OPTIMIZACION DEL COSTE DE COMBUSTIBLE EN UN SISTEMA HIDROTERMICO MEDIANTE TECNICAS DEL ANALISIS FUNCIONAL

1 Introducción

En esta tesis se estudia la programación óptima de un sistema de potencia hidrotérmico, es decir, un sistema que comprende tanto centrales térmicas como centrales hidráulicas. Para abordar el problema se utiliza la teoría del análisis funcional, junto con la teoría de los sistemas discretos con condiciones de contorno.

Las centrales hidráulicas serán de carga variable, esto es, la potencia generada en cada planta hidráulica es una función del caudal de descarga y del volumen de agua descargada hasta ese instante, o lo que es lo mismo de la cota de agua.

El problema consiste en minimizar el coste total de combustible de las plantas térmicas, durante un intervalo de tiempo determinado, que suele ser de 24h., o dicho de otra forma, en encontrar los valores de las potencias generadas en las térmicas y en las hidráulicas para que el costo de producción sea mínimo.

Las plantas hidráulicas estarán acopladas hidráulicamente, es decir, el caudal de salida de una central va a influir en el caudal de entrada de la central aguas abajo y además se tendrá en cuenta el tiempo que tarda en fluir el agua entre las dos centrales, es decir el retraso en el transporte.

Consideraremos cuencas hidráulicas de naturaleza múltiple o ramificada, de forma que a una central podrán alimentarla varias centrales aguas arriba y también podremos encontrar centrales sin ninguna central aguas arriba ocupando una posición baja en la cuenca.

Para resolver el problema, en primer lugar utilizaremos la técnica desarrollada por los autores El-Hawary y Christensen [24] que utilizan el teorema del análisis funcional llamado teorema de la norma mínima, a continuación a la solución hallada, que llamaremos solución óptima 1, le aplicaremos la teoría de los sistemas discretos con condiciones de contorno para hallar la solución definitiva, que llamaremos solución óptima 2 y que será fácilmente implementable.

Por último, a partir de la solución hallada anteriormente, deduciremos un algoritmo de optimización para el sistema hidrotérmico e implementándolo comprobaremos su funcionamiento mediante un ejemplo concreto.

2 Fundamentos matemáticos

A continuación vamos a exponer las técnicas de optimización matemática, que emplearemos para la resolución del problema. Previamente haremos una exposición de los distintos conceptos matemáticos que vamos a emplear y seguidamente expondremos el teorema del análisis funcional que nos llevará a la solución del problema.

2.1 Espacios de Hilbert

Comenzaremos este repaso de los conceptos matemáticos básicos, definiendo los espacio de trabajo en los que nos moveremos. Sea E un espacio vectorial definido sobre un cuerpo K. Diremos que es un espacio prehilbertiano si está definida un aplicación (|):$ExE \rightarrow K$, llamada producto escalar, cumpliendo ciertas condiciones [44].

Se llama espacio de Hilbert a todo espacio prehilbertiano y completo.

En el posterior desarrollo utilizaremos, principalmente, dos espacios de Hilbert, que serán:

En primer lugar, el espacio R^n cuyos elementos son de la forma:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

El producto escalar que definimos en dicho espacio, viene dado por:

$$< x, y > = x^T y$$

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

En segundo lugar, el espacio $L_{2B}{}^n[0,T_f]$, donde los elementos del espacio son vectores de n componentes, funciones del tiempo, definidas en el intervalo $[0,T_f]$, dados por:

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ . \\ . \\ . \\ u_n(t) \end{pmatrix} \qquad v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ . \\ . \\ . \\ v_n(t) \end{pmatrix}$$

Siendo $B(t)$ una matriz simétrica y definida positiva, cuyos elementos son funciones del tiempo, dada por:

$$B(t)=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} & \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} & \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} & \\ . & . & . & " & " & . \\ . & . & . & " & " & . \\ . & . & . & " & " & . \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} & \end{pmatrix}$$

En este segundo espacio definimos el siguiente producto escalar:

$$< v(t), u(t) > = \int_0^{T_f} v^T(t)B(t)u(t)dt$$

para todo $v(t)$ y $u(t)$.

Podemos observar que la norma vendrá dada por:

$$\| u(t) \|^2 = < u(t), u(t) > = \int_0^{T_f} u^T(t)B(t)u(t)dt$$

2.2 Operadores lineales

Sabemos que un operador lineal es una aplicación de un espacio en otro:

$$T: \quad X ----\to Y$$

$$x ----\to T(x)$$

que cumple la propiedad de que:

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad y \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in R$$

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2)$$

Además decimos que dicho operador está acotado si se verifica que:

$$\| T(x) \| \le M \| x \| \quad \forall x \in X$$

Un operador lineal acotado que vamos a emplear es:

$$T: \quad L_{2B}^n[0, T_f] ------\to R^m$$

$$b = T[u(t)]$$

$$b = \int_0^{T_f} M^T u(t)dt \qquad (3.2.2.1)$$

en donde M es una matriz, que definiremos más adelante.

2.3 Operadores conjugados

Dado el operador T entre dos espacios de Hilbert:

$$T: \quad H -----\to G$$

se define el operador conjugado de T (y se representa por T^*) como:

$$T^*: \quad G \text{-------}\!\!\rightarrow H$$

que verifica:

$$< Tx, y > = < x, T^* y > \qquad (3.2.3.1)$$

Obsérvese que el producto escalar de la izquierda está dado en G, mientras el de la derecha está dado en H.

Veamos los operadores conjugados que utilizaremos en adelante:

1)

$$T: \quad E^n \text{------}\!\!\rightarrow E^m$$

$$x \text{------}\!\!\rightarrow T(x)$$

$$T(x) = Ax$$

Al operador conjugado de y vamos a llamarle z:

$$z = T^* y$$

En primer lugar hallamos el producto escalar de y por el transformado de x

$$< Tx, y > = < Ax, y > = (Ax)^T y = x^T A^T y \qquad (3.2.3.2))$$

Ahora calculamos el segundo miembro de la ecuación (3.2.3.1)

$$< x, T^* y > = < x, z > = x^T z \qquad (3.2.3.3)$$

Igualando las ecuaciones (3.2.3.2) y (3.2.3.3) obtenemos:

$$x^T z = x^T A^T y$$

$$z = A^T y$$

$$T^*(y) = A^T y$$

Por lo tanto vemos que el operador conjugado de T es:

$$T^*: \quad E^m \text{-----}\!\!\rightarrow E^n$$

$$x \text{-----}\!\!\rightarrow A^T x$$

2) Vamos a hallar ahora el conjugado del siguiente operador:

$$T: \quad L^n_{2B}[0, T_f] \text{-----}\!\!\rightarrow R^m$$

$$u(t) \text{----}\!\!\rightarrow T[u(t)]$$

$$T[u(t)] = \int_0^{T_f} M^T u(t) dt$$

Como hemos visto anteriormente, se tiene que verificar que:

$$< Tu, b > = < u, T^* b >$$

Como en el caso anterior, al operador conjugado de *b*, vamos a llamarle *z*:

$$z = T^* b$$

Ahora se puede ver fácilmente que:

$$< Tu, b > = < \left(\int_0^{T_f} M^T u(t) dt \right), b > = \left(\int_0^{T_f} M^T u(t) dt \right)^T b = \int_0^{T_f} u(t)^T M b \, dt \qquad (3.2.3.4)$$

y asimismo:

$$< u, T^* b > = < u, z > = \int_0^{T_f} u(t)^T B(t) z \, dt$$

Igualando (3.2.3.4) con la ecuación anterior y teniendo en cuenta que la igualdad debe de verificarse para todo *t*, llegamos a:

$$\int_0^{T_f} u(t)^T M b \, dt = \int_0^{T_f} u(t)^T B(t) z \, dt$$

$$u(t)^T M b = u(t)^T B(t) z$$

De aquí deducimos que:

$$M b = B(t) z$$

$$z = B^{-1}(t) M b$$

$$T^* b = B^{-1} M b$$

Por lo que el operador conjugado de *T* es:

$$T^* \quad : \quad R^m \text{---------}\!\!\rightarrow L_{2B}^n[0, T_f]$$

$$b \text{---------}\!\!\rightarrow T^*(b)$$

$$T^*(b) = B^{-1}(t) M b \qquad (3.2.3.5)$$

3.2.4 Operadores inversos

Definimos el operador inverso de:

$$T: \quad X \text{------}\!\!\rightarrow Y$$

$$x \text{------}\!\!\rightarrow T(x)$$

como el operador:

$$T^{-1}: \quad Y \text{-------}\!\!\rightarrow X$$

tal que:

$$T^{-1}[T(x)] = T[T^{-1}(x)] = x \qquad (3.2.4.1)$$

Vamos a hallar un operador inverso que utilizaremos más adelante. Primeramente calculamos el operador compuesto de las ecuaciones (3.2.2.1) y (3.2.3.5):

$$T(T^*b) = T[B^{-1}(t)Mb] = \int_0^{T_f} M^T B^{-1}(t)Mb\,dt$$

Llamamos:

$$K(b) = T[T^*(b)]$$

y a continuación hallamos el operador inverso de éste:

$$K[K^{-1}(b)] = b \qquad (3.2.4.2)$$

$$K[K^{-1}(b)] = \int_0^{T_f} M^T B^{-1}(t)MK^{-1}(b)dt$$

Teniendo en cuenta (3.2.4.2):

$$\int_0^{T_f} M^T B^{-1}(t)MK^{-1}(b)dt = b$$

Despejando obtenemos:

$$K^{-1}(b) = \left[\int_0^{T_f} M^T B^{-1}(t)M\,dt\right]^{-1} b$$

Por lo tanto el operador inverso que buscamos será:

$$T[T^*(b)]^{-1} = \left[\int_0^{T_f} M^T B^{-1}(t)M\,dt\right]^{-1} b$$

3.2.5 Teorema de la norma mínima

Para optimizar nuestro funcional de costo, vamos a utilizar conceptos de análisis funcional, como el siguiente teorema, llamado teorema de la norma mínima [24]:

Teorema 1. Sean *B* y *D* espacios de Banach, *T* un operador lineal acotado definido en *B* y que tome valores en *D* y u_o un vector dado en *B*. Para cada *b* del rango de *T*, existe un único elemento u_b perteneciente a *B* tal que:

$$b = T(u)$$

y que minimice el funcional:

$$J(u) = \| u - u_o \|$$

El único óptimo u_b perteneciente a *B* viene dado por:

$$u_b = T^+(b - Tu_o) + u_o$$

Donde el operador T^+, en el caso de espacios de Hilbert, es el siguiente:

$$T^+(c) = T^*(TT^*)^{-1}(c)$$

supuesto que existe el operador inverso de $T(T^*)$.

2.6 Aplicación del torema de la norma mínima

Más adelante veremos que hemos de resolver el problema de encontrar el mínimo de un funcional que, enmarcado en el espacio apropiado, puede ser expresado en forma de norma como:

$$J[u(t)] = \| u(t) + \frac{1}{2} v(t) \|$$

donde $v(t)$ es un vector conocido y $u(t)$ tendrá que verificar la ecuación:

$$b = T[u(t)]$$

siendo T el operador lineal:

$$T: \quad L_{2B}^{n}[0, T_f] ------\rightarrow R^{n-m}$$

$$u(t) ------\rightarrow T[u(t)]$$

$$T[u(t)] = \int_0^{T_f} M^T u(t) dt$$

Para encontrar el vector óptimo $u_b(t)$, aplicamos el teorema 1 visto anteriormente, que en este caso será:

$$u_b(t) = T^+\left[b + \frac{1}{2} T(v(t))\right] - \frac{1}{2} v(t) \qquad (3.2.6.1)$$

Llamando h a:

$$h = b + \frac{1}{2} T[v(t)] \qquad (3.2.6.2)$$

la expresión (3.2.6.1) nos quedará como:

$$u_b(t) = T^+(h) - \frac{1}{2} v(t) = T^*[(TT^*)^{-1} h] - \frac{1}{2} v(t)$$

$$(TT^*)^{-1} h = \left[\int_0^{T_f} M^T B^{-1}(t) M dt\right]^{-1} h$$

$$T^*[(TT^*)^{-1} h] = B^{-1}(t) M \left[\int_0^{T_f} M^T B^{-1}(t) M dt\right]^{-1} h$$

De la ecuación (3.2.6.2) obtenemos:

$$h = b + \frac{1}{2} \int_0^{T_f} M^T v(t) dt$$

y de estas ecuaciones ya podemos obtener el vector óptimo que vendrá dado por la expresión siguiente:

$$u_b(t) = B^{-1}(t) M \left[\int_0^{T_f} M^T B^{-1}(t) M dt\right]^{-1} \left[b + \frac{1}{2} \int_0^{T_f} M^T v(t) dt\right] - \frac{1}{2} v(t)$$

2.7 Teoría de sistemas discretos con condiciones de contorno

Vamos a estudiar los sistemas de ecuaciones en diferencias con condiciones de contorno de la forma siguiente:

$$y(j+1)-y(j)=F(y(j),y(j+1),j)$$

$$g(y(0))+h(y(q))=c \qquad (3.2.7.1)$$

Donde *F*, *g* y *h* son funciones vectoriales y *c* es un vector constante. Más adelante mostraremos que (3.2.7.1) puede ser representada por una gran variedad de ecuaciones en sumas.

Haremos especial hincapié en los problemas lineales de la forma:

$$y(j+1)-y(j)=A(j)y(j+1)+B(j)y(j)+f(j)$$

$$My(0)+Ny(q)=c$$

$$j\in\{0,1,2,...,q-1\} \qquad (3.2.7.2)$$

donde $A(j)$, $B(j)$, M, y N son matrices de dimensión (PxP) y $f(j)$ y c son vectores de dimensión P, (siendo c un vector constante).

En primer lugar vamos a estudiar el problema en esta última forma, es decir el problema lineal, para a continuación estudiar el problema en su forma general.

Supondremos que $A(j)$, $B(j)$ y $f(j)$ están definidos para:

$$j\in\{0,1,2,...,q-1\}$$

y que $|I-A(j)|\neq 0$.

Representaremos por $\Phi^V(j,i)$ la matriz de transición del sistema lineal:

$$y(j+1)-y(j)=V(j)y(j)$$

en donde $V(j)$ viene dada por:

$$V(j)=[I-A(j)]^{-1}[A(j)+B(j)]$$

Se puede ver [33] que esta matriz la podemos hallar de la siguiente forma:

$$\Phi^V(j,k)=\begin{cases}[I+V(j-k)] & j\geq k+1\\ I & j=k\end{cases}$$

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar un teorema [33] para resolver el problema lineal que tenemos planteado.:

Teorema 2. Si el determinante:

$$|M+N\Phi^V(q,0)|\neq 0$$

y la matriz:

$$I+V(j)=[I-A(j)]^{-1}[I+B(j)]$$

es no singular para: $j\in\{0,1,2,...,q-1\}$

entonces (3.2.7.2) tiene una única solución $\Gamma(j)$ que puede ser expresada en la forma:

$$\Gamma(j) = H^{VMN}(j)c + \sum_{k=0}^{q-1} G^{VMN}(j,k)f(k)$$

donde las matrices $H^{VMN}(j)$ y $G^{VMN}(j,k)$ son las matrices de Green y vienen dadas por:

$$H^{VMN}(j) = \Phi^{V}(j,0)\,[M + N\Phi^{V}(q,0)]^{-1}$$

$$G^{VMN}(j,k) = \begin{cases} H^{VMN}(j)M\Phi^{V}(0,k+1)\,[I - A(k)]^{-1} & 0 \le k \le j-1 \\ -H^{VMN}(j)N\Phi^{V}(q,k+1)\,[I - A(k)]^{-1} & j \le k \le q-1 \end{cases}$$

Si se cumplen las hipótesis del teorema anterior entonces al conjunto $\{A(j), B(j), M, N\}$ se le llama conjunto de condiciones de contorno compatible [33].

Supongamos que tenemos el problema con dos condiciones de contorno en su forma más general:

$$y(j+1) - y(j) = F(y(j+1), y(j), j)$$

$$g(y(0)) + h(y(q)) = c$$

$$j \in \{0, 1, 2, ..., q-1\} \qquad (3.2.7.3)$$

Este problema lo podemos reducir a la forma (3.2.7.2) del siguiente modo:

$$y(j+1) - y(j) = A(j)y(j+1) + B(j)y(j) + \{F(y(j+1), y(j), j) - A(j)y(j+1) - B(j)y(j)\}$$

$$My(0) + Ny(q) = c - g(y(0)) - h(y(q)) + My(0) + Ny(q)$$

Por lo tanto el problema lo podemos expresar como indicamos a continuación:

$$y(j+1) - y(j) = A(j)y(j+1) + B(j)y(j) + f(j)$$

$$My(0) + Ny(q) = d$$

$$j \in \{0, 1, 2, ..., q-1\}$$

en donde $f(j)$ y d vienen dados por:

$$f(j) = F(y(j+1), y(j), j) - A(j)y(j+1) - B(j)y(j)$$

$$d = c - g(y(0)) - h(y(q)) + My(0) + Ny(q)$$

Una vez modificado el problema, ya le podemos aplicar todo lo que hemos visto anteriormente y sabemos que dicho problema es equivalente a la ecuación en sumas:

$$y(j) = H^{VMN}(j)c + \sum_{k=0}^{q-1} G^{VMN}(j,k)f(k) \qquad (3.2.7.4)$$

Si llamamos J al conjunto de condiciones de contorno compatible $\{A(j), B(j), M, N\}$ y representamos:

$$T^{J} = H^{VMN}(j)c + \sum_{k=0}^{q-1} G^{VMN}(j,k)f(k)$$

entonces la ecuación en sumas (3.2.7.4) la podemos expresar como una ecuación en operador de la forma:

$$y(j) = T^J(y(j)) \qquad (3.2.7.5)$$

Esta ecuación estará definida en un espacio de Banach apropiado y los resultados referentes a la convergencia de algoritmos del punto fijo de la forma:

$$y_{(n+1)} = T(y_n)$$

nos servirán para resolver (3.2.7.3). En particular analizaremos el método de contracción del punto fijo modificado.

2.8 Algoritmos del punto fijo

En los capítulos siguientes, y tras aplicar diversos métodos de optimización, llegaremos siempre a un sistema de ecuaciones, en general no lineal.

Los sistemas de ecuaciones no lineales se pueden expresar considerando cada componente de un vector desconocido como una función de todas las componentes del vector:

$$y_i = T_i(y_1, y_2, ..., y_s) \qquad i = 1, 2, ..., s$$

Denotando por $y = (y_1, y_2, ..., y_s)$ y $T(y) = (T_1(y), T_2(y), ..., T_s(y))$ el sistema anterior queda expresado por:

$$y = T(y)$$

Si existe un elemento y^* que cumpla la ecuación anterior, a este elemento se le llama punto fijo de *T*. La ecuación proporciona, bajo ciertas condiciones de convergencia, un método iterativo que permitirá llegar a la solución del problema.

Este método se conoce con el nombre de algoritmo del punto fijo: Sea *Y* un espacio de Banach y *T* una aplicación de *Y* en sí mismo. Sea y_0 un elemento de *Y*. La sucesión $\{y_n\}$ generada por:

$$y_{n+1} = T(y_n) \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

se llama algoritmo de contracción del punto fijo o sucesión CM para *T* basada en y_0.

La convergencia del método y la unicidad de solución están aseguradas por el siguiente teorema [33]:

Teorema 3. Sea *Y* un espacio métrico completo con métrica δ y sea Ω un subconjunto cerrado de *Y*. Si *T* transforma *Y* en *Y*, Ω es *T*-invariante y existe un α positivo y menor que 1 tal que:

$$\delta(T(y), T(y')) \leq \alpha\delta(y, y') \qquad \forall y, y' \in \Omega$$

entonces la sucesión $\{y_n\}$ de CM para *T* basada en cualquier $y_0 \in \Omega$ converge al único punto fijo y^* de *T* en Ω y además se cumple que:

$$\delta(y^*, y_n) \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}\delta(y_n, y_{n-1}) \leq \frac{\alpha^n}{\alpha - 1}\delta(y_1, y_0) \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

La aplicación directa del algoritmo del punto fijo a veces no conduce a una sucesión de aproximaciones convergente. Frecuentemente, es posible modificar T de forma que la sucesión de aproximaciones sea convergente, este es, el llamado algoritmo del punto fijo modificado [33]:

Teorema 4. Sean T y V aplicaciones de Y en Y. Supongamos que la matriz (I-V) es invertible y sea P la aplicación de Y en Y dada por:

$$P(y) = [I - V]^{-1}\,[T(y) - V(y)]$$

entonces y^* es un punto fijo de T si y sólo si y^* es un punto fijo de P.

Por tanto, el algoritmo del punto fijo modificado se puede expresar de la siguiente forma:

$$y_{n+1} = [I - V]^{-1}\,[T(y_n) - V(y_n)]$$

Así el límite de la sucesión del algoritmo del punto fijo modificado para T basada en y_0, coincide con el límite de la del punto fijo para P también basada en y_0. El siguiente teorema [33] será fundamental en todo el desarrollo posterior.

Teorema 5. Supongamos que P es diferenciable sobre $\bar{S} = \bar{S}(y_0, r)$ y que existen números reales η y α con $\eta \geq 0$ y $0 \leq \alpha \leq 1$ tal que:

$$\| y_1 - y_0 \| \leq \eta, \qquad \sup_{y \in \bar{S}} \{\| P'(y) \|\} \leq \alpha, \qquad \frac{1}{1-\alpha}\eta \leq r$$

entonces la sucesión $\{y_n\}$ del punto fijo modificado de T, basada en y_0 y V, converge al único punto fijo y^* de T en $\bar{S}$ y la tasa de convergencia viene dada por:

$$\| y^* - y_n \| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \| y_n - y_{n-1} \| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \| y_1 - y_0 \| .$$

La importancia de esta proposición radica en el hecho de que el método del punto fijo se extiende a operadores que no son contractivos. La condición básica de que

$$\sup_{y \in \bar{S}} \| T'(y) \| \leq \alpha < 1$$

se reemplaza por el que la derivada de $P(y)$ sea bastante pequeña en $\bar{S}$. Por otra parte, si

$$\sup_{y \in \bar{S}} \| [I - V]^{-1}\,[T''(y) - V] \| \leq \alpha < 1$$

para algún operador V con (I-V) invertible, se puede acelerar la convergencia. En el corolario no se especifica el operador lineal V. Más información acerca de la selección de V se puede encontrar considerando la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas.

Del teorema del Valor Medio se obtiene que la convergencia será más rápida si el operador V se elige de manera que:

$$\sup_{0<\theta<1} \| [I-V]^{-1} [T''(y_{n-1}+\theta(y_n-y_{n-1}))-V] \| \quad n=1,2,...$$

sea suficientemente pequeño. Evidentemente, hay diferentes elecciones de V.

3 Planteamiento del problema

Vamos a suponer que nuestro sistema consta de W cuencas hidráulicas. Para simplificar el problema estudiaremos una sola cuenca y al final extenderemos el resultado a todas las cuencas del sistema.

Sea un sistema con n centrales eléctricas, de las cuales m son térmicas y el resto, es decir n-m, hidráulicas, repartidas en una sola cuenca. Las centrales hidráulicas van a estar situadas tal como se indica en la figura 2.9, y por lo tanto existirá acoplamiento hidráulico entre ellas. El problema que vamos a estudiar consiste en calcular las potencias que tienen que generar las distintas centrales, para que el coste de combustible, durante el intervalo de optimización $[0,T_f]$, sea mínimo.

Nuestro objetivo, por tanto, es minimizar el coste total de combustible, es decir, tendremos que minimizar el funcional:

$$J=\int_o^{T_f}\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i+\beta_i P_{si}(t)+\gamma_i P_{si}^2(t))dt$$

sometido a una serie de restricciones. La primera:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t)=P_D(t)+P_L(t)$$

Utilizando la fórmula de pérdidas que ya vimos, esta restricción la podemos expresar de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P_i(t)B_{ij}P_j(t)+\sum_{i=1}^{n}(B_{io}-1)P_i(t)+P_D(t)+K_{LO}=0 \qquad (3.3.1)$$

Otras restricciones que tendremos que considerar las obtendremos operando adecuadamente en las ecuaciones de funcionamiento de la red hidráulica y serán:

$$q_{m+i}(t)-\dot{Q}_{m+i}(t)=0 \qquad (i\in R_h) \qquad ó \qquad i=1,2,3,\ldots,n-m$$

$$P_{hm+i}(t)+A_{m+i}(t)q_{m+i}(t)+B_{m+i}q_{m+i}(t)Q_{m+i}(t)+C_{m+i}q_{m+i}^2(t)=0 \quad (i\in R_{hCA}) \qquad (3.3.2)$$

$$P_{hm+i}(t)+A_{m+i}(t)q_{m+i}(t)-B_{m+i}q_{m+i}(t)\sum_{j\in R_{hi}}Y_j(t,\tau_j)+B_{m+i}q_{m+i}(t)Q_{m+i}(t)+C_{m+i}q_{m+i}^2(t)=0 \qquad (i\in R_{hID})$$

Siendo R_{hCA} la unión de las plantas cabecera y aisladas y R_{hID} la unión de las plantas intermedias y desembocadura.

Para tener en cuenta estas restricciones introducimos unas funciones multiplicadoras desconocidas, que vamos a llamar $l(t)$, $n_i(t)$, $m_i(t)$ y $r_i(t)$. Tendremos que incluir en el funcional de costo estos multiplicadores, junto con las restricciones correspondientes, obteniendo lo siguiente:

$$J = \int_0^{T_f} I\,dt \qquad \text{donde:} \qquad I = I_E + I_H$$

La primera parte del integrando incluye los términos eléctricos y la segunda los términos hidráulicos y su desarrollo es el siguiente:

$$I_E = \sum_{i=1}^{m}(\beta_i P_{si}(t) + \gamma_i P_{si}^2(t)) + l(t)\,[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P_i(t)B_{ij}P_j(t)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(1 - B_{io})P_i(t)] + \sum_{i\in R_h} n_i(t)P_{hi}(t)$$

La segunda parte del integrando incluye las restricciones hidráulicas (excepto el término de $P_{hi}(t)$) y expresando (2.7.3) del modo siguiente, sin más que elevar al cuadrado, obtendremos la cuarta restricción:

$$Y_j^2(t,\tau_j) = \begin{cases} \Psi_j^2(t,\tau_j) & 0 \le t \le \tau_j \\ \Psi_j^2(\tau_j,\tau_j) + Q_j^2(t-\tau_j) + 2\Psi_j(\tau_j,\tau_j)Q_j(t-\tau_j) & \tau_j < t \le T_f \end{cases} \qquad (j \in R_{hi}) \qquad (3.3.3)$$

Con todo ello:

$$J_h = \int_0^{T_f}\{\sum_{i\in R_h}[n_i(t)\,(A_i(t)q_i(t) + C_i q_i^2(t))$$

$$+B_i Q_i(t)\dot{Q}_i(t)) + m_i(t)q_i(t) + \dot{m}_i(t)Q_i(t)]$$

$$-\sum_{i\in R_{hID}}\left[B_i n_i(t)q_i(t)\sum_{j\in R_{hi}} Y_j(t,\tau_j)\right] + \sum_{i\in R_{hID}}\sum_{j\in R_{hi}} r_j(t)Y_j^2(t,\tau_j)\}\,dt$$

$$-\sum_{i\in R_{hID}}\sum_{j\in R_{hi}}\int_{\tau_j}^{T_f} r_j(t)\,[Q_j^2(t-\tau_j) + 2\Psi_j(\tau_j,\tau_j)Q_j(t-\tau_j)]\,dt$$

En la expresión anterior se han suprimido los términos que no dependen explícitamente de las variables de control $(\Psi_j, P_D, \ldots)$, se han despreciado algunas constantes $(K_{LO}, \ldots)$ y se han realizado transformaciones aplicando integración por partes (término $\dot{m}_i(t), \dot{Q}_i(t), \ldots$).

Se puede obtener una expresión todavía más simplificada y sin retraso en la variable $Q_j(t)$ mediante cambios de variable y la introducción de las nuevas funciones:

$$\dot{p}_i(t,\tau_j) = \begin{cases} 2\Psi_i(\tau_i,\tau_i)r_i(t+\tau_i) & 0 \le t \le T_f - \tau_i \\ 0 & T_f - \tau_i < t \le T_f \end{cases}$$

$$\theta_i(t,\tau_i) = \begin{cases} r_i(t+\tau_i) & 0 \le t \le T_f - \tau_i \\ 0 & T_f - \tau_i < t \le T_f \end{cases}$$

Una vez formado el funcional de costo aumentado y modificado debemos expresarlo en forma de norma para poderle aplicar los resultados del análisis funcional que veremos más adelante. Definiremos:

1) El vector de control:

$$u(t) = \begin{bmatrix} P(t) \\ W(t) \end{bmatrix}$$

formado por los siguientes subvectores:

$P(t)$: incluye las potencias activas de todas las plantas generadoras del sistema.

$W(t) = \mathrm{col}[W_i(t) : i \in R_h]$

con dimensión y definición diferente según la categoría de la planta a la que se refiera:

$$W_i(t) = \begin{bmatrix} Q_i(t) \\ q_i(t) \end{bmatrix} \qquad i \in R_{hCA}$$

$$W_i(t) = \begin{bmatrix} Q_i(t) \\ q_i(t) \\ Y_{iw}(t) \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad Y_{iw}(t) = \mathrm{col}[Y_j(t, \tau_j) : j \in R_{hi}] \qquad i \in R_{hID}$$

2) El vector auxiliar:

$$L(t) = \begin{bmatrix} L_\mathrm{p}(t) \\ L_w(t) \end{bmatrix}$$

siendo:

$$L_\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} \beta_1 - l(t)\,(1 - B_{1o}) \\ \beta_2 - l(t)\,(1 - B_{2o}) \\ . \\ . \\ . \\ \beta_m - l(t)\,(1 - B_{mo}) \\ n_{m+1}(t) - l(t)\,(1 - B_{m+1o}) \\ n_{m+2}(t) - l(t)\,(1 - B_{m+2o}) \\ . \\ . \\ . \\ n_n(t) - l(t)\,(1 - B_{no}) \end{bmatrix}$$

$$L_w(t) = \mathrm{col}[L_{wi}(t) : i \in R_h] \quad \text{con} \quad L_{wi}(t) = \mathrm{col}[\dot{m}_i(t), I_{wi}(t)]$$

donde los subvectores $I_{wi}(t)$ vuelven a depender del tipo de planta:

$$I_\mathbf{wi}(t) = [m_i(t) + n_i(t) A_i(t) + p_i(t, \tau_i)] \qquad (i \in R_{hC})$$

$$I_\mathbf{wi}(t) = [m_i(t) + n_i(t) A_i(t)] \qquad (i \in R_{hA})$$

$$I_{\mathbf{wi}}(t) = \mathrm{col}[m_i(t) + n_i(t)A_i(t), 0_i] \qquad (i \in R_{hD})$$

$$I_{\mathbf{wi}}(t) = \mathrm{col}[m_i(t) + n_i(t)A_i(t) + p_i(t, \tau_i), 0_i] \qquad (i \in R_{hI})$$

Las componentes del vector 0_i son ceros y su dimensión es el número de plantas que alimentan a la i-ésima.

3) La matriz cuadrada y simétrica:

$$B(t) = \mathrm{diag}[B_p(t), B_w(t)] \qquad \text{ó} \quad \text{bien:}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} \underset{nxn}{B_p(t)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{m+1}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_{m+2}(t) & \dots & 0 \\ . & . & . & '' & '' \\ . & . & . & '' & '' \\ . & . & . & '' & '' \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_n(t) \end{bmatrix}$$

Las submatrices son:

$$B_{\mathbf{p}}(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1 + B_{11}l(t) & B_{12}l(t) & \dots & B_{1m}l(t) & . & \dots & B_{1n}l(t) \\ B_{21}l(t) & \gamma_2 + B_{22}l(t) & \dots & B_{2m}l(t) & . & \dots & B_{2n}l(t) \\ . & . & '' & '' & . & '' & '' \\ B_{m+11}l(t) & B_{m+12}l(t) & \dots & . & B_{m+1m+1}l(t) & \dots & B_{m+1n}l(t) \\ . & . & '' & '' & . & '' & '' \\ B_{n1}l(t) & B_{n2}l(t) & \dots & B_{mm}l(t) & . & \dots & B_{nn}l(t) \end{bmatrix}$$

La matriz $B_w(t)$ es diagonal por bloques y las submatrices $B_{wi}(t)$ de que consta son, según la categoría de las plantas:

$$B_{\mathbf{wi}}(t) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2}B_i\dot{n}_i(t) + \theta_i(t, \tau_i)\right) & 0 \\ 0 & C_i n_i(t) \end{bmatrix} \qquad (i \in R_{hC})$$

$$B_{wi}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}B_i\dot{n}_i(t) & 0 \\ 0 & C_i n_i(t) \end{bmatrix} \qquad (i \in R_{hA})$$

Para las plantas desembocadura, la dimensión de esta matriz depende del número de plantas que las alimentan:

$$B_{\mathbf{wi}}(t) = \mathrm{diag}\left[-\frac{1}{2}B_i\dot{n}_i(t), B_{wai}(t)\right]$$

$$B_{wai}(t) = \begin{bmatrix} C_i n_i(t) & B_{wni}^T(t) \\ B_{wni}(t) & B_{wri}(t) \end{bmatrix}$$

La submatriz $B_{wri}(t)$ es diagonal, de dimensión el número de plantas que alimentan a la de trabajo:

$$B_{wri}(t) = \text{diag}[r_j(t) : j \in R_{hi}]$$

y el vector $B_{wni}(t)$ es de dimensión compatible con la anterior submatriz y tiene todas sus componentes de igual valor:

$$B_{wni}(t) = \text{col}\left[-\frac{1}{2}B_i n_i(t), \ldots\right] \qquad (i \in R_{hD})$$

Para las plantas intermedias se obtiene una matriz casi idéntica a la anterior, salvo que aparece la función θ_i:

$$B_{wi}(t) = \text{diag}\left[-\frac{1}{2}(B_i \dot{n}_i(t) + \theta_i(t, \tau_i)), B_{wai}(t)\right] \qquad (i \in R_{hI})$$

Teniendo en cuenta, ahora, el vector $L(t)$ y la matriz $B(t)$, se puede ver fácilmente que el funcional de costo se puede expresar de la siguiente forma:

$$J[u(t)] = \int_0^{T_f} [L^T(t)u(t) + u^T(t)B(t)u(t)]\,dt$$

Para hacer una última transformación en el funcional de costo vamos a introducir el vector V(t), definido de la siguiente forma:

$$V^T(t) = L^T(t)B^{-1}(t)$$

Una vez que hemos definido este vector, es trivial, aplicando propiedades elementales del álgebra de matrices, comprobar que se cumple:

$$L^T u + u^T B u = \left[u + \frac{1}{2}V\right]^T B\left[u + \frac{1}{2}V\right] - \frac{1}{2}V^T B \frac{1}{2}V$$

Por lo que el funcional de costo vendrá dado por la expresión:

$$J[u(t)] = \int_0^{T_f} \{\left[u(t) + \frac{1}{2}V(t)\right]^T B(t)\left[u(t) + \frac{1}{2}V(t)\right] - \frac{1}{2}V(t)^T B(t)\frac{1}{2}V(t)\}\,dt$$

Como el último término del integrando no depende del vector de control $u(t)$, adoptaremos como expresión para el funcional de costo:

$$J[u(t)] = \int_0^{T_f} \left[u(t) + \frac{1}{2}V(t)\right]^T B(t)\left[u(t) + \frac{1}{2}V(t)\right] dt$$

A continuación consideramos $u(t)$ y $V(t)$ elementos del espacio de Hilbert $L_{2B}^{D}[0,T_f]$ cuyos elementos son vectores de D componentes, cada una de las cuales son funciones del tiempo definidas en el intervalo $[0,T_f]$ y de cuadrado integrable.

La dimensión D es $3n - 2m + d + I$, pues tenemos n potencias, dos componentes por cada central hidráulica y una componente más por cada central intermedia y desembocadura presente en el sistema (d es el número de centrales de desembocadura e I el de intermedias).

Siendo $B(t)$ una matriz simétrica y definida positiva cuyos elementos son funciones del tiempo, definimos el producto escalar en el espacio de Hilbert como:

$$< v(t), u(t) >= \int_0^{T_f} v^T(t)B(t)u(t)dt$$

Y por tanto podemos expresar el funcional de costo en forma de norma como:

$$J[u(t)] = \left\| u(t) + \frac{1}{2}V(t) \right\|^2$$

Y para finalizar, el volumen de agua disponible durante el intervalo de optimización en la central hidráulica i es como ya vimos b_i y por tanto, en cada central hidráulica se tendrá que cumplir:

$$\int_0^{T_f} q_{m+i}(t)dt = b_{m+i} \qquad i = 1, 2, 3, ..., n-m \qquad (3.3.4)$$

Vamos a expresar esta última restricción en forma más conveniente para el planteamiento del problema. Para ello vamos a definir primeramente el siguiente vector:

$$b = \text{col}[b_{m+1}, b_{m+2}, b_{m+3}, \dots, b_n]$$

A continuación, definimos la matriz M definiendo previamente los vectores 0 y 1:

$$\underset{1xn}{1} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \qquad \underset{1xn}{0} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

$$\underset{(n-m)x(4n-3m-1)}{M^T} = \begin{bmatrix} \underset{1xn}{0} & \underset{1x2}{1} & \underset{1x3}{0} & \underset{1x3}{0} & \dots & \underset{1x3}{0} \\ \underset{1xn}{0} & \underset{1x2}{0} & \underset{1x3}{1} & \underset{1x3}{0} & \dots & \underset{1x3}{0} \\ \underset{1xn}{0} & \underset{1x2}{0} & \underset{1x3}{0} & \underset{1x3}{1} & \dots & \underset{1x3}{0} \\ . \\ . \\ . \\ \underset{1xn}{0} & \underset{1x2}{0} & \underset{1x3}{0} & \underset{1x3}{0} & \dots & \underset{1x3}{1} \end{bmatrix}$$

Vemos que la matriz transpuesta de M tiene n-m filas, 4n-3m-1 columnas, y se puede comprobar que:

$$M^T u(t) = \text{col}[q_{m+1}(t), q_{m+2}(t), \dots, q_n(t)]$$

Por tanto:

$$b = \int_0^{T_f} M^T u(t)dt$$

La última expresión define el operador lineal acotado:

$$T: \qquad L_{2B}^{4n-3m-1}[0, T_f] \text{------} \rightarrow R^{n-m}$$

$$b = T[u(t)]$$

Esta última ecuación, junto con la expresión del funcional de costo, vista con anterioridad, reduce el problema a:

Encontrar el vector de control $u(t)$ que minimice el funcional:

$$J[u(t)] = \left\| u(t) + \frac{1}{2} V(t) \right\|$$

y que satisfaga la ecuación:

$$b = T[u(t)]$$

4 Solución óptima 1

En el epígrafe anterior se obtuvo el funcional de costo en forma de norma, y la restricción en forma de una ecuación en operador, de modo que estamos en condiciones de aplicar el teorema 1 (teorema de la norma mínima) y sin más que realizar operaciones matriciales hallar la solución óptima del problema.

Dicha solución óptima junto con las restricciones del sistema, definen completamente la estrategia óptima de operación.

Sin embargo la solución que proporciona el teorema no es práctica debido, entre otras razones, a que se trata de un sistema integro-diferencial donde además aparecen las funciones multiplicadoras desconocidas, las cuales deben calcularse imponiendo las restricciones del sistema.

Si sustituimos los valores óptimos de las variables $q_i(t)$, $Q_i(t)$ e $Y_j(t,\tau_j)$ en las ecuaciones de restricción correspondientes, eliminando las funciones multiplicadoras $m_i(t)$ y $r_i(t)$, y las variables de pseudocontrol $q_i(t)$ e $Y_j(t,\tau_j)$, podemos buscar la solución óptima resolviendo un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden con condiciones de contorno, junto con las restricciones (3.3.1) y (3.3.2).

A esta forma de la solución le llamaremos solución óptima 1 y viene expresada por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dt}[2C_{m+1}n_{m+1}(t)\dot{Q}_{m+1}(t) + A_{m+1}(t)n_{m+1}(t)] + B_{m+1}\dot{n}_{m+1}(t)Q_{m+1}(t) + g_{m+1}(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}[2C_{m+2}n_{m+2}(t)\dot{Q}_{m+2}(t) + A_{m+2}(t)n_{m+2}(t)] + B_{m+2}\dot{n}_{m+2}(t)Q_{m+2}(t) + g_{m+2}(t) = 0$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\frac{d}{dt}[2C_n n_n(t)\dot{Q}_n(t) + A_n(t)n_n(t)] + B_n\dot{n}_n(t)Q_n(t) + g_n(t) = 0$$

con las condiciones de contorno para la variable volumen, que se deducen inmediatamente de la restricción (3.3.4):

$$Q_{m+1}(0) = 0 \qquad\qquad Q_{m+1}(T_f) = b_{m+1}$$

$$Q_{m+2}(0) = 0 \qquad\qquad Q_{m+2}(T_f) = b_{m+2}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$Q_n(0) = 0 \qquad\qquad Q_n(T_f) = b_n$$

y debiendo cumplirse las restricciones (3.3.1) y (3.3.2) para poder hallar los multiplicadores $l(t)$ y $n_i(t)$ aún incógnitas:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i^2(t)B_{ii} + \sum_{i=1}^{n} (B_{io} - 1)P_i(t) + P_D(t) + K_{LO} = 0$$

$$P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t)q_{m+i}(t) + B_{m+i}q_{m+i}(t)Q_{m+i}(t) + C_{m+i}q_{m+i}^2(t) = 0 \qquad (i \in R_{hCA})$$

$$P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t)q_{m+i}(t) - B_{m+i}q_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j) + B_{m+i}q_{m+i}(t)Q_{m+i}(t) + C_{m+i}q_{m+i}^2(t) = 0 \qquad (i \in R_{hID})$$

Es de destacar que se trata ya de volúmenes y caudales óptimos y también que se ha supuesto $B_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ en la fórmula de pérdidas. También tendremos en consideración que las potencias óptimas generadas, tanto en las centrales térmicas como en las centrales hidráulicas, vienen dadas por:

$$P_{si}(t) = -\frac{1}{2}\frac{\beta_i - l(t)(1 - B_{io})}{\gamma_i + B_{ii}l(t)}$$

$$i = 1, 2, 3, ..., m$$

$$P_{hm+i}(t) = -\frac{1}{2}\frac{n_{m+i}(t) - l(t)(1 - B_{m+io})}{B_{m+im+i}l(t)}$$

$$i = 1, 2, ..., n - m$$

Las funciones $g_{m+i}(t)$ que aparecen anteriormente son:

$$g_i(t) = 0 \qquad (i \in R_{hA})$$

$$g_i(t) = \begin{cases} B_k n_k(t + \tau_i)\dot{Q}_k(t + \tau_i) & 0 \le t \le T_f - \tau_i \\ 0 & T_f - \tau_i < t \le T_f \end{cases} \qquad (i \in R_{hC})$$

$$g_i(t) = \begin{cases} B_k n_k(t + \tau_i)\dot{Q}_k(t + \tau_i) - \frac{d}{dt}\left[B_i n_i(t) \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j)\right] & 0 \le t \le T_f - \tau_i \\ -\frac{d}{dt}\left[B_i n_i(t) \sum_{j \in R_{hi}} [\Psi_j(\tau_j, \tau_j) + Q_j(t - \tau_j)]\right] & T_f - \tau_i < t \le T_f \end{cases} \qquad (i \in R_{hI})$$

$$g_i(t) = -\frac{d}{dt}\left[B_i n_i(t) \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j)\right] \qquad (i \in R_{hD})$$

siendo k la planta inmediatamente aguas abajo a la planta i.

Ahora ya tenemos el problema preparado en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno.

En primer lugar transformaremos dicho sistema mediante operaciones elementales obteniendo *n* - *m* ecuaciones de 2º orden:

$$\begin{cases} \ddot{Q}_{m+1}(t) + \rho_{m+1}(t)\dot{Q}_{m+1}(t) + \varepsilon_{m+1}\rho_{m+1}(t)Q_{m+1}(t) + G_{m+1}(t) = 0 \\ \ddot{Q}_{m+2}(t) + \rho_{m+2}(t)\dot{Q}_{m+2}(t) + \varepsilon_{m+2}\rho_{m+2}(t)Q_{m+2}(t) + G_{m+2}(t) = 0 \\ \ddot{Q}_{m+3}(t) + \rho_{m+3}(t)\dot{Q}_{m+3}(t) + \varepsilon_{m+3}\rho_{m+3}(t)Q_{m+3}(t) + G_{m+3}(t) = 0 \\ . \\ . \\ . \\ \ddot{Q}_{n}(t) + \rho_{n}(t)\dot{Q}_{n}(t) + \varepsilon_{n}\rho_{n}(t)Q_{n}(t) + G_{n}(t) = 0 \end{cases}$$

Donde las funciones que aparecen son:

$$G_{m+i}(t) = \frac{1}{2C_{m+i}}\left\{\frac{g_{m+i}(t)}{n_{m+i}(t)} + \dot{A}_{m+i}(t) + A_{m+i}(t)\left[\frac{\dot{n}_{m+i}(t)}{n_{m+i}(t)}\right]\right\}$$

$$\rho_{m+i}(t) = \frac{\dot{n}_{m+i}(t)}{n_{m+i}(t)} \qquad ; \qquad \varepsilon_{m+i} = \frac{B_{m+i}}{2C_{m+i}}$$

$$i = 1, 2, 3, ..., n - m$$

Las ecuaciones diferenciales las expresamos en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_{m+i}(t) \\ \ddot{Q}_{m+i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon_{m+i}\rho_{m+i}(t) & -\rho_{m+i}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{m+i}(t) \\ \dot{Q}_{m+i}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -G_{m+i} \end{bmatrix}$$

$$i = 1, 2, ..., n - m$$

Si ahora empleamos la siguiente notación:

$$z^1_{m+i}(t) = Q_{m+i}(t) \qquad ; \qquad z^2_{m+i}(t) = \dot{Q}_{m+i}(t)$$

$$\mathbf{z_{m+i}}(t) = \begin{bmatrix} z^1_{m+i}(t) \\ z^2_{m+i}(t) \end{bmatrix} \qquad ; \qquad F_{m+i}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -G_{m+i}(t) \end{bmatrix}$$

$$R_{m+i}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon_{m+i}\rho_{m+i}(t) & -\rho_{m+i}(t) \end{bmatrix}$$

las ecuaciones en forma matricial se nos transforman en:

$$\dot{z}_{m+i}(t) = R_{m+i}(t)z_{m+i}(t) + F_{m+i}(t)$$

$$i = 1, 2, 3, ..., n - m$$

Las condiciones de contorno:

$$Q_{m+i}(0) = 0$$

$$Q_{m+i}(T_f) = b_{m+i}$$

$$i = 1, 2, 3, ..., n - m$$

las podemos transformar introduciendo unas matrices *M* y *N*:

$$M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad\qquad N=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Con estas matrices las condiciones de contorno serán:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_{m+i}(0)\\ \dot{Q}_{m+i}(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_{m+i}(T_f)\\ \dot{Q}_{m+i}(T_f)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ b_{m+i}\end{bmatrix}$$

$$i=1,2,3,...,n-m$$

Con la notación introducida las ecuaciones anteriores se transforman en:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z^1_{m+i}(0)\\ z^2_{m+i}(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z^1_{m+i}(T_f)\\ z^2_{m+i}(T_f)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ b_{m+i}\end{bmatrix}$$

$$i=1,2,3,...,n-m$$

De esta forma, el problema lo podemos expresar como la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{z}_{m+i}(t)=R_{m+i}(t)z_{m+i}(t)+F_{m+i}(t)$$

$$i=1,2,3,...,n-m$$

con las condiciones de contorno:

$$Mz_{m+i}(0)+Nz_{m+i}(T_f)=\begin{bmatrix}0\\ b_{m+i}\end{bmatrix}$$

$$i=1,2,3,...,n-m$$

En el epígrafe siguiente estudiaremos su resolución mediante la teoría de los sistema discretos con condiciones de contorno, que nos llevará a la solución óptima definitiva (la cual llamaremos solución óptima 2) y por tanto debemos previamente preparar el problema discretizándolo de forma conveniente.

Dividiendo el intervalo de optimización $[0,T_f]$ en q subintervalos y discretizando la solución óptima 1, ésta la podemos expresar como la solución del sistema de ecuaciones en diferencias finitas, con condiciones de contorno:

$$z_{m+i}(j+1)-z_{m+i}(j)=R_{m+i}(j)z_{m+i}(j)+F_{m+i}(j)$$

$$j=0,1,2,...,q-1$$

$$i=1,2,3,...,n-m$$

$$Mz_{m+i}(0)+Nz_{m+i}(T_f)=\begin{bmatrix}0\\ b_{m+i}\end{bmatrix}$$

$$i=1,2,3,...,n-m$$

donde las funciones y matrices que aparecen en esta expresión son, tras la discretización efectuada:

$$z^2_{m+i}(j) = Q_{m+i}(j+1) - Q_{m+i}(j)$$

$$z^1_{m+i}(j) = Q_{m+i}(j)$$

$$z_{m+i}(j) = \begin{bmatrix} z^1_{m+i}(j) \\ z^2_{m+i}(j) \end{bmatrix}$$

Podemos observar que, al discretizar el sistema, la notación que emplearemos será llamar $z^2_{m+i}(j)$ al caudal de descarga y $z^1_{m+i}(j)$ al agua descargada.

Las otras funciones que aparecen las podemos expresar, como se deduce fácilmente, de la siguiente forma:

$$F_{m+i}(j) = \begin{bmatrix} 0 \\ -G_{m+i}(j) \end{bmatrix} \quad ; \quad R_{m+i}(j) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon_{m+i}\rho_{m+i}(j) & -\rho_{m+i}(j) \end{bmatrix}$$

$$G_{m+i}(j) = \frac{1}{2C_{m+i}} \left\{ \frac{g_{m+i}(j)}{n_{m+i}(j)} + A_{m+i}(j+1) - A_{m+i}(j) + A_{m+i}(j) \left[\frac{n_{m+i}(j+1) - n_{m+i}(j)}{n_{m+i}(j)} \right] \right\}$$

$$\rho_{m+i}(j) = \frac{n_{m+i}(j+1) - n_{m+i}(j)}{n_{m+i}(j)} \quad ; \quad \varepsilon_{m+i} = \frac{B_{m+i}}{2C_{m+i}}$$

Las funciones $g_{m+i}(j)$, que reproducen, fundamentalmente, el acoplamiento hidráulico entre las centrales y la influencia del retraso en el transporte son:

$$g_i(j) = 0 \qquad 0 \le j \le q-1 \qquad (i \in R_{hA})$$

$$g_i(j) = \begin{cases} B_k n_k(j+\tau_i) z^2_k(j+\tau_i) & 0 \le j \le q-\tau_i \\ 0 & q-\tau_i < j \le q-1 \end{cases} \qquad (i \in R_{hC})$$

$$g_i(j) = \begin{cases} B_k n_k(j+\tau_i) z^2_k(j+\tau_i) - B_i n_i(j+1) \sum\limits_{s \in R_{hi}} Y_s(j+1, \tau_s) + \\ \quad + B_i n_i(j) \sum\limits_{s \in R_{hi}} Y_s(j, \tau_s) & 0 \le j \le q-\tau_i \\ -B_i n_i(j+1) \sum\limits_{s \in R_{hi}} (\Psi_s(\tau_s, \tau_s) + z^1_s(j+1-\tau_s)) + \\ \quad + B_i n_i(j) \sum\limits_{s \in R_{hi}} (\Psi_s(\tau_s, \tau_s) + z^1_s(j-\tau_s)) & q-\tau_i < j \le q-1 \end{cases} \qquad (i \in R_{hI})$$

$$g_i(j) = -B_i n_i(j+1) \sum_{s \in R_{hi}} Y_s(j+1, \tau_s) +$$

$$+ B_i n_i(j) \sum_{s \in R_{hi}} Y_s(j, \tau_s) \qquad 0 \le j \le q-1 \qquad (i \in R_{hD})$$

Y una vez discretizado el sistema, la función Ψ podemos suponer que es:

$$\Psi_s(j, \tau_s) = \sum_{j=-\tau_s}^{j-\tau_s} z^2_s(j) \qquad (s \in R_{hi})$$

Destaquemos por último, que en la solución óptima 1 ya son conocidas las potencias óptimas generadas:

$$P_{si}(j) = -\frac{1}{2}\frac{\beta_i - l(j)\,(1 - B_{io})}{\gamma_i + B_{ii}l(j)}$$

$$i = 1, 2, 3, ..., m$$

$$P_{hm+i}(j) = -\frac{1}{2}\frac{n_{m+i}(j) - l(j)\,(1 - B_{m+io})}{B_{m+im+i}l(j)}$$

$$i = 1, 2, ..., n - m$$

$$j = 0, 1, 2, ..., q$$

y que deben verificarse todavía las restricciones (3.3.1) y (3.3.2) para hallar las funciones multiplicadoras $l(j)$ y $n_i(j)$.

5 Solución óptima 2

A continuación aplicamos a la solución óptima 1 recién obtenida la teoría de los sistemas discretos con condiciones de contorno, para hallar la solución definitiva que llamaremos solución óptima 2.

En primer lugar escogemos los valores de las matrices *A*(*j*) y *B*(*j*) de forma que junto con las matrices *M* y *N* formen un conjunto de condiciones de contorno compatible:

$$A(j) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B(j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora hallamos la matriz de transición $\Phi^V(j,k)$, del sistema lineal:

$$z_{m+i}(j+1) - z_{m+i}(j) = V(j)z_{m+i}(j)$$

$$\Phi^V(j,k) = \begin{bmatrix} 1 & j-k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con estos valores, se demuestra que se cumplen las hipótesis del teorema 2, el cual vamos a aplicar en la solución óptima 1, al sistema de ecuaciones en diferencias no lineal, pero con condiciones de contorno lineales que vimos anteriormente.

En nuestro problema el segundo miembro de la ecuación en diferencias es tan sólo función de $z_{m+i}(j)$ y por tanto el problema lineal asociado será:

$$z_{m+i}(j+1) - z_{m+i}(j) = A(j)z_{m+i}(j) + B(j)z_{m+i}(j) + f(j)$$

con lo cual se verifica la fórmula particular:

$$V(j) = A(j) + B(j)$$

Las matrices de Green $H^{VMN}(j)$ y $G^{VMN}(j,k)$ según las definiciones correspondientes del teorema 2 son:

$$H^{VMN}(j) = \frac{1}{q}\begin{bmatrix} q-j & j \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$0 \le k \le j-1$

$$G^{VMN}(j,k) = \frac{1}{q}\begin{bmatrix} q-j & -k(q-j) \\ -1 & k \end{bmatrix}$$

$j \le k \le q-1$

$$G^{VMN}(j,k) = \frac{-1}{q}\begin{bmatrix} j & j(q-k) \\ 1 & (q-k) \end{bmatrix}$$

A continuación hallamos el valor de $f(k)$ a partir de:

$$f(k) = [R_{m+i}(k) z_{m+i}(k) + F_{m+i}(k)] - A(k) z_{m+i}(k) - B(k) z_{m+i}(k)$$

$$f(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\varepsilon_{m+i}\rho_{m+i}(k) z^1_{m+i}(k) - \rho_{m+i}(k) z^2_{m+i}(k) - G_{m+i}(k) \end{bmatrix}$$

Por último ya podemos obtener $z_{m+i}(j)$:

$$z_{m+i}(j) = H^{VMN}(j)c + \sum_{k=0}^{q-1} G^{VMN}(j,k) f(k)$$

$$\begin{bmatrix} z^1_{m+i}(j) \\ z^2_{m+i}(j) \end{bmatrix} = \frac{1}{q}\begin{bmatrix} q-j & j \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ b_{m+i} \end{bmatrix} +$$

$$+\sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{q}\begin{bmatrix} q-j & -k(q-j) \\ -1 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -f_{m+i}(k) \end{bmatrix} + \sum_{k=j}^{q-1} \frac{-1}{q}\begin{bmatrix} j & j(q-k) \\ 1 & (q-k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -f_{m+i}(k) \end{bmatrix} \qquad (3.5.1)$$

en donde $f_{m+i}(k)$ es:

$$f_{m+i}(k) = \varepsilon_{m+i}\rho_{m+i}(k) z^1_{m+i}(k) + \rho_{m+i}(k) z^2_{m+i}(k) + G_{m+i}(k)$$

Operando adecuadamente en (3.5.1) obtenemos:

$$z^1_{m+i}(j) = \frac{b_{m+i} j}{q} + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{k(q-j)}{q} f_{m+i}(k) + \sum_{k=j}^{q-1} \frac{j(q-k)}{q} f_{m+i}(k)$$

$$z^2_{m+i}(j) = \frac{b_{m+i}}{q} + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{-k}{q} f_{m+i}(k) + \sum_{k=j}^{q-1} \frac{(q-k)}{q} f_{m+i}(k)$$

$$i = 1, 2, ..., n-m$$

$$j \in \{0, 1, 2, ..., q-1\}$$

Hemos obtenido por tanto un sistema de ecuaciones en sumas, equivalente al problema discreto con dos condiciones de contorno original.

6 Algoritmo de optimización

Las ecuaciones anteriores las podemos expresar en forma matricial:

$$z(j) = T(j, z(j))$$

la cual podemos resolver aplicando el algoritmo del punto fijo modificado (teorema 5):

$$z(j)_{n+1} = [I - V]^{-1}\,[T(j, z(j)_n) - V(z(j)_n)]$$

para n = 0, 1, 2,. . . hasta donde se satisfaga, siendo V la matriz:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \nu$$

y ν el valor de corrección de cada iteración.

En las ecuaciones que hemos obtenido anteriormente para las potencias óptimas se puede observar que si conocemos los valores de los parámetros $l(j)$ y $n_{m+i}(j)$ obtendremos los valores de las potencias óptimas generadas y tendremos resuelto el problema de optimización planteado.

En este momento consideramos el sistema completo, es decir formado por m centrales térmicas y W cuencas, cada una de las cuales consta a su vez de n^T - m centrales hidráulicas distribuidas de la forma que vimos en el capítulo segundo.

Para hallar el valor de los parámetros $l(j)$ y $n^T_{m+i}(j)$ sustituiremos los valores de las potencias óptimas en las ecuaciones de restricción que todavía deben verificarse.

Sustituyendo en (3.3.2) se puede despejar el multiplicador $n^T_{m+i}(j)$ y despreciando los coeficientes B_{io} de la fórmula de pérdidas obtenemos:

$$n^T_{m+i}(j) = l(j) + 2B^T_{m+i\,m+i}\,l(j)\,[A^T_{m+i}(j)\,[z^2_{m+i}(j)]^T + \\ +B^T_{m+i}[z^2_{m+i}(j)]^T\,[z^1_{m+i}(j)]^T + C^T_{m+i}\left[[z^2_{m+i}(j)]^T\right]^2] \qquad (i \in R_{hCA})$$

$$n^T_{m+i}(j) = l(j) + 2B^T_{m+i\,m+i}\,l(j)\,[A^T_{m+i}(j)\,[z^2_{m+i}(j)]^T + \\ -B^T_{m+i}[z^2_{m+i}(j)]^T\left[\sum_{s\in R_{hi}} Y_s(j,\tau_s)\right]^T + B^T_{m+i}[z^2_{m+i}(j)]^T\,[z^1_{m+i}(j)]^T + C^T_{m+i}\left[[z^2_{m+i}(j)]^T\right]^2] \qquad (i \in R_{hID})$$

Sustituyendo en (3.3.2) se obtiene la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{4}\frac{[\beta_i - l(j)]^2}{[\gamma_i + B_{ii}l(j)]^2}B_{ii} + \sum_{T=1}^{w}\left[\sum_{i=1}^{n^T-m}\frac{1}{4}\frac{[n^T_{m+i}(j) - l(j)]^2}{B^T_{m+i\,m+i}\,l(j)^2}\right] + \\ -\frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{m}(-1)\frac{\beta_i - l(j)}{\gamma_i + B_{ii}l(j)} - \frac{1}{2}\sum_{T=1}^{w}\left[\sum_{i=1}^{n^T-m}(-1)\frac{n^T_{m+i}(j) - l(j)}{B^T_{m+i\,m+i}\,l(j)}\right] + \\ +P_D(j) = 0$$

donde los sumatorios referidos a las centrales térmicas $SUMT$ se pueden escribir como:

$$SUMT = \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{[B_{ii}\beta_i + \gamma_i]^2}{B_{ii}[\gamma_i + B_{ii}l(j)]^2} - \frac{1}{B_{ii}}\right]$$

y donde los sumatorios referidos a las centrales hidráulicas $SUMH$ se pueden escribir como:

$$SUMH = \frac{1}{l(j)^2}SUMN - SUMC$$

siendo:

$$SUMN = \sum_{T=1}^{W}\left[\sum_{i=1}^{n^T-m}\frac{n_{m+i}^2(j)}{B_{m+im+i}}\right]$$

$$SUMC = \sum_{T=1}^{W}\left[\sum_{i=1}^{n^T-m}\frac{1}{B_{m+im+i}}\right]$$

Por tanto:

$$l(j) = \frac{SUMN}{l(j)\,[SUMC - SUMT - 4P_D(j)]}$$

Las ecuaciones que resultan junto con la aplicación del algoritmo del punto fijo modificado nos conducen al algoritmo de optimización.

Para aplicar el algoritmo del punto fijo necesitamos partir de unos valores iniciales:

$$l^0(j), \left[[z_{m+1}^1]^0\right]^T, \left[[z_{m+1}^2]^0\right]^T, \left[[z_{m+2}^1]^0\right]^T, \left[[z_{m+2}^2]^0\right]^T, \ldots, \left[[z_n^1]^0\right], \left[[z_n^2]^0\right]$$

$$T = 1, 2, 3, \ldots, w$$

Una vez escogidos estos valores ,el algoritmo quedará de la siguiente forma:

para $l = 0, 1, 2, \ldots$ hasta donde se satisfaga, hacer:

$$[n_{m+i}(j)]_{l+1}^T = [l(j)]_l + 2B_{m+im+i}^T[l(j)]_l\,[A_{m+i}^T(j)\,[z_{m+i}^2(j)]_l^T +$$

$$+B_{m+i}^T[z_{m+i}^2(j)]_l^T\,[z_{m+i}^1(j)]_l^T + C_{m+i}^T\left[[z_{m+i}^2(j)]_l^T\right]^2]$$

$$(i \in R_{hCA})$$

$$[n_{m+i}(j)]_{l+1}^T = [l(j)]_l + 2B_{m+im+i}^T[l(j)]_l\,[A_{m+i}^T(j)\,[z_{m+i}^2(j)]_l^T +$$

$$-B_{m+i}^T[z_{m+i}^2(j)]_l^T\left[\sum_{s\in R_{hi}} Y_s(j,\tau_s)\right]_l^T + B_{m+i}^T[z_{m+i}^2(j)]_l^T\,[z_{m+i}^1(j)]_l^T + C_{m+i}^T\left[[z_{m+i}^2(j)]_l^T\right]^2]$$

$$(i \in R_{hID})$$

$$[l(j)]_{l+1} = \frac{SUMN_l}{[l(j)]_l\,[SUMC_l - SUMT_l - 4P_D(j)]}$$

$$[z_{m+1}^1(j)]_{l+1}^T = \frac{1}{1-v}\left[\left[\frac{b_{m+1}^T j}{q} + \sum_{k=0}^{j-1}\frac{k(q-j)}{q}f_{m+1}^T(k) + \sum_{k=j}^{q-1}\frac{j(q-k)}{q}f_{m+1}^T(k)\right]_l - v\,[z_{m+1}^1(j)]_l^T\right]$$

$$[z_{m+1}^2(j)]_{l+1}^T = \frac{1}{1-v}\left[\left[\frac{b_{m+1}^T}{q} + \sum_{k=0}^{j-1}\frac{-k}{q}f_{m+1}^T(k) + \sum_{k=j}^{q-1}\frac{(q-k)}{q}f_{m+1}^T(k)\right]_l - v\,[z_{m+1}^2(j)]_l^T\right]$$

$$[z_{m+2}^1(j)]_{l+1}^T = \frac{1}{1-v}\left[\left[\frac{b_{m+2}^T j}{q} + \sum_{k=0}^{j-1}\frac{k(q-j)}{q}f_{m+2}^T(k) + \sum_{k=j}^{q-1}\frac{j(q-k)}{q}f_{m+2}^T(k)\right]_l - v\,[z_{m+2}^1(j)]_l^T\right]$$

$$[z_{m+2}^2(j)]_{l+1}^T = \frac{1}{1-v}\left[\left[\frac{b_{m+2}^T}{q} + \sum_{k=0}^{j-1}\frac{-k}{q}f_{m+2}^T(k) + \sum_{k=j}^{q-1}\frac{(q-k)}{q}f_{m+2}^T(k)\right]_l - v[z_{m+2}^2(j)]_l^T\right]$$

.

.

.

$$\left[z_{n^T}^1(j)\right]_{l+1}^T = \frac{1}{1-v}\left[\left[\frac{b_{n^T}^T j}{q} + \sum_{k=0}^{j-1}\frac{k(q-j)}{q}f_{n^T}^T(k) + \sum_{k=j}^{q-1}\frac{j(q-k)}{q}f_{n^T}^T(k)\right]_l - v\left[z_{n^T}^1(j)\right]_l^T\right]$$

$$\left[z_{n^T}^2(j)\right]_{l+1}^T = \frac{1}{1-v}\left[\left[\frac{b_{n^T}^T}{q} + \sum_{k=0}^{j-1}\frac{-k}{q}f_{n^T}^T(k) + \sum_{k=j}^{q-1}\frac{(q-k)}{q}f_{n^T}^T(k)\right]_l - v\left[z_{n^T}^2(j)\right]_l^T\right]$$

$$T = 1, 2, ..., W$$

para j=0, 1, 2, . . . q.

Una vez obtenidos los valores de los parámetros $l(j)$, $n^T{}_{m+1}(j)$, $n^T{}_{m+2}(j)$, . . , $n^T_{n^T}(j)$, las potencias óptimas generadas en las centrales térmicas y en las centrales hidráulicas son:

$$P_{si}(j) = -\frac{1}{2}\frac{\beta_i - l(j)}{\gamma_i + B_{ii}l(j)}$$

$$j = 0, 1, 2, ..., q$$

$$i = 1, 2, 3, ..., m$$

$$P_{hm+i}^T(j) = -\frac{1}{2}\frac{n_{m+i}^T(j) - l(j)}{B_{m+im+i}^T l(j)}$$

$$j = 0, 1, 2, ..., q$$

$$i = 1, 2, ..., n^T - m$$

$$T = 1, 2, 3, ..., W$$

Hay que hacer constar que la extensión a W cuencas no supone niguna complicación adicional en el desarrollo seguido, pues al ser independientes entre sí no influyen los resultados de una cuenca en las demás.

Basado en este algoritmo se ha realizado un programa de ordenador que tiene dos posibilidades de introducir los datos: por pantalla o grabados. La primera opción permite utilizarlo para cualquier sistema de trabajo y la segunda ha facilitado la resolución del ejemplo que se presenta al final del capítulo.

Hay que destacar que en el programa al aplicar el algoritmo del punto fijo modificado no sólo se modifican en cada pasada los valores de $z_{m+i}^1(j)$ y $z_{m+i}^2(j)$ sino también los de $n_{m+i}(j)$ y $l(j)$.

7 Conclusiones

En esta tesis se ha desarrollado un algoritmo que permite obtener programas de ordenador muy sencillos, para programar el despacho económico de un sistema hidrotérmico, cualquiera que sea el número de centrales que componen el sistema hidrotérmico y con cualquier ramificación de las plantas hidráulicas.

Concretamente se ha minimizado el costo de combustible de las plantas térmicas, considerando tan sólo restricciones de igualdad para el sistema de trabajo.

No se han obviado numerosos factores que complican la resolución del problema, hasta hacerlo muy difícil de resolver si se utilizan otras técnicas de optimización, como son: el acoplamiento hidráulico, el retraso en el transporte, la disponibilidad de agua en cada central, carga variable en las centrales hidráulicas, etc.

El método presenta la ventaja de que podría incluir fácilmente cualquier nueva restricción de igualdad del sistema que se considerase de interés en el sistema hidrotérmico que se esté estudiando.

El algoritmo se ha obtenido para un sistema hidrotérmico cualquiera, con m centrales térmicas y W cuencas ramificadas donde cada una consta de $n^T - m$ centrales hidráulicas, distribuídas de tal forma que se podría dar cualquier configuración entre ellas.

El algoritmo nos da la solución al problema de hallar la potencia generada en cada central para que el coste de combustible sea mínimo en las centrales térmicas, pero podemos ver en el desarrollo del trabajo que, en realidad, obtenemos una información mucho más exhaustiva del sistema. Así, además de la potencia generada en cada central obtenemos los valores instantáneos de las siguientes magnitudes: volumen de agua descargada, altura de agua en los depósitos, caudal de descarga, pérdidas de transmisión, etc... Es decir, tenemos información de los valores de todas las variables que intervienen en la dinámica del sistema, en cualquier instante del tiempo.

Por primera vez se utilizó conjuntamente la teoría del análisis funcional (concretamente el teorema de la norma mínima) y la teoría de los sistemas discretos con condiciones de contorno, para la resolución del problema de cuencas ramificadas, y como resultado obtenemos una solución que presenta numerosas ventajas.

Además de las ya citadas anteriormente, podemos añadir que genera programas de ordenador con un tiempo de ejecución muy bajo y con necesidades de memoria muy inferiores a las requeridas por los programas que resuelven el despacho económico mediante los métodos clásicos.

Para finalizar hay que comentar que el algoritmo tiene el inconveniente de que no admite restricciones de desigualdad, ni es adecuado para optimizaciones combinadas, problemas que se resolverán en los siguientes capítulos.