 , en [72] se estableció la imposibilidad de existencia de soluciones con puntos angulares en problemas con potencias restringidas. A idéntica conclusión se llegó en el capítulo 5 de la presente tesis para problemas cuyo lagrangiano asociado es no regular (transición suave). Estas ideas y consideraciones han permitido iniciar una línea de trabajo que se interesa por cuestiones relacionadas con la primera condición de Weierstrass-Erdmann, en problemas variacionales con restricciones para las funciones admisibles.

La determinación de las extremales de un funcional pasa por la resolución de una ecuación diferencial de segundo orden (ecuación de Euler) con condiciones de contorno. Al considerar que las funciones admisibles pueden tener puntos angulares, es decir, que los valores extremos del funcional pueden alcanzarse en funciones continuas con derivada continua a trozos \widehat{C}^1 , las extremales del funcional, además de verificar la ecuación de Euler, han de satisfacer las condiciones de Weierstrass-Erdmann en los puntos angulosos.

Las condiciones de Weierstrass-Erdmann aseguran que en los puntos de discontinuidad de q' , siendo q extremal del funcional F , se preserva la continuidad de las funciones:

$$\begin{cases} \text{(i)} & L_{z'}(t, q(t), q'(t)) \\ \text{(ii)} & L(t, q(t), q'(t)) - q'(t)L_{z'}(t, q(t), q'(t)). \end{cases}$$

Ambas condiciones (correctas cuando se trata de extremos fuertes pero solamente cierta la primera para extremos débiles) son de extraordinaria importancia a la hora

de determinar extremales con puntos angulares, permitiendo también demostrar, en ocasiones, la imposibilidad de su existencia.

Cuando se consideran restricciones para las funciones admisibles, dichas condiciones no se cumplen necesariamente, debido a que la extremal correspondiente puede no admitir variaciones bilaterales o, simplemente, no satisface la ecuación de Du-Bois-Reymond.

En este capítulo se presenta, en primer lugar, una novedosa demostración de la primera condición de Weierstrass-Erdmann para extremales con puntos angulares, cuya técnica va a ser aplicable a ciertos problemas variacionales con restricciones para las funciones admisibles.

A continuación, presentaremos una generalización de la primera condición de Weierstrass-Erdmann, donde se establece una condición necesaria para extremales con puntos angulares en problemas con restricciones de un determinado tipo. Introduciremos el concepto de *conjunto moldeable* con el fin de delimitar el tipo de restricciones para las funciones admisibles, ante las cuales la condición anterior va a mantener su validez. Apoyándonos en este concepto, se muestra la aplicabilidad de la nueva demostración al problema del obstáculo, a problemas variacionales con velocidad restringida así como con restricciones de inclusión diferencial.

Por último, presentaremos su aplicación a dos ejemplos: el primero de tipo geométrico y el segundo, el problema hidrotérmico generalizado.

El trabajo desarrollado en este capítulo ha dado lugar a la publicación [20] de Bayón y otros.

7.2. EXTENSIÓN DE LA PRIMERA CONDICIÓN DE WEIERSTRASS-ERDMANN

Al imponer cierto tipo de restricciones de desigualdad a las funciones admisibles, z , de un funcional, $F(z)$, y con determinadas condiciones, se puede establecer una extensión de la primera condición de Weierstrass-Erdmann.

Abordamos, en primer lugar, una nueva demostración [16] de la citada condición de Weierstrass-Erdmann y la definición del concepto de conjunto moldeable en los que basaremos la demostración de la ya mencionada extensión.

7.2.1. Una nueva demostración de la primera condición de Weierstrass-Erdmann

La demostración clásica de la primera condición de Weierstrass-Erdmann se basa en el uso de la variación Gâteaux del funcional en el caso general en que los puntos finales son variables o el empleo de la ecuación de Du-Bois-Reymond satisfecha por las extremales

$$L_{z'}(t, q(t), q'(t)) = \text{const.} + \int_a^t L_z(t, q(s), q'(s)) ds.$$

La demostración que presentamos en este apartado está basada en el análisis de la variación Gâteaux en ciertas direcciones que denotaremos por $h_\varepsilon^{t_0}$, funciones ya definidas en la sección 5 del capítulo 5 de la forma:

Definición Sea $t_0 \in (a, b)$ y $\varepsilon > 0$. Denotamos por $h_\varepsilon^{t_0}$ la función definida en $[a, b]$ del modo:

$$h_\varepsilon^{t_0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [a, t_0 - \varepsilon] \cup [t_0 + \varepsilon, b] \\ (t - t_0 + \varepsilon) & \text{si } t \in [t_0 - \varepsilon, t_0] \\ -(t - t_0 - \varepsilon) & \text{si } t \in [t_0, t_0 + \varepsilon] \end{cases}$$

Nótese que $h_\delta^{t_0} \in \widehat{C}^1[a, b]$, $0 \leq h_\delta^{t_0}(t) \leq \delta$, $\forall t \in [a, b]$, y que

$$(h_\varepsilon^{t_0})'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [a, t_0 - \varepsilon) \cup (t_0 + \varepsilon, b] \\ 1 & \text{si } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0) \\ -1 & \text{si } t \in (t_0, t_0 + \varepsilon). \end{cases}$$

Teorema 7.1 Si $L(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^2)$ y $q \in \widehat{C}^1[a, b]$ es un extremo local (débil) del funcional

$$F(z) = \int_a^b L(t, z(t), z'(t)) dt$$

en el conjunto

$$D = \{z \in \widehat{C}^1[a, b] \mid z(a) = \alpha, z(b) = \beta\},$$

entonces, $\forall t \in [a, b]$, se cumple la primera condición de Weierstrass-Erdmann:

$$L_{z'}(t, q(t), q'(t_-)) = L_{z'}(t, q(t), q'(t_+)).$$

Demostración. Supongamos que $q \in D$ es extremal de F y que para un cierto $t_0 \in [a, b]$ (punto anguloso) se verifica que

$$L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0-})) \neq L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0+})).$$

En este caso llegaremos a la contradicción de que $\delta F(q; h_\varepsilon^{t_0}) \neq 0$, para un cierto $\varepsilon > 0$.

Supongamos, en primer lugar, que

$$L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0-})) < L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0+})).$$

Teniendo en cuenta que $0 \leq h_\varepsilon^{t_0}(t) \leq \varepsilon$, $\forall t \in [a, b]$, es obvio que existe algún $\varepsilon > 0$ (suficientemente pequeño) para el cual se verifica la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)} [L_{z'}(t, q(t), q'(t)) + h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t))] < \\ & < \inf_{t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)} [L_{z'}(t, q(t), q'(t)) - h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t))] \end{aligned}$$

y de esta relación se deduce la siguiente cadena de desigualdades:

$$I_1 = \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0} [L_{z'}(t, q(t), q'(t)) + h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t))] dt \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \varepsilon \cdot \sup_{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)} [L_{z'}(t, q(t), q'(t)) + h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t))] < \\
 &< \varepsilon \cdot \inf_{t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)} [L_{z'}(t, q(t), q'(t)) - h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t))] \leq \\
 &\leq \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} [L_{z'}(t, q(t), q'(t)) - h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t))] dt = I_2.
 \end{aligned}$$

Es bien conocido que $\forall w \in \widehat{C}^1[a, b]$

$$\delta F(q; w) = \int_a^b [w(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t)) + w'(t) \cdot L_{z'}(t, q(t), q'(t))] dt.$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
 h_\varepsilon^{t_0}(t) &= 0, \quad \forall t \in [a, t_0 - \varepsilon] \cup [t_0 + \varepsilon, b] \\
 (h_\varepsilon^{t_0})'(t) &= 0, \quad \forall t \in [a, t_0 - \varepsilon] \cup (t_0 + \varepsilon, b],
 \end{aligned}$$

se cumple

$$\delta F(q; h_\varepsilon^{t_0}) = \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} [h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t)) + (h_\varepsilon^{t_0})'(t) \cdot L_{z'}(t, q(t), q'(t))] dt$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}
 \delta F(q; h_\varepsilon^{t_0}) &= \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0} [h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t)) + 1 \cdot L_{z'}(t, q(t), q'(t))] dt + \\
 &+ \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} [h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t)) + (-1) \cdot L_{z'}(t, q(t), q'(t))] dt,
 \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 \delta F(q; h_\varepsilon^{t_0}) &= \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0} [L_{z'}(t, q(t), q'(t)) + h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t))] dt \\
 &- \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} [L_{z'}(t, q(t), q'(t)) - h_\varepsilon^{t_0}(t) \cdot L_z(t, q(t), q'(t))] dt \\
 &= I_1 - I_2 < 0.
 \end{aligned}$$

Si, por el contrario, suponemos que

$$L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_0-)) > L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_0+)),$$

razonando de forma análoga a la anterior, obtendríamos que $\delta F(q; -h_\varepsilon^{t_0}) < 0$. ■

7.2.2. Conjuntos moldeables

Como ya hemos comentado, no podemos garantizar la verificación de las condiciones de Weierstrass-Erdmann cuando las funciones admisibles están sujetas a ciertas restricciones. Esto es debido a que en el extremo, la extremal correspondiente puede no admitir variaciones bilaterales. No obstante, el método desarrollado para la demostración del teorema 7.1 puede ser adaptado al estudio del extremo del funcional restringido a conjuntos de funciones para los que existe

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(q + xh_\varepsilon^{t_0}) - F(q)}{x} = \delta F(q; h_\varepsilon^{t_0}).$$

Introducimos, en primer lugar, el concepto de conjunto moldeable, que nos permitirá definir un cierto tipo de restricciones en las funciones admisibles del funcional F para las que existe el límite anterior.

Definición 7.1 Sea A espacio afín de espacio director V . Sea $q \in W \subset A$. Diremos que $\omega \in V$ es una dirección W -admisibles en q si $\exists \theta > 0$ tal que $q + x\omega \in W$, $\forall x \in [0, \theta]$.

Definición 7.2 Diremos que un conjunto de funciones $\Omega \subset \widehat{C}^1[a, b]$ es moldeable en $t_0 \in (a, b)$ si $\forall q \in \Omega$:

- i) $q'(t_{0-}) < q'(t_{0+}) \implies \exists \varepsilon > 0$ tal que $h_\varepsilon^{t_0}$ es una dirección Ω -admisibles en q .
- ii) $q'(t_{0-}) > q'(t_{0+}) \implies \exists \varepsilon > 0$ tal que $-h_\varepsilon^{t_0}$ es una dirección Ω -admisibles en q .

7.2.3. Primera condición de Weierstrass-Erdmann en problemas con restricciones de desigualdad

Presentamos, en primer lugar, una condición necesaria para la existencia de extremales quebradas (con puntos angulares) en problemas con restricciones definidas mediante conjuntos moldeables. A continuación, veremos qué debemos exigir para que esta condición necesaria sea una extensión de la primera condición de Weierstrass-Erdmann para funciones admisibles con cierto tipo de restricciones de desigualdad.

Teorema 7.2 (Condición necesaria) Si $L(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^2)$, Ω es moldeable en t_0 (punto anguloso) y en q se alcanza el mínimo local (débil) del funcional

$$F(z) = \int_a^b L(t, z(t), z'(t)) dt$$

sobre el conjunto

$$D = \Omega \cap \{z \in \widehat{C}^1[a, b] \mid z(a) = \alpha \wedge z(b) = \beta\},$$

entonces se verifica

$$(q'(t_{0-}) - q'(t_{0+})) \cdot (L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0-})) - L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0+}))) \leq 0.$$

Demostración. Supongamos que

$$(q'(t_{0-}) - q'(t_{0+})) \cdot (L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0-})) - L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0+}))) > 0.$$

Se pueden presentar los siguientes casos:

i) Si $q'(t_{0-}) < q'(t_{0+})$, entonces $L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0-})) < L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0+}))$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $h_\varepsilon^{t_0}$ es una dirección D -admisibles en q . Procediendo como en el teorema 7.1, se cumple que

$$\delta F(q; h_\varepsilon^{t_0}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(q + xh_\varepsilon^{t_0}) - F(q)}{x} < 0,$$

lo que contradice la hipótesis de que en q hay un mínimo local de F en D .

ii) Si $q'(t_{0-}) > q'(t_{0+})$, entonces $L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0-})) > L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0+}))$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $-h_\varepsilon^{t_0}$ es una dirección D -admisibles en q . Ahora tenemos que

$$\delta F(q; -h_\varepsilon^{t_0}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(q + xh_\varepsilon^{t_0}) - F(q)}{x} < 0,$$

que también contradice la hipótesis de partida. ■

Vamos a ver que si imponemos ciertas propiedades a $L_{z'}$, la condición necesaria establecida en el teorema anterior se convierte en una extensión de la primera condición de Weierstrass-Erdmann.

Teorema 7.3 (*Extensión de la primera condición de Weierstrass-Erdmann*)

Si $L(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^2)$, $L_{z'}(t_0, q(t_0), \cdot)$ es no decreciente, Ω es moldeable en t_0 , y en q hay un mínimo local (débil) del funcional

$$F(z) = \int_a^b L(t, z(t), z'(t)) dt$$

sobre el conjunto

$$D = \Omega \cap \{z \in \widehat{C}^1[a, b] \mid z(a) = \alpha \wedge z(b) = \beta\},$$

entonces se cumple la primera condición Weierstrass-Erdmann:

$$L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0-})) = L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0+})).$$

Demostración. Si $L_{z'}(t_0, q(t_0), \cdot)$ es no decreciente, entonces

$$\begin{aligned} q'(t_{0-}) < q'(t_{0+}) &\Rightarrow L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0-})) \leq L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0+})) \\ q'(t_{0-}) > q'(t_{0+}) &\Rightarrow L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0-})) \geq L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0+})), \end{aligned}$$

por lo que

$$(q'(t_{0-}) - q'(t_{0+})) \cdot (L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0-})) - L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0+}))) \geq 0.$$

Ahora teniendo en cuenta la condición del teorema 7.2, se cumple:

$$(q'(t_{0-}) - q'(t_{0+})) \cdot (L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0-})) - L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0+}))) = 0.$$

Pero como en los puntos angulosos

$$q'(t_{0-}) \neq q'(t_{0+}),$$

entonces se tiene que cumplir la primera condición *Weierstrass-Erdmann*:

$$L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0-})) = L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0+})).$$

■

Ahora es evidente el siguiente resultado en el que se garantiza que si $L_{z'}$ es estrictamente creciente con respecto a z' , entonces no existen puntos angulosos en la extremal que proporciona el mínimo del funcional.

Teorema 7.4 Si $L(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^2)$, y $L_{z'}(t, z, \cdot)$ es estrictamente creciente $\forall (t, z) \in (a, b) \times \mathbb{R}$, Ω es moldeable para cada $t \in [a, b]$, y en q hay un mínimo local (débil) del funcional

$$F(z) = \int_a^b L(t, z(t), z'(t)) dt$$

en el conjunto

$$D = \Omega \cap \{z \in \widehat{C}^1[a, b] \mid z(a) = \alpha \wedge z(b) = \beta\},$$

entonces q es C^1 .

Demostración. Es obvia a partir del teorema anterior.

■

7.3. CONSIDERACIONES SOBRE CONJUNTOS MOLDEABLES

Mostramos a continuación cómo algunos problemas ya conocidos: el clásico problema del obstáculo, problemas con restricciones no holonómicas, etc., pueden ser descritos en términos de conjuntos moldeables.

Previamente establecemos que la intersección de conjuntos moldeables es moldeable, lo cual permitirá considerar problemas con varias restricciones.

Proposición 7.1 Si Ω_1 y Ω_2 son conjuntos moldeables en $t_0 \in (a, b)$, entonces $\Omega_1 \cap \Omega_2$ también es moldeable en t_0 .

Demostración. Evidente teniendo en cuenta la definición de conjunto moldeable.

■

7.3.1. Problema del obstáculo

El problema del obstáculo es un problema variacional con restricciones holonómicas (las funciones admisibles no pueden penetrar en cierta región limitada por una curva).

Proposición 7.2 Si $G \in C^1[a, b]$, entonces el conjunto

$$\Omega = \{z \in \widehat{C}^1[a, b] \mid z(t) \geq G(t), \forall t \in [a, b]\}$$

es moldeable $\forall t_0 \in (a, b)$.

Demostración. Tomemos $q \in \Omega$ con $q'(t_{0+}) \neq q'(t_{0-})$. Será suficiente considerar los puntos de unión de q con la curva $G(t)$.

Si $q(t_0) = G(t_0)$, es fácil ver que $q'(t_{0+}) > q'(t_{0-})$, y obsérvese que $\forall x > 0$ y $\forall \varepsilon > 0$

$$q(t) + xh_\varepsilon^{t_0}(t) \geq q(t) \geq G(t), \quad \forall t \in [a, b];$$

por lo tanto, $h_\varepsilon^{t_0}$ es una dirección Ω -admisibles en q , $\forall \varepsilon > 0$. ■

Proposición 7.3 Si $G \in C^1[a, b]$, entonces el conjunto

$$\Omega = \{z \in \widehat{C}^1[a, b] \mid z(t) \leq G(t), \forall t \in [a, b]\}$$

es moldeable $\forall t_0 \in (a, b)$.

Demostración. La demostración es similar a la de la proposición anterior. Será suficiente considerar los puntos de unión de q con la curva $G(t)$. Sea $q \in \Omega$ con $q(t_0) = G(t_0)$, entonces $q'(t_{0+}) < q'(t_{0-})$, por lo que $\forall x > 0$ y $\forall \varepsilon > 0$

$$q(t) + x(-h_\varepsilon^{t_0}(t)) \leq q(t) \leq G(t), \quad \forall t \in [a, b];$$

por lo tanto, $-h_\varepsilon^{t_0}$ es una dirección Ω -admisibles en q , $\forall \varepsilon > 0$. ■

De forma análoga, se prueba el resultado siguiente:

Proposición 7.4 Si $G_1, G_2 \in C^1[a, b]$, entonces el conjunto

$$\Omega = \{z \in \widehat{C}^1[a, b] \mid G_1(t) \leq z(t) \leq G_2(t), \forall t \in [a, b]\}$$

es moldeable $\forall t_0 \in (a, b)$.

7.3.2. Problemas con restricciones no holonómicas

Vemos que, bajo ciertas condiciones, considerando restricciones de desigualdad en las derivadas de las funciones admisibles (problemas de velocidad restringida) también obtenemos conjuntos moldeables.

Proposición 7.5 Si $G(\cdot) \in C[a, b]$, entonces el conjunto

$$\Omega = \{z \in \widehat{C}^1[a, b] \mid z'(t) \leq G(t), \forall t \in [a, b] \text{ a.e.}\}$$

es moldeable $\forall t_0 \in (a, b)$.

Demostración. Tomamos $q \in \Omega$. Supongamos, en primer lugar, que $q'(t_{0-}) < q'(t_{0+}) \leq G(t_0)$.

Teniendo en cuenta que $q \in \widehat{C}^1[a, b]$ y la continuidad de G en t_0 ,

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } \sup_{[t_0-\varepsilon, t_0]} q'(t) < \inf_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]} G(t).$$

Ahora, tomando

$$\theta = \inf_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]} G(t) - \sup_{[t_0-\varepsilon, t_0]} q'(t) > 0,$$

tenemos que $\forall x \in [0, \theta)$

$$q'(t) + x < G(t), \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0)$$

$$q'(t) - x \leq G(t) - x \leq G(t), \forall t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$$

y, consecuentemente,

$$q + xh_\varepsilon^{t_0} \in \Omega, \forall x \in [0, \theta) \implies h_\varepsilon^{t_0} \text{ es una dirección } \Omega\text{-admisibles en } q.$$

Si $q'(t_{0+}) < q'(t_{0-}) \leq G(t_0)$, de forma análoga al razonamiento anterior, tendremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $-h_\varepsilon^{t_0}$ es una dirección Ω -admisibles en q . ■

Proposición 7.6 Si $G(\cdot) \in C[a, b]$, entonces el conjunto

$$\Omega = \{z \in \widehat{C}^1[a, b] \mid z'(t) \geq G(t), \forall t \in [a, b] \text{ a.e.}\}$$

es moldeable $\forall t_0 \in (a, b)$.

Demostración. Es similar a la de la proposición anterior. ■

A partir de estas dos últimas proposiciones y de la proposición 7.1, es inmediato comprobar la siguiente:

Proposición 7.7 Si $G_1(\cdot), G_2(\cdot) \in C[a, b]$, entonces el conjunto

$$\Omega = \{z \in \widehat{C}^1[a, b] \mid G_1(t) \leq z'(t) \leq G_2(t), \forall t \in [a, b] \text{ a.e.}\}$$

es moldeable $\forall t_0 \in (a, b)$.

7.3.3. Problemas con inclusiones diferenciales

Proposición 7.8 Si $G(\cdot, \cdot) \in C^1([a, b] \times \mathbb{R})$, entonces el conjunto

$$\Omega := \{z \in \widehat{C}^1[a, b] / z'(t) \leq G(t, z(t)), \forall t \in [a, b] \text{ a.e.}\}$$

es moldeable para todo $t_0 \in (a, b)$.

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que

$$q'(t_{0-}) < q'(t_{0+}) \leq G(t_0, z(t_0)).$$

Sea

$$m := \min_{t \in [a, b]} G'_z(t, q(t)).$$

Es evidente que existen ε y θ , suficientemente pequeños, tales que, para cada

$$(t, x) \in [t_0 - \varepsilon, t_0] \times [0, \theta]$$

se verifica

$$q'(t) + x(h_\varepsilon^{t_0})'(t) = q'(t) + x < G(t, q(t) + xh_\varepsilon^{t_0}(t))$$

y, además, para todo $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon]$,

$$-1 < (-t + t_0 + \varepsilon) \cdot m.$$

Por el teorema de Lagrange, deducimos que para cada $(t, x) \in (t_0, t_0 + \varepsilon] \times [0, \theta]$

$$\begin{aligned} G(t, q(t) + xh_\varepsilon^{t_0}(t)) &= G(t, q(t) + x(-t + t_0 + \varepsilon)) \\ &= G(t, q(t)) + x(-t + t_0 + \varepsilon)G'_z(t, c_t), \end{aligned}$$

donde $c_t \in [z(t), z(t) + x(-t + t_0 + \varepsilon)]$.

Por tanto, para cada $(t, x) \in (t_0, t_0 + \varepsilon] \times [0, \theta]$

$$\begin{aligned} q'(t) + x(h_\varepsilon^{t_0})'(t) &= q'(t) - x \leq G(t, q(t)) + x(-t + t_0 + \varepsilon) \cdot G'_z(t, c_t) \\ &= G(t, q(t) + xh_\varepsilon^{t_0}(t)). \end{aligned}$$

En definitiva,

$$q'(t) + x(h_\varepsilon^{t_0})'(t) \leq G(t, q(t) + xh_\varepsilon^{t_0}(t)),$$

por lo que $h_\varepsilon^{t_0}$ es Ω -admisibile en t_0 .

En el caso en que

$$G(t_0, z(t_0)) \geq q'(t_{0-}) > q'(t_{0+}),$$

razonando de forma análoga, llegamos a la conclusión de que $-h_\varepsilon^{t_0}$ es Ω -admisibile en t_0 . ■

Proposición 7.9 Si $G(\cdot, \cdot) \in C^1([a, b] \times \mathbb{R})$, el conjunto

$$\{z \in \widehat{C}^1[a, b] / G(t, z(t)) \leq z'(t), \forall t \in [a, b] \text{ a.e.}\}$$

es moldeable para todo $t_0 \in (a, b)$.

Demostración. Es análoga a la de la proposición anterior. ■

Proposición 7.10 Si $G_1(\cdot, \cdot), G_2(\cdot, \cdot) \in C^1([a, b] \times \mathbb{R})$, el conjunto

$$\{z \in \widehat{C}^1[a, b] \mid G_1(t, z(t)) \leq z'(t) \leq G_2(t, z(t)), \forall t \in [a, b] \text{ a.e.}\}$$

es moldeable para todo $t_0 \in (a, b)$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de las dos proposiciones anteriores y de la proposición 7.1. ■

Si aplicamos el teorema 7.3 de la sección anterior, cumpliéndose las adecuadas condiciones de convexidad, las soluciones quebradas de ciertos problemas variacionales con restricciones de inclusión diferencial satisfacen la primera condición de Weierstrass-Erdmann. De la misma forma, aplicando el teorema 7.4 de la sección anterior, se cumple que en el caso de langrangianos estrictamente convexos con respecto a z' el valor mínimo del funcional se da necesariamente en funciones de clase C^1 .

Observación 7 Los problemas con restricciones de inclusión diferencial son, precisamente, los que aparecen en el problema hidrotérmico generalizado con restricciones derivadas de las limitaciones de generación para las centrales térmicas e hidráulicas:

$$\Theta_b = \{z \in \widehat{C}^1[0, T] / z(0) = 0, z(T) = b, H_{\min} \leq H(t, z(t), z'(t)) \leq H_s(t)\}.$$

Ejemplos de conjuntos no moldeables.

Caso 1. (Restricción de punto interior).

Suponiendo que $t_0 \in (a, b)$, el conjunto

$$\Omega_\alpha = \{z \in \widehat{C}^1[a, b] \mid z(t_0) = \alpha\}.$$

no es moldeable en t_0 .

Caso 2. (Problema de reflexión de extremales).

Supongamos que $G \in C[a, b]$. El siguiente conjunto

$$\Omega = \{z \in \widehat{C}^1[a, b] \mid z(t) \leq G(t) \wedge \exists! t_0 \text{ tal que } z(t_0) = G(t_0)\}$$

no es moldeable en ningún punto.

7.4. EJEMPLOS

La primera condición de Weierstrass-Erdmann y también la condición del teorema 7.2 presentada anteriormente no se satisfacen, como acabamos de señalar, en algunos problemas variacionales, cuando las funciones admisibles están sujetas a ciertas restricciones que no resultan de conjuntos moldeables.

Aportamos, a continuación, algunos ejemplos en que las restricciones de las funciones admisibles pueden ser descritas en términos de conjuntos moldeables. En el primero de ellos se muestra cómo se puede verificar la condición del teorema 7.2 al trabajar sobre un conjunto moldeable pero no se verifica el teorema 7.3, en el que las exigencias son mayores. En el segundo ejemplo se muestra cómo, mediante el teorema 7.4, se puede obtener la única solución de un funcional de forma muy simple al descartar la existencia de puntos angulares. En el último ejemplo mostramos la aplicación de la teoría desarrollada a un problema hidrotérmico.

Ejemplo 7.1 *Consideremos el problema de minimización del funcional*

$$F(z) = \int_{-1}^1 L(t, z(t), z'(t)) dt$$

con $L(t, z(t), z'(t)) = -z'(t)^2$, en el conjunto

$$\Omega = \{z \in \widehat{C}^1[-1, 1] \mid z(-1) = z(1) = 0 \wedge |z'(t)| \leq 1\}.$$

Es obvio que

$$q(t) = \begin{cases} t + 1 & \text{si } t \in [-1, 0] \\ 1 - t & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases}$$

es una solución del problema $1 = q'(0_-) \neq q'(0_+) = -1$.

Nótese que la primera condición de Weierstrass-Erdmann no se verifica:

$$L_{z'}(0, 1, q'(0_-)) = -2q'(0_-) \neq -2q'(0_+) = L_{z'}(0, 1, q'(0_+)).$$

Esto es debido a que $L_{z'}$ es decreciente, y por tanto las hipótesis del teorema 7.3 no se satisfacen. Sin embargo la condición del teorema 7.2, presentada anteriormente, se satisface

$$\begin{aligned} (q'(t_{0-}) - q'(t_{0+})) \cdot (L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0-})) - L_{z'}(t_0, q(t_0), q'(t_{0+}))) = \\ = (1 - (-1)) \cdot (-2 - (2)) \leq 0, \end{aligned}$$

ya que Ω es moldeable.

Ejemplo 7.2 *Sea $L(\cdot) \in C^1[\mathbb{R}]$ con L' estrictamente creciente. Consideremos el problema de minimizar*

$$F(z) = \int_0^1 L(z'(t)) dt$$

en

$$D = \Omega \cap \{z \in \widehat{C}^1[0, 1] \mid z(0) = 0, z(1) = b\},$$

donde

$$\Omega := \{z \in \widehat{C}^1[0, 1] \mid z(t) + t \leq z'(t) \leq z(t) + t + 2, \forall t \in [0, 1]\}.$$

Denotaremos por f_s la solución de la ecuación diferencial $z'(t) = z(t) + t + 2$ con la condición inicial $z(0) = 0$; y por f_i la solución de la ecuación diferencial $z'(t) = z(t) + t$ con la condición final $z(1) = b$.

La solución q estará formada por arcos de extremal ($C_1 + C_2t$) y arcos frontera ($-1 - t + C_3e^t$ o $-3 - t + C_4e^t$), por lo que será de la forma

$$q(t) = \begin{cases} -3 - t + 3e^t & \text{si } t \in [0, \alpha] \\ c_1 + c_2t & \text{si } t \in [\alpha, \alpha + \beta] \\ -1 - t + (2 + b)e^{t-1} & \text{si } t \in [\alpha + \beta, 1]. \end{cases}$$

Debido a que Ω es moldeable en todo punto, y en virtud del teorema 7.4, su derivada tiene que ser continua, por lo que únicamente puede ser de la forma

$$q'(t) = \begin{cases} -1 + 3e^t & \text{si } t \in [0, \alpha] \\ -1 + 3e^\alpha & \text{si } t \in [\alpha, \alpha + \beta] \\ -1 + C_4e^t & \text{si } t \in [\alpha + \beta, 1] \end{cases}$$

para $\alpha = \ln \frac{2}{3\beta}$, $\beta = \frac{2}{3e^\alpha}$ y $C_4 = (2 + b)e^{-1} = \frac{3}{e\beta}$.

Denotamos por k_{ex} la pendiente de la extremal; $k_{fs} = f'_s(0)$; $k_{fi} = f'_i(1)$.

En general, se cumplirá que si $k_{fs} > b > k_{fi}$, entonces la solución será la extremal libre (Fig. 7.1-a): $q(t) = bt$.

A continuación analizamos los diversos casos con más detalle

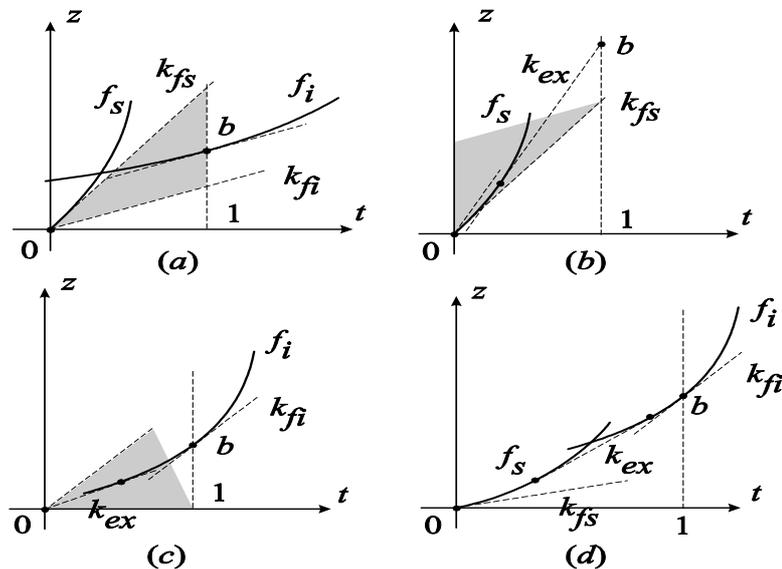


Fig. 7.1. Solución q .

Caso a) Si $k_{fs} \leq b$; $k_{fi} \leq b$, la solución está formada por un arco frontera $f_s(t)$ y un arco extremal tangente a $f_s(t)$ (Fig. 7.1-b). Por lo que $\alpha + \beta = 1$.

Caso b) Si $k_{fs} \geq b$; $k_{fi} \geq b$, la solución está formada por un arco de extremal seguido por un arco frontera $f_i(t)$ (Fig. 7.1-c). Por lo que $\alpha = 0$.

Caso c) Si $k_{fs} \leq b \leq k_{fi}$, la solución consiste en dos arcos frontera y un arco extremal entre ellos (Fig. 7.1-d).

Ejemplo 7.3 Consideremos un sistema hidrotérmico formado por m centrales térmicas y una hidráulica que deben satisfacer una potencia demandada que se ajusta a la siguiente función:

$$P_d(t) = 350 + 5t(24 - t)$$

en un intervalo de optimización de 24 horas.

Tomamos como modelo para el costo de combustible de la equivalente térmica el cuadrático

$$\Psi(P(t)) = \alpha + \beta P(t) + \gamma P(t)^2$$

y no vamos a considerar pérdidas de transmisión en el sistema, por lo que la potencia hidráulica efectiva coincidirá con la generación de la planta hidráulica, que viene dada por la siguiente expresión

$$H(t) = P_h(t) = -A(t)z'(t) - Bz'(t)z(t) - Cz'(t)^2,$$

donde los coeficientes A , B y C son

$$A(t) = \frac{-1}{G}B_y(S_0 + t \cdot i), \quad B = \frac{B_y}{G}, \quad C = \frac{B_T}{G}.$$

En la tabla siguiente aportamos los datos de los coeficientes de la equivalente térmica y de la central hidráulica, así como el volumen de agua disponible, b , para la central hidráulica.

Tabla I.- Coeficientes

α	β	γ	G	i
9127.31	19.8841	0.0012718	$570.834 \cdot 10^3$	$301.952 \cdot 10^6$
S_0	B_T	B_y	b	
$407.808 \cdot 10^8$	$219.597 \cdot 10^{-8}$	$149.5 \cdot 10^{-11}$	$90.120 \cdot 10^6$	

En estas condiciones el problema planteado es la minimización del funcional

$$F(z) = \int_0^T L(t, z(t), z'(t))dt,$$

con L de la forma

$$L(t, z(t), z'(t)) = \Psi(P_d(t) - H(t, z(t), z'(t)))$$

sobre el conjunto

$$D = \Omega \cap \{z \in \widehat{C}^1[0, T] \mid z(0) = 0, z(T) = b\},$$

donde

$$\Omega := \{z \in \widehat{C}^1[0, T] \mid 0 \leq H(t, z(t), z'(t)) \leq P_d(t)\}.$$

Tenemos, por tanto, un problema que involucra restricciones no holonómicas de desigualdad en la derivada $z'(t)$. Es fácil ver que Ω es moldeable si tenemos en cuenta que H es estrictamente creciente con respecto a z' y que puede ser expresado como

$$\Omega := \{z \in \widehat{C}^1[0, T] \mid G_1(t, z(t)) \leq z'(t) \leq G_2(t, z(t)), \forall t \in [0, T]\},$$

donde $H(t, z(t), G_1(t, z(t))) = 0$ y $H(t, z(t), G_2(t, z(t))) = P_d(t)$.

La solución q debe constar necesariamente de arcos de extremal y arcos frontezos ($q'(t) = 0$ o $H(t, q(t), q'(t)) = P_d(t)$). Al ser $L_{z'}(t, z, \cdot)$ estrictamente creciente y Ω moldeable en todo punto, en virtud del teorema 7.4, la derivada de la solución, q' , debe ser continua.

Con el modelo considerado de generación hidráulica, H es decreciente con respecto a z ($H_z < 0$) y, debido a la influencia del orden de magnitud de los términos que aparecen en $H_{z'}$, podemos afirmar que $H_{z'}$ es creciente con respecto al tiempo ($H_{z't} > 0$). Esto nos permite asegurar de modo sencillo que la potencia térmica óptima $P_{te}(t) = P_d(t) - H(t, z(t), z'(t))$ es decreciente en los intervalos correspondientes a arcos de extremal. Efectivamente, la exponencial

$$\exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, z(s), z'(s))}{H_{z'}(s, z(s), z'(s))} ds \right]$$

es creciente con respecto al tiempo; en los arcos de extremal se verifica la ecuación de coordinación

$$-L_{z'}(t, z(t), z'(t)) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{H_z(s, z(s), z'(s))}{H_{z'}(s, z(s), z'(s))} ds \right] = -L_{z'}(0, z(0), z'(0)) = K \in \mathbb{R}^+$$

y, como la constante de coordinación se mantiene, la expresión

$$-L_{z'}(t, z(t), z'(t)) = \Psi'(P_d(t) - H(t, z(t), z'(t))) \cdot H_{z'}(t, z(t), z'(t))$$

es decreciente con respecto al tiempo y, por las observaciones antes realizadas ($H_{z't} > 0$), podemos concluir que la potencia térmica óptima es decreciente.

Esta circunstancia nos permite afirmar que existen $\gamma, \delta \in [0, T]$ tales que la solución q satisface

$$\begin{cases} H(t, q(t), q'(t)) = 0 & \text{si } t \in [0, \gamma] \\ \text{extremal libre} & \text{si } t \in [\gamma, \gamma + \delta] \\ H(t, q(t), q'(t)) = P_d(t) & \text{si } t \in [\gamma + \delta, T], \end{cases}$$

donde δ se puede calcular a partir de γ .

En estas condiciones, se trata de considerar para cada $\gamma \in [0, T]$ la función $q_\gamma \in C^1[0, T]$ que cumple $q_\gamma(0) = 0$ y la condición siguiente

$$\begin{cases} H(t, q_\alpha(t), q'_\alpha(t)) = 0 & \text{si } t \in [0, \gamma] \\ \text{extremal libre} & \text{si } t \in [\gamma, \gamma + \delta_\gamma] \\ H(t, q_\alpha(t), q'_\alpha(t)) = P_d(t) & \text{si } t \in [\gamma + \delta_\gamma, T], \end{cases}$$

y determinar el valor de α para el cual la condición de volumen final $q_\gamma(T) = b$ se satisface.

Aplicando el programa desarrollado en el capítulo anterior para la resolución de este tipo de problemas, obtuvimos la solución que representamos gráficamente en la figura siguiente donde P_d es la potencia demandada, P_{te} es la potencia térmica óptima, $\gamma = \frac{41}{8}$ y $\delta_\gamma = 15$.

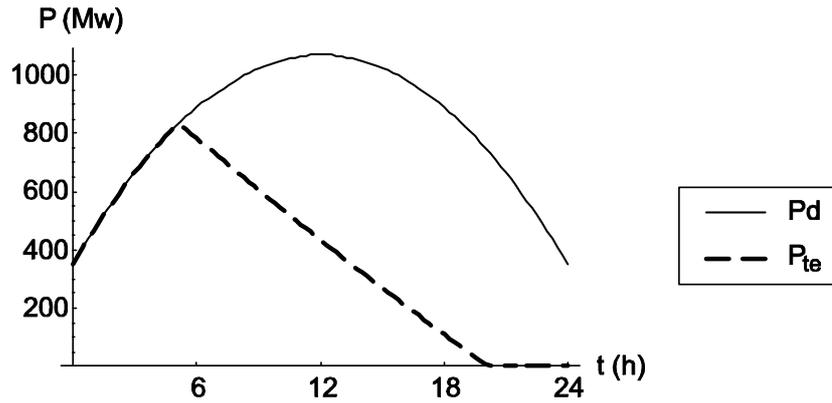


Figura 7.2. Solución.

Capítulo 8

APORTACIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO

8.1. APORTACIONES

A continuación, y como consecuencia del trabajo desarrollado, podemos resumir las aportaciones y principales conclusiones, tanto desde el punto de vista matemático como de la gestión óptima de la generación eléctrica. Entre las principales aportaciones destacan las siguientes:

- Construcción formal de la equivalente minimizadora para funciones de costo generales bajo restricciones de potencia mínimas y máximas y demostración de la conservación del carácter C^1 .
- Teoremas de coordinación con los que se establecen condiciones necesarias de mínimo en los distintos problemas abordados. En todos los casos, el teorema correspondiente proporciona la clave para la construcción aproximada de la solución.
- Teorema de transición suave en problemas con lagrangiano no regular. Este resultado asegura, bajo ciertas condiciones de convexidad, que la solución es de clase C^1 y que, en términos de centrales de bombeo, el tránsito de la zona de generación a la de bombeo se produce con suavidad permaneciendo un cierto intervalo de tiempo en situación de parada.
- Demostración, bajo ciertas condiciones, de la ausencia de puntos angulares en la solución de problemas que involucran restricciones de desigualdad. Introducimos el concepto de conjunto moldeable con el fin de delimitar el tipo de restricciones ante las cuales podemos asegurar la pertenencia a C^1 de la solución. Comprobamos que las restricciones no holonómicas de desigualdad en las funciones admisibles pueden ser representadas a través de un conjunto moldeable (problema con inclusiones diferenciales), lo que garantiza la aplicabilidad de este resultado a los problemas de optimización hidrotérmica con las restricciones consideradas.

- Demostración de la convergencia del algoritmo desarrollado para la resolución de problemas variacionales multidimensionales con restricciones, inspirado en el método de descenso coordinado cíclico. Su implementación en Mathematica se ha revelado sumamente eficaz a la hora de resolver de modo aproximado una amplia clase de problemas.

8.2. PERSPECTIVAS DE FUTURO

Planteamos algunas cuestiones que no se han abordado en este trabajo, pero que son, sin duda, la continuación natural del trabajo presentado.

- Estudio de condiciones suficientes de extremo local en problemas con restricciones y con lagrangiano no regular. Para ello, habrá que considerar, en lugar de campos de extremales, campos de funciones q_K que satisfagan las condiciones expresadas en los teoremas de coordinación. Este tipo de campos contemplará necesariamente la posibilidad de que por un punto pasen varias extremales con idéntica inclinación. Naturalmente, el primer escollo que habrá que salvar es el análisis de la factibilidad de la construcción de las funciones q_K , lo cual parece estar relacionado con el carácter creciente de $L_{z'}$ con respecto a z' .

- Los sistemas hidrotérmicos que constan de varias centrales hidráulicas que están significativamente alejadas como para que haya que tener en consideración el denominado "retraso en el transporte" (tiempo que tarda el agua de una central aguas arriba en llegar al embalse de la situada aguas abajo) no han sido considerados en este trabajo. Es un problema de interés que va a involucrar ecuaciones diferenciales con retardo.

- Se propuso un método inspirado en Gauss-Southwell que mejora la velocidad de convergencia del basado en el de descenso coordinado cíclico. Queda por determinar el estudio de la convergencia de este nuevo método.

- Elaboración de Estrategias Competitivas de Oferta para el Mercado Diario de Energía. En este marco surge para las compañías generadoras la necesidad de elaborar nuevas estrategias de oferta que les permitan lograr mayores beneficios. La determinación de la estrategia óptima de oferta de un agente generador en un mercado competitivo depende de varios factores, como su tamaño y tipo de tecnología y el de sus competidores, el precio marginal y las restricciones técnicas de las unidades de generación. Por lo tanto, es necesario desarrollar herramientas que combinen las restricciones técnicas y modelen adecuadamente el mercado de energía.

Capítulo 9

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía

- [1] **Allan, R. N.; Li, R.; Zheng, M.**
Reliability and economic assessment of pumped-storage in generation systems using sequential Monte-Carlo simulation.
Proceedings of Int. Power Eng. Conf. Singapore, Vol. 1, pp. 240-245, May 1997.
- [2] **Allan, R. N.; Li, R.; Elkateb, M. M.**
Modelling of pumped-storage generation in sequential Monte-Carlo production simulation.
IEEE Proceedings-Gener., Trans. and Distr., Vol. 145, n^o 5, pp. 611-615, Sep. 1998.
- [3] **Barquín, J.; Centeno, E.; Malillos, E.**
Medium-term hydro operation in a competitive electricity market.
IEEE Power Tech'99 Conference, Budapest, 1999.
- [4] **Barros, M.T.; Tsai, F.T.; Yang, S.L.; Lopes, J.E.G.; Yeh, W.G.; Asce, H.M.**
Optimization of Large-Scale Hydropower System Operations.
Journal of Water Resources Planning and Management, pp. 178-188. 2003.
- [5] **Baskar, S.; Subbaraj, P.; Rao, M.V.C.**
Hybrid evolutionary programming solution to short term hydro thermal scheduling problem.
Journal of the Institution of Engineers: Electrical Engineering Division. Vol. 82, pp. 236-242, Issue MAR, 2002.
- [6] **Basu, M.**
A simulated annealing-based goal-attainment method for economic emission load dispatch of fixed head hydrothermal power systems.
International Journal of Electrical Power and Energy Systems. Vol. 27, pp.147-153, Issue 2, 2005.
- [7] **Bayón, L. F.; Suárez, P. M.**
Minimización de las emisiones contaminantes en un sistema hidrotérmico.
Actas del Congreso Internacional de Ingeniería de Proyectos, Oviedo, 1994.
- [8] **Bayón, L. F.; Suárez, P. M.; Otero, J. A.; Dugnot, B.**
Fuel Cost optimization of hydro-thermal systems.
Approximation and Optimization, Vol. 8, pp. 631-650, Frankfurt, 1995.

- [9] **Bayón, L. F.; Grau, J. M.; Otero, J. A.; Ruiz, M. M.; Suárez, P. M.;**
Optimización del coste de combustible en un sistema hidrotérmico mediante el método de Ritz.
Información Tecnológica, Vol. 9, n° 5, pp. 213-220, Chile, 1998.
- [10] **Bayón, L. F.; Grau, J. M.; Otero, J. A.; Ruiz, M. M.; Suárez, P. M.;**
Uso del cálculo variacional y el método de Han-Powel para la resolución de la coordinación hidrotérmica y el óptimo flujo de carga en un sistema hidrotérmico.
Proceedings IEEE - ANDESCON'99, Vol. 1, pp. 268-291, Venezuela, 1999.
- [11] **Bayón, L. F.; Suárez, P. M.; Otero, J. A.; Grau, J. M.; Ruiz, M. M.**
A new tool for control and diagnostic of electrical network.
Record of IEEE SDEMPED'99, Vol. 1, pp. 323-328, 1999.
- [12] **Bayón, L. F.; Suárez, P. M.; Otero, J. A.; Grau, J. M.; Ruiz, M. M.**
Modelos y métodos matemáticos en optimización hidrotérmica.
Servicio de Publicaciones, Universidad de Oviedo, 1999.
- [13] **Bayón, L.F.; Grau, J.; Suárez, P.**
A New Mathematical Model and Algorithm for a Complex Hydrothermal Problem.
Proceedings ICCMMSE-2002 Vol. II, pp. 54-63, 2002.
- [14] **Bayón, L.; Grau, J.; Suárez, P.**
A Necessary and Sufficient Condition of Extremum in Problems Involving Inequality Non-Holonomic Constraints.
Applied Mathematics E-Notes, Bulletin Board, no. 24, 2002.
- [15] **Bayón, L.; Grau, J.; Suárez, P.**
A new formulation of the equivalent thermal in optimization of hydrothermal systems
Mathematical Problems in Engineering (ISSN: 1024-123X), Taylor & Francis, Vol. 8(3), pp. 181-196, 2002.
- [16] **Bayón, L.; Grau, J.; Suárez, P.**
A Necessary Condition for Broken Extremals in Problems Involving Inequality Constraints.
Archives of Inequalities and Applications (antes Journal of Inequalities and Applications) (ISSN 1542-6149), Dynamic Publishers, Vol. 1(1), pp. 75-84, 2003.
- [17] **Bayón, L.; Grau, J.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.**
A Optimization technique of Hydrothermal Systems using Calculus of Variations.
Proceedings ICREPQ 2003, Vol. I, pp. 48, 2003.
- [18] **Bayón, L.; Grau, J.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.**
A sufficient condition for minimum in a Hydrothermal problem with pumped-storage plants.
Proceedings SCI 2003, Vol. II, pp. 30-35, 2003.
- [19] **Bayón, L.; Grau, J.; Suárez, P.**
A New Algorithm for the Optimization of a Simple Hydrothermal Problem.

- Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 9, pp.197-207, 2004.
- [20] **Bayón, L.; Grau, J.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.**
The First Weierstrass-Erdmann Condition in Variational Problems involving Differential Inclusions.
Mathematical Inequalities & Applications, Vol. 7, nº 3, pp.457-469, 2004.
- [21] **Bayón, L.; Grau, J.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.**
New developments on equivalent thermal in hydrothermal optimization. An algorithm of approximation.
Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol. 175(1), pp. 63-75, 2005.
- [22] **Bayón, L.; Grau, J.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.**
New developments on the application of Pontryagin's principle for the hydrothermal optimization.
IMA Journal of Mathematical Control and Information, In Press 2005.
- [23] **Bayón, L.; Grau, J.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.**
Nonsmooth Optimization of Hydrothermal Problems.
Journal of Computational and Applied Mathematics, In Press 2005.
- [24] **Bayón, L.; Grau, J.; Ruiz, M.; Suárez, P.**
A Bolza's Problem in Hydrothermal Optimization.
Applied Mathematics and Computation, Aceptado 2005.
- [25] **Borre, V. L.; Kapoor, S. G.**
Application of a two-step optimization technique to an economic dispatch problem in a hydro-thermal-purchased power network.
Eng. Optim., Vol. 7, nº 2, pp. 91 - 103, 1984.
- [26] **Branlund, H.; Sjelvgren, D.; Andersson, N.**
Optimal short term operation planning of a large hydrothermal power system based on a nonlinear network flow concept.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. PWRS-1, nº 4, pp. 75-81, Nov. 1986.
- [27] **Branlund, H.; Sjelvgren, D.; Bubenko, J.**
Short term generation scheduling with security constraints.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. 1, nº 3, pp. 310-316, 1988.
- [28] **Brezis, H.**
Análisis funcional: teoría y aplicaciones.
Ed. Alianza, Madrid, 1984.
- [29] **Briozzo, A. C.; Natale, M. F.; Tarzia, D. A.**
Determination of unknown thermal coefficients through a free boundary problem for a nonlinear heat conduction equation with a convective term.
Int. Comm. in Heat and Mass Transfer., Vol. 24, nº 6, pp. 857-68, Oct. 1997.

- [30] **Calvo, M.; Carnicer, J. M.**
Ecuaciones diferenciales.
Servicio de Publicaciones, Universidad de Zaragoza, 1994.
- [31] **Carneiro, A. A. F.; Leite, P. T.; Silva Filho, D.**
Generic algorithm applied to hydrothermal system scheduling.
Proceedings IEEE-POWERCON'98, 1998 Inter. Confe. on Power System Tech. Vol. 1, pp. 547-551, New York, 1998.
- [32] **Carneiro, A. A. F.; Leite, P. T.**
A generic algorithm approach to optimize the operation planning of hydrothermal system scheduling.
Proceedings 5th Brazilian Symp. on Neural Networks.
IEEE Comput. Soc., pp. 253-258, 1998.
- [33] **Carpentier, J.**
Contribution a l'étude du dispatching économique.
Bull. Soc. Fr. Elec., Ser. 8, Vol. 3, pp. 433-447, Aug. 1962.
- [34] **Carvalho, M. F.; Soares, S.**
An efficient hydrothermal scheduling algorithm.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. PWRS-2, n° 3, pp. 537-542, Aug. 1987.
- [35] **Castillo, E.; Conejo, A.J.; Pedregal, P.; García, R.; Alguacil, N.**
Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia.
Ed. E.T.S.I. Industriales y E.T.S.I.C.C.P., 2002.
- [36] **Castro, J.; González, J.A.**
A nonlinear optimization package for long-term hydrothermal coordination.
European Journal of Operational Research. Vol. 154, pp. 641-658, Issue 3, 1 May 2004.
- [37] **Christensen, G. S.; Soliman, S. A.**
On the application of functional analysis to the optimization of the production of hydroelectric power.
IEEE Trans. Power Systems, Vol. PWRS-2, n° 4, pp. 841-847, Nov. 1987.
- [38] **Ciarlet, P.**
Introduction a l'analyse numérique matricielle et a l'optimisation.
Ed. Masson, París, 1990.
- [39] **Clarke, F.H.**
Optimization and nonsmooth analysis.
SIAM, 1990.
- [40] **Demartini, G.; De Simone, T. R.; Granelli, G.; Montagna, M.; Robo, K.**
Dual programming methods for large-scale thermal generation scheduling.
IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 13, n° 3, pp. 857-863, Aug. 1998.

- [41] **Diekmann, O.** y otros.
Delay Equations: Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis.
Ed. Springer-Verlang, New York, 1995.
- [42] **Dillon, T.S.; Edwin, K.W.; Kocks, H.D.; Tand, R.J.**
Integer programming approach to the problem of optimal unit commitment with probabilistic reserve determination.
IEEE Trans. Power apparatus and Systems, PAS-97(6), pp. 2154-2166, 1978
- [43] **Driver, R. D.**
Ordinary and delay differential equations.
Ed. Springer, New York, 1977.
- [44] **Eguíluz, L.I.; Mañana, M.; Lavandero, J.C.; Lara, P.**
Detection and classification of conducted disturbances in power systems using artificial intelligence.
Proceedings IEEE-ANDESCON'99, Vol. 1, pp. 498-503, Venezuela, 1999.
- [45] **Eguíluz, L.I.**
Estrategias de minimización del coste de la energía eléctrica para grandes consumidores.
Ref. revista : ENERGÍA. Madrid. 1999.
- [46] **El-Hawary, M. E.; Christensen, G. S.**
Application of functional analysis to optimization of electric power systems.
Int. J. Control, Vol. 16, n° 6, pp. 1063-1072, 1972.
- [47] **El-Hawary, M. E.; Christensen, G. S.**
Functional optimization of common-flow hydro-thermal systems.
IEEE Trans. on Power Systems, Vol. PAS. 91, n° 5, pp. 1833-1839, 1972.
- [48] **El-Hawary, M. E.; Christensen, G. S.**
Optimal operation of multi-chain hydro-thermal power systems.
Can. Elec. Eng. J., Vol. 1, n° 2, pp. 52-62, 1976.
- [49] **El-Hawary, M. E.; Christensen, G. S.**
Optimal economic operation of electric power systems.
Ed. Academic Press, 1979.
- [50] **El-Hawary, M. E.; Mbamalu A. N.**
Modeling the incremental cost and water conversion functions for hydro-thermal coordination studies.
Elec. Mach. and Power Systems, Vol. 19, pp. 271-285, 1991.
- [51] **El-Hawary, M. E.; Ravindranath, K. M.**
Optimal operation of variable head hydro-thermal systems using the Glimn-Kirchmayer model and the Newton-Raphson method.
Electric Power Systems Research, Vol. 14, pp. 11-22, 1988.

- [52] **El-Hawary, M. E.; Ravindranath, K. M.**
Effects of hydro models on optimal operation of variable head hydro-thermal systems.
Can. J. Elect. & Comp. Eng., Vol. 13, n° 3-4, pp. 112-119, 1988.
- [53] **El-Hawary, M. E.; Ravindranath, K. M.**
Combining loss and cost objectives in daily hydro-thermal economic scheduling.
IEEE Trans. Power Systems, Vol. 6, n° 3, pp. 1106-1112, Aug. 1991.
- [54] **El-Hawary, M. E.; Ravindranath, K. M.**
Hydro-thermal power flow scheduling accounting for head variations.
IEEE Trans. Power Systems, Vol. 7, n° 3, pp. 1232-1238, Aug. 1992.
- [55] **El-Hawary, M. E.; Kummur, M.**
Optimal parameter estimation for hydro-plant performance models in economic operation studies.
IEEE Trans. Power Systems, Vol. PWRS-1, n° 4, pp. 126-131, Nov. 1986.
- [56] **Elsoltz, L.**
Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional.
Ed. MIR, Moscú, 1977.
- [57] **Ernan, X.; Guan, X.; Li, R.; Jiaotong X.**
Scheduling hydrothermal power systems with cascaded and head-dependent reservoirs.
IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 14, pp. 1127-1132, 1999.
- [58] **Fabra, J.**
Ante el mercado de la electricidad.
Economistas, n° 77, pp. 72-78, 1998.
- [59] **Faure, P.**
Analyse numerique: notes d'optimisation.
École Polytechnique, París, 1988.
- [60] **Fox, C.**
An introduction to the calculus of variations.
Ed. Dover Publications, New York, 1987.
- [61] **Galeev, E.; Tijomirov, V.**
Breve curso de la teoría de problemas extremales.
Ed. MIR, Moscú, 1991.
- [62] **Gavurin, M. K.**
Conferencias sobre los métodos de los cálculos.
Ed. MIR, Moscú, 1973.
- [63] **Garzillo, A.; Innorta, M.; Cazzol M. V.; Ricci, M.**
New prospects offered by interior pointmethod for the hydro-thermal scheduling.
Energía Eléctrica, Vol. 75, n° 4, pp. 216-224, 1998.

- [64] **Gelfan I. M.; Fomin S. V.**
Calculus of variations.
Prentice-Hall, New Jersey, 1963.
- [65] **George, E. E.; Page, H. W.; Ward, J. W.**
Coordination of fuel cost and transmission loss by use of the network analyzer to determine plant loading schedules.
AIEE Trans., Vol. 68, Part II, pp. 1152-1160, 1949.
- [66] **Giaquinta, M.; Hildebrandt, S.**
Calculus of variations (I-II).
Ed. Springer-Verlag, Berlín, 1996.
- [67] **Gil, E.A.; Bustos, J.A.; Rudnick, H.B.**
Short-Term Hydrothermal Generation Scheduling Model Using a Genetic Algorithm.
IEEE Transactions on Power Systems. Vol. 18, pp. 1256-1264, Issue 4, November 2003.
- [68] **Glowinski, R.** y otros.
Numerical analysis of variational inequalities.
Ed. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [69] **Glimn, A. F.; Kirchmayer, L. K.**
Economic operation of variable head plants.
AIEE-Trans., Vol. 77, Part III, pp. 1070-1079, 1958.
- [70] **Gorenstin, B.; Gorenstin, M.; Pereira, M.**
Stochastic optimization of a hydrothermal system including network constraints.
IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 7, n° 2, pp. 1107-1113, May 1992.
- [71] **Granville, S.; Oliveira, G.C.; Thomé, L.M.; Campodónico, N.; Latorre, M.L.; Pereira, M.V.F.; Barroso, L.A.**
Stochastic Optimization of Transmission Constrained and Large Scale Hydrothermal Systems in a Competitive Framework.
Conference Proceedings IEEE Power Engineering Society General Meeting, Vol. 2, pp. 1101-1106, 2003.
- [72] **Grau, J.M.**
Revisión de las formulaciones clásicas de los problemas de optimización hidrotérmica y fundamentación de posibles generalizaciones.
Tesis Doctoral. Dpto. de Matemáticas. Universidad de Oviedo, 2000.
- [73] **Guan, X.; Luh, P.B.; Yan, H.**
A new algorithm for hydrothermal power system scheduling.
Proceedings of the 1992 American Control Conference, 3, pp. 2094-2098, 1992.
- [74] **Habibollahzadeh, H.; Bubenko, J. A.**
Application of decomposition techniques to short-term operation planning of hydrothermal power system.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. PWRS-1, n° 1, pp. 41-46, Feb. 1986.

- [75] **Halliburton, T.S.**
An optimal hydrothermal planning model for the New Zealand power system.
Australian Journal of Electrical and Electronics Engineering, Vol. 1, pp. 193-198, Issue 3, 2004.
- [76] **Hannett, L. N.** y otros.
Modeling of a pumped storage hydro plant for power system stability studies.
Proceedings of Int. Conf. on Power System Tech., Vol. 2, pp. 1300-1304, New York, 1998.
- [77] **Hobbs, W.J.; Hermon, G.; Warner, S.; Sheble, G.B.**
An enhanced dynamic programming approach for unit commitment.
IEEE Trans. Power Systems, Vol 3, n° 3, pp. 1201-1205, 1988.
- [78] **Hongwei, Z.; Yuzhao, F.; Xiaoqing, Z.; Zhen, R.**
Hydro-thermal unit commitment considering pumped storage stations.
Proceedings of Int. Conf. on Power System Tech., Vol. 1, pp. 576-580, New York, 1998.
- [79] **Hota, P.K.; Chakrabarti, R.; Chattopadhyay, P.K.**
Source: *Short-term hydrothermal scheduling through evolutionary programming technique.*
Electric Power Systems Research, Vol, 52, n° 2, pp. 189-196, Nov. 1999.
- [80] **Ibrahim, E. S.**
Dynamic hydro-thermal economic dispatch with water availability constraints and variable water head.
Computers & Electrical Engineering, Vol. 23, n° 1, pp. 15-23, Jan. 1997.
- [81] **Jimenez, N.; Conejo, A.J.**
Short-term hydro-thermal coordination by lagrangian relaxation: solution of the dual problem.
IEEE Trans. Power Systems, Vol. 14, n° 1, pp. 266-273, 1999.
- [82] **Jingyan, Y.; Zhikui, F.; Ke, Z.**
A practical evaluation method of fault reserve benefits for pumped-storage power plants.
Power System Technology, Vol. 23, n° 1, pp. 70-73, Jan. 1999.
- [83] **Kannan, P. S.; Nityanandan, B. N.**
Direct method of determination of equivalent unit characteristics.
Journal of the Institution of Engineers Electrical Engineering Division, v 73, 1992.
- [84] **Kannan, P. S.; Kayalvizhi, N.**
An elegant approach for fuel limited dispatch with cubic cost function.
Journal of the Institution of Engineers Electrical Engineering Division, v 79, 1998.

- [85] **Kantorovich, L. V.; Krylov, V. I.**
Approximate methods of higher analysis.
P. Noordhoff, Holanda, 1964.
- [86] **Kartashov, A. P.; Rozhdenstvenski, M.**
Ecuaciones diferenciales ordinarias y fundamentos del cálculo variacional.
Ed. Reverté, Barcelona, 1980.
- [87] **Kimball, L.M.; Clements, K.A.; Davis, P.W.; Nejdawi, I.**
Multiperiod hydrothermal economic dispatch by an interior point method.
Mathematical Problems in Engineering, Vol. 8, pp.33-42, Issue 1, 2002.
- [88] **King, T. D.; El-Hawary, M. E.; El-Hawary, F.**
Optimal environmental dispatching of electric power systems via an improved Hopfield neural network model.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. 10, n° 3, pp. 1559-1565, Aug. 1995.
- [89] **Kirchmayer, L. K.; Stagg, G. W.**
Analysis of total and incremental losses in transmission systems.
AIEE Trans., Vol. 70, Part II, pp. 1197-1205, 1951.
- [90] **Kolmogorov, A. N.; Fomin, S. V.**
Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.
Ed. MIR, Moscú, 1978.
- [91] **Krasnov, M. L; Makarelov, G. I; Kiseliiov, A. I.**
Cálculo variacional.
Ed. MIR, Moscú, 1976.
- [92] **Lee, B. Y.; Park, Y. M.; Lee, K. Y.**
Optimal generation planning for a thermal system with pumped-storage based on analytical production costing model.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. PWRS-2, n° 2, pp. 486-493, May 1987.
- [93] **Lee, C.S.; Chang, S.P.**
Interactive fuzzy optimization for an economic and environmental balance in a river system.
Journal water Research, Vol. 39(1), pp. 221-231, 2005.
- [94] **Luenberger, D.**
Programación lineal y no lineal.
Ed. Addison-Wesley, Wilmington, 1989.
- [95] **Luh, P.B.; Zhang, D.; Tomastik, R.N.**
An algorithm for solving the dual problem of hydrothermal scheduling.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. 13, n° 2, pp. 593-600, 1998.
- [96] **Lumb, D. ; Hawkins, N. T.**
Provision of power reserve from pumped storage hydro plant.
IEE Coloquium E.P.F.R.P.R.S., pp. 1-4, London, Feb. 1998.

- [97] **Marcellán, F.; Casasús, L.; Zarzo, A.**
Ecuaciones diferenciales.
Ed. McGraw-Hill, Madrid, 1990.
- [98] **Mbamalu, G. A. N.; El-Hawary, M. E.**
Hydro-thermal power system loss minimization: a probabilistic perturbation approach.
Electric Machines and Power Systems, Vol. 24, n° 7, pp. 745-756, Oct. 1996.
- [99] **Mbamalu, G. A. N.; El-Hawary, M. E.; El-Hawary, F.**
Minimum emissions hydro-thermal power flow.
Electric Machines and Power Systems, Vol. 24, n° 8, pp. 833-845, Dec. 1996.
- [100] **Medina, J.; Quintana, V.H.; Conejo, A.J.; Perez, F.**
A comparasion of interior-point codes for medium-term hydro-thermal coordination.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. 14, n° 1, pp. 266-273, 1999.
- [101] **Mijangos, E.**
An efficient method for nonlinearly constrained networks.
European Journal of Operational Research, Vol. 161, pp. 618-635, Issue 3, 16 February 2005.
- [102] **Mikhlin, S. G.**
The numerical performance of variational methods.
Ed. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1971.
- [103] **Modarres, M.; Farrokhzad, D.**
Reliability consideration in optimization of cascaded hydrothermal power systems.
International Journal of Power and Energy Systems, Vol. 23, pp. 6-14, Issue 1, 2003.
- [104] **Modarres, M.; Ghasemi, F.; Farrokhzad, D.**
Solving the long-term hydro-thermal coordination problem with a special genetic algorithm.
Iranian Journal of Science and Technology, Transaction B: Engineering, Vol. 28, pp. 201-216, Issue 2 B, 2004.
- [105] **Montero, G.; Winter, G.; Suárez, A.; Galán, M.; García, D.**
Contribution to iterative methods for nonsymmetric linear systems: GMRES, BCG and QMR type algorithms.
Computational methods and neural networks, 97-128, Dynamic, Atlanta, GA, 1999.
- [106] **Montero, G.**
Solving optimal control problems by GAs.
Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysts, Part 5 (Athens, 1996). Nonlinear Anal. 30 (1997), no. 5, 2891-2902.
- [107] **Mostafa, M. A.; El-Hawary, M. E.; Mbamalu, G. A. N. ; Mansour, M. M.; El-Naggar, K. M.**
Steady-state load shedding schemes: a performance comparison.
Electric Power Systems Research, Vol. 38, n° 2, pp. 105-112. 1996.

- [108] **Mostafa, M. A.; El-Hawary, M. E.; Mbamalu, G. A. N.; Mansour, M.M.; El-Naggar, K. M.; Al-Arabaty, A. M.**
Performance evaluation of two optimal load shedding policies in electric power systems.
Electric Machines and Power Systems, Vol. 25, n° 2, pp. 199-213. 1996.
- [109] **Mousavi, H.; Ramamurthy, A. S.**
Multi-reservoir design using Pontryagin principle.
Advances in Water Resources, 25 (6), 677-687, 2002.
- [110] **Mwakabuta, N.; Kyaruzi, A.**
Short-term scheduling of a hydro-thermal system using linear programming technique.
IPEC 2003 - 6th International Power Engineering Conference, pp.731-736, 2003.
- [111] **Narendiran, S.; Shenbaga, S.; Kannan, P. S.**
An analytical approach for the determination of third order composite generation production cost function.
Journal of the Institution of Engineers Electrical Engineering Division, Vol. 75, 1994.
- [112] **Nowak, M.P.A.; Schultz, R.B. ; Westphalen, M.B.**
A stochastic integer programming model for incorporating day-ahead trading of electricity into hydro-thermal unit commitment.
Optimization and Engineering, Vol. 6, pp. 163-176, Issue 2, June 2005.
- [113] **Ohnishi, I.; Imai, H.**
Modified hele-shaw moving boundary problem related to some phase transition phenomena.
Bulletin of Univ. of Electro-Communications, Vol. 11, n° 1, pp. 17-28, Tokyo, June 1998.
- [114] **Otero, J. A.**
Modelos y métodos matemáticos en un problema de coordinación hidrotérmica.
Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo, 1999.
- [115] **Pérez Donsión, M. y otros**
Explotación Óptima de Sistemas Hidrotérmicos Mediante Técnicas de Evolución Simulada.
IEEE-ANDESCON99 Proceedings, Vol I, pp. 292-297, Venezuela. 1999.
- [116] **Pellegrino, F.; Renaud, A.; Socroun, T.**
Bundle. Augmented lagrangian methods for short-term unit commitment.
Proc. 12th Power System Computation Conf. PSCC'96, Vol. II, pp. 730-739, Germany, 1996.
- [117] **Puntel, W. R.; Prabhakara, F. S.; Lawrence, G.; Chen Kaiyong Weng; Xiaojiong**
A probabilistic approach for the development of operating strategies for pumped-storage power plants.

- Proceedings of Int. Conf. on Power System Tech., Vol. 2, pp. 900-904, New York, 1998.
- [118] **Pursimo, J. M., Antila, H. K., Vilkkio, M. K.; Lautala, P. A.**
A short-term scheduling for a hydropower plant chain.
International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 20 (8), 525-532, 1998.
- [119] **Ramos, A.; Muñoz, L.; Martínez, F.; Martín, V.**
A medium term bulk production cost model based on decomposition techniques.
Int. Symposium on Elect. Power Eng., Vol. 5, pp. 110-116, New York, 1995.
- [120] **Ramraj, N.**
A direct method of short term economic dispatch of power system with a fuel restricted plant.
Journal of the Institution of Engineers Electrical Engineering Division, v. 74, 1993.
- [121] **Ricard, J.**
The determination of optimum operating schedules for interconnected hydro and thermal stations.
Rev. Gen. Elec., pp. 167, France, 1940.
- [122] **Río, J.; Bayón, L; Loredó, E.**
Solución multiobjetivo del problema hidrotérmico en el nuevo mercado español de la electricidad.
CEPADE, Universidad Politécnica de Madrid, pp. 11, Madrid, 2000.
- [123] **Río, J.; García, P.; Coto, J.**
Algoritmo del poliedro flexible con funciones de penalización. Aplicación a la coordinación hidrotérmica en el nuevo mercado eléctrico español.
Revista de Información Tecnológica, CIT, Vol. 11, pp. 185-192, Chile, 2000.
- [124] **Ruzic, S.; Rajacovic, N.; Vuckovic, A.**
Operational cost modeling improvement in short term hydrothermal coordination.
Proceedings IEEE-MELECON'98, Vol. 2, pp. 916-920, New York, 1998.
- [125] **Salam, Md.S.**
Comparison of Lagrangian Relaxation and Truncated Dynamic Programming Methods for Solving Hydrothermal Coordination Problems.
Proceedings of Inter. Conf. on Intelligent Sensing and Information Processing, ICISIP 2004, pp. 265-270, 2004.
- [126] **Soliman, S. A.; Christensen, G. S.**
New algorithm for optimal parameter estimation with linear constraints.
Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 66, n° 3, pp. 503-513, Sept. 1990.
- [127] **Soliman, S. A.; Christensen, G. S.; Rouhi, A. H.**
Power system state estimation with equality constraints.
Electric Machines & Power Systems, Vol. 20, pp. 183-202, 1992.

- [128] **Suárez, P. M.**
Optimización del coste de combustible en un sistema hidrotérmico mediante técnicas del análisis funcional.
Cuaderno de investigación nº 11, Depto. Matemáticas, Univ. Oviedo, 1989.
- [129] **Talaq, J. H.; El-Hawary, F.; El-Hawary, M. E.**
Minimum emissions power flow.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. 9, nº 1, pp. 429-435, Feb. 1994.
- [130] **Talaq, J. H.; El-Hawary, F.; El-Hawary, M. E.**
A summary of environmental economic dispatch algorithms.
IEEE Trans. Power Sys., Vol. 9, nº 3, pp. 1508-1516, Aug. 1994.
- [131] **Talaq, J. H.; El-Hawary, F.; El-Hawary, M. E.**
Minimum emissions power flow using Newton's method and its variants.
Electric Power Systems Research, Vol. 39, nº 3, pp. 233-239, Dec. 1996.
- [132] **Troutman, J. L.**
Variational calculus with elementary convexity.
Ed. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [133] **Tufegdžic, N.; Hyslop, P.**
An optimal real-time short term operation of independent hydro generator company in the open electricity market.
Electric Power Systems Research, Vol. 41, nº 1, pp. 5-11, April 1997.
- [134] **Vanderbei, R.J.**
Interior point methods: algorithms and formulations.
ORSA J. Comput., vol. 6, nº 1, pp. 32-34, 1994.
- [135] **Vázquez, C.; Rivier, M.; Pérez, J. I.**
Revisión de los modelos de casación de ofertas del mercado eléctrico.
6ª Jornadas Hispano-Lusas de Ingeniería Eléctrica, Lisboa, 1999.
- [136] **Vigo-Aguilar J.**
An Approach to Variable Coefficients Methods for Special Differential Equations.
International Journal of Applied Mathematics. (Editorial: Academic Pub.) Clave: A Vol. 1. N. 8, pp. 168 – 184, 1999.
- [137] **Vigo-Aguilar J.; Ferrándiz J.M.**
A General Procedure for the Adaptation of Multistep Algorithms to the Integration of Oscillatory Problems.
SIAM J.of Numerical Analysis. Clave: A Vol. 35. N. 4, pp. 1684 – 1708, 1998.
- [138] **Wang, C. ; Shahidehpour, S.**
Power generation scheduling for multi-area hydrothermal systems with tie line constraints, cascaded reservoirs and uncertain data.
IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 8, nº 3, pp. 1090-1097, Aug. 1993.

Capítulo 10

ANEXO I. LISTA DE SÍMBOLOS

$A(t)$	Coefficiente que depende de las características del embalse de una central hidráulica.
b_i	Volumen de agua disponible que puede turbinar la central hidráulica i -ésima hasta el instante T .
$\bar{\mathbf{b}}$	Vector de volúmenes disponibles de las n centrales hidráulicas.
b_{ii}	Coefficiente de pérdidas de la central i -ésima.
B_y	Parámetro que depende de la geometría del embalse de una central hidráulica.
B_{T_i}	Parámetro que depende de la geometría del embalse de una central hidráulica.
D_i	Conjunto de valores de las potencias generables en cada instante por la central térmica i -ésima.
F	Funcional a minimizar.
F_i	Función de costo de la central térmica i -ésima.
\tilde{F}_i	Función de costo de la central térmica i -ésima incorporando pérdidas.
$F_{\mathbf{q}}^i$	Funcional a minimizar sobre la componente i -ésima suponiendo un cierto comportamiento para el resto de las centrales.
G	Eficiencia de una central hidráulica.
G_i	Función de costo de la central térmica i -ésima considerando pérdidas.
H	Función de generación hidráulica efectiva.
H_i	Función de generación hidráulica efectiva de la central i -ésima.
$H_{\text{máx}}$	Potencia máxima de generación de una central hidráulica.
\mathbb{H}	Conjunto de elementos admisibles para H .
$H_{\mathbf{q}}^i$	Potencia generada por el sistema hidráulico, como función de la central i -ésima, suponiendo un determinado comportamiento para las restantes.
$h(t)$	Altura del salto de agua.
$H_{\mathbf{n}} - T_{\mathbf{m}}$	Problema hidrotérmico que consta de m centrales térmicas y n hidráulicas.
$H_{\mathbf{n}} - T_1$	Problema hidrotérmico que consta de n centrales hidráulicas y 1 térmica.
i	Flujo natural del agua.
K	Constante de coordinación.
m	Número de centrales térmicas.
n	Número de centrales hidráulicas.