

**Trigonometría Esférica**  
**con aplicaciones a la Navegación**

Gonzalo Galiano Casas

Universidad de Oviedo, 1999

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Conceptos fundamentales de la trigonometría esférica</b>	<b>4</b>
2.1. Teorema del coseno y teorema de los senos . . . . .	7
2.1.1. Demostraciones vía la geometría clásica . . . . .	7
2.1.2. Demostraciones vía el álgebra vectorial . . . . .	10
2.2. Resolución de triángulos esféricos . . . . .	11
<b>3. El problema de la distancia y del rumbo</b>	<b>12</b>
3.1. Resolución directa . . . . .	12
3.2. Resolución <i>normal</i> . . . . .	13
<b>4. El problema de la posición</b>	<b>16</b>
4.1. Determinación de la latitud . . . . .	18
4.2. Longitud y Tiempo . . . . .	21
<b>5. Otras cuestiones que relacionan la navegación y las matemáticas</b>	<b>25</b>
5.1. Aproximación de la esfera por un plano . . . . .	25
5.2. Derrota loxodrómica . . . . .	27

# 1. Introducción

La trigonometría esférica fue desarrollada en la Antigua Grecia por la necesidad de describir de un modo preciso el movimiento de los astros. Aunque en un primer momento la motivación fue la determinación del comienzo y del fin de las estaciones anuales, pronto se utilizó también para calcular posiciones de lugares de la esfera terrestre y para medir distancias sobre la misma. Posteriormente, y durante siglos, la trigonometría esférica fue la única herramienta analítica a disposición del marino como ayuda a la navegación y, de hecho, muchos de los procedimientos usados en la actualidad fueron desarrollados en la época de los descubrimientos y grandes expediciones marítimas.

En lo que atañe al plan docente de la licenciatura de Náutica y Transporte Marítimo, esta parte de la asignatura de Ampliación sirve de base a la asignatura *Navegación costera y astronómica*, que se imparte en el segundo curso de la licenciatura. Las cuestiones principales que se tratan de resolver en la navegación marítima son las de determinar la posición actual del observador y la del lugar al que desea desplazarse, así como la distancia (mínima) entre ellos y la derrota o trayectoria a seguir.

Aunque en la actualidad existen instrumentos electrónicos que realizan estos cálculos con gran precisión, la normativa derivada de los convenios de la Organización Marítima Internacional, así como el sentido común, imponen que los responsables de los buques posean un conocimiento adecuado sobre las técnicas de navegación sin ayuda del equipo electrónico.

La práctica marinera llevada a cabo durante siglos ha impuesto ciertas metodologías y protocolos que hoy nos pueden parecer un tanto enrevesados y carentes de sentido pero que, claramente, han resultado ser muy útiles. En lo que a nuestra asignatura concierne, observamos que los métodos usados en la marina van más allá de la resolución analítica de un problema: no es suficiente encontrar una fórmula cerrada que nos proporcione la solución del problema, hay que computarla. También van más allá de su resolución numérica: no sólo hay que computar la solución sino que hay que encontrar el modo más sencillo de hacerlo *a mano* y de comprobar que la aproximación de la solución obtenida sea suficientemente buena.

Aunque nada hay que objetar a este planteamiento, sí queremos resaltar que lo que se entiende por calcular *a mano* es realizar operaciones matemáticas elementales (sumas y productos) en las que se operan con números extraídos de las correspondientes tablas náuticas y astronómicas. El error que se trata de minimizar con estos procedimientos no

es tanto el error de truncamiento como el propio error humano, y es así como debemos entender la tendencia a obtener fórmulas *sencillas*. Lo serán en el sentido de que las operaciones a realizar manualmente sean lo más simples posibles: sumas y restas.

Quedando la necesidad de este planteamiento fuera de discusión, resulta también interesante, desde un punto de vista pedagógico, enfocar la materia que nos ocupa desligándola parcialmente de tal finalidad, lo que nos permitirá ahondar un poco en los conceptos matemáticos implícitos en la trigonometría esférica y en sus aplicaciones, a cambio de admitir el uso de la calculadora.

En esta lección expondremos un resumen de los contenidos que se impartirán en las clases dedicadas a la trigonometría esférica. Describiremos tanto los métodos utilizados comúnmente en la marina, que serán a los que más atención prestemos en las clases, como los que nos parecen más sencillos desde el punto de vista conceptual, sobre los cuales haremos observaciones cuando el tiempo lo permita. Además, discutiremos algunos problemas relacionados con la navegación que, si bien no son resueltos mediante el uso de la trigonometría esférica (la trigonometría plana, por el contrario, siempre estará presente), pueden resolverse usando métodos matemáticos introducidos en la asignatura de Cálculo, e ilustran de este modo nociones de dicha asignatura, como las de plano tangente o las relacionadas con la resolución de ecuaciones diferenciales.

Volvamos ahora a la cuestión con la que comenzábamos esta introducción, la de la determinación de las posiciones y la distancia y derrota a seguir. En la determinación de las posiciones juega un papel fundamental la Astronomía de posición, pues es la posición fija de los astros y su observabilidad la que nos permite construir unos sistemas de coordenadas útiles. Para la determinación de las distancias y las derrotas, una vez conocidas las posiciones de los lugares de interés, no necesitamos información que provenga del exterior de la esfera terrestre (se trata de propiedades intrínsecas a la superficie en cuestión). Concretamente, nos proponemos resolver las siguientes cuestiones:

- Dado un lugar en la esfera terrestre, calcular su posición respecto a un sistema de referencia fijo.
- Dadas las posiciones de dos lugares en la esfera terrestre, hallar la distancia entre ellos y la correspondiente trayectoria que los une.

Como veremos en lo que sigue, ambas cuestiones pueden ser resueltas mediante el uso de aparatos de medida y la resolución de triángulos esféricos, materia esta última de

la que trata la trigonometría esférica. Resolveremos en primer lugar la segunda cuestión, por ser más sencilla y ya de por sí útil.

Como complemento del uso de las matemáticas en la modelización y resolución de problemas que aparecen en la navegación, al final de esta lección resolveremos los siguientes problemas:

- Considerando la aproximación local de la esfera mediante un plano, calcular el error cometido en la medida de las distancias entre dos puntos.
- La derrota ortodrómica entre dos puntos de la esfera es la que se sigue minimizando la distancia entre ellos, es decir, a lo largo de circunferencias máximas. Sin embargo, en general, esta derrota sigue un rumbo variable. Otro modo habitual de navegar entre dos puntos es siguiendo la derrota loxodrómica, es decir, la derrota que une dos puntos a rumbo constante. Mediante el cálculo diferencial, calcularemos dicha derrota y la *ganancia*, es decir, la diferencia entre las distancias recorridas a lo largo de sendas trayectorias.

## 2. Conceptos fundamentales de la trigonometría esférica

Como mencionamos en la Introducción, la trigonometría esférica nació en la Antigua Grecia por la necesidad de dar una descripción precisa del movimiento de los astros. Fue Menelao de Alejandría (70-130 D.C.), en su libro *Sphaerica*, el primero en definir la noción de triángulo esférico y en sentar las bases para su resolución. Así como las demostraciones de Euclides de las propiedades de los triángulos planos se basaban en la técnica de reducción al absurdo, Menelao demostró sus teoremas mediante métodos constructivos, del tipo que nosotros manejaremos aquí. Más modernamente, y con la introducción de la geometría cartesiana, primero, y el álgebra vectorial, después, estas demostraciones pudieron simplificarse notablemente. En estas notas presentaremos ambos tipos de demostraciones: vía la geometría clásica y vía la geometría vectorial.

Consideremos una esfera de centro  $O$  y radio  $r$ . Dados dos puntos  $A$  y  $B$  de la misma, se llama *distancia esférica entre  $A$  y  $B$*  a la mínima longitud de arco de circunferencia máxima que los une. Esta circunferencia máxima está dada por la intersección del plano  $AOB$  con la esfera, y la longitud del correspondiente arco que une  $A$  y  $B$  viene dada por la medida del ángulo central  $\angle AOB$  multiplicada por el radio, véase la Figura 7 (a). Puesto que el radio,  $r$ , sólo aparecerá como un factor de escala, podemos tomar  $r = 1$ , a cambio de reescalar las correspondientes magnitudes dependientes de  $r$ . Por ejemplo, en el caso de la Tierra, el proceso de reescalado conduce a considerar la longitud de arco correspondiente a un ángulo central de un minuto como una milla náutica, es decir

$$1' \text{ arco de circunferencia máxima terrestre} = 1 \text{ milla náutica} \sim 1852 \text{ m.}$$

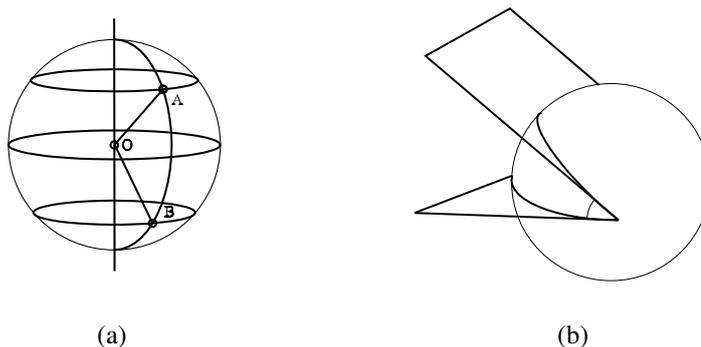


Figura 1: (a) Distancia esférica entre  $A$  y  $B$ . (b) Ángulo esférico formado por dos circunferencias máximas.

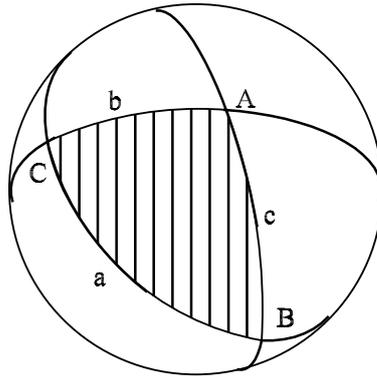


Figura 2: Vértices y lados de un triángulo esférico.

El ángulo formado en una esfera por dos arcos secantes de circunferencias máximas se denomina *ángulo esférico*. Los arcos de las circunferencias máximas son los *lados* del ángulo esférico, y el punto de intersección de los arcos es el *vértice*. La medida de un ángulo esférico viene dada por el ángulo diedro formado por los planos de las circunferencias máximas que contienen a sus lados, véase la Figura 7 (b). Los extremos del diámetro perpendicular a una circunferencia máxima se llaman *polos* de dicha circunferencia.

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres puntos sobre la esfera. La intersección del triedro de centro  $O$  y semirrectas  $OA$ ,  $OB$  y  $OC$  con la esfera determina un *triángulo esférico*. Los lados de este triángulo, que son arcos de circunferencias máximas, los denotaremos por  $a$ ,  $b$  y  $c$ . El lado  $a$  une los vértices  $B$  y  $C$ ,  $b$  une  $A$  y  $C$  y  $c$  une  $A$  y  $B$ . Finalmente, los ángulos asociados a los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  se denotan por  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$ , respectivamente, véase la Figura 2.

Observemos que existe una relación biunívoca entre los lados y ángulos de un triángulo esférico y los correspondientes ángulos centrales y ángulos diedros del triedro que lo genera. Algunas propiedades básicas de los triángulos esféricos, heredadas de las de los triedros, son las siguientes:

1.  $\max \{a, b, c, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\} < 180^\circ$ .
2.  $a + b + c < 360^\circ$  y  $180^\circ < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 540^\circ$ .
3. Se tiene  $b - c < a < b + c$ , y las desigualdades análogas permutando los lados.
4. En todo triángulo esférico, a mayor lado se opone mayor ángulo.

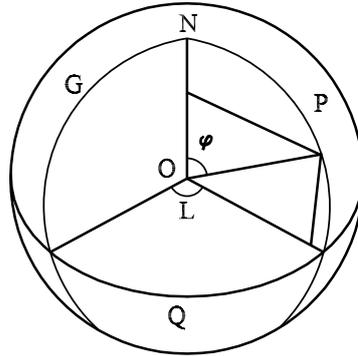


Figura 3: Esfera terrestre. Las coordenadas geográficas del punto  $P$  son la longitud,  $L$ , y la latitud,  $\varphi$ . El punto  $N$  denota el polo Norte,  $G$  el meridiano de Greenwich y  $Q$  el Ecuador.

A todo triángulo esférico se le puede asociar su *triángulo polar*. Los lados de un triángulo dado y los de su polar son suplementarios de los ángulos del otro. Para construir el triángulo polar del triángulo esférico  $ABC$ , basta tomar como vértices  $A_p, B_p, C_p$  los polos de las circunferencias de los lados  $a, b$  y  $c$ , situados, respecto de cada circunferencia, en el mismo hemisferio (o en el hemisferio opuesto) que el triángulo  $ABC$ .

En lo que respecta a la Tierra, para situar un punto  $P$  sobre su superficie se utiliza un sistema de referencia formado por dos circunferencias máximas perpendiculares: el Ecuador y el meridiano Cero, círculo máximo que pasa por los polos Norte y Sur (polos geométricos del Ecuador) y por un punto predeterminado (Greenwich).

El meridiano Cero divide a la esfera terrestre en dos hemisferios denominados oriental y occidental, según se encuentren al Este (E) u Oeste (W), de dicho meridiano. Análogamente, el Ecuador divide a la superficie en los hemisferios Norte (N) y Sur (S).

La *posición del punto  $P$*  se determinará trazando la circunferencia máxima que pasa por  $P$  y por los polos. La semicircunferencia que contiene a  $P, N$  y  $S$  se denomina *meridiano de  $P$* .

La *longitud*,  $L$ , es la medida del arco de Ecuador comprendido entre el meridiano Cero y el de  $P$ . Su valor se haya comprendido entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$  al Este o al Oeste.

La *latitud*,  $\varphi$ , es la medida del arco de meridiano comprendido entre el punto dado y el Ecuador. Su valor está entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$  al Norte o al Sur. Todos los puntos situados a la misma latitud se encuentran sobre una circunferencia menor denominada *paralelo*. La *colatitud* es el ángulo complementario de la latitud ( $90^\circ - \varphi$ ).

En Navegación, la trayectoria seguida por un barco se denomina *derrota*. Cuando la

derrota seguida es un arco de circunferencia máxima, se denomina derrota *ortodrómica*. Cuando el ángulo formado por la derrota y los meridianos permanece constante, hablamos de derrota *loxodrómica*.

El *rumbo* es el ángulo formado por la derrota orientada, en un punto determinado de la misma, con el meridiano de ese punto. Se mide tomando el origen del ángulo sobre el arco de meridiano que une el punto dado con el polo Norte y en el sentido de las agujas del reloj. Su valor está comprendido entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ . En una derrota loxodrómica el rumbo permanece constante. En una ortodrómica, sólo si navegamos a lo largo del Ecuador o de los meridianos.

## 2.1. Teorema del coseno y teorema de los senos

Los teoremas del coseno y de los senos de la trigonometría plana poseen sus análogos y homónimos en la trigonometría esférica, y son las herramientas fundamentales para la resolución de triángulos.

**Teorema** (del coseno). *Dado un triángulo esférico de vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$ , se satisface*

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \hat{A}, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos \hat{B}, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos \hat{C}.\end{aligned}\tag{1}$$

**Teorema** (de los senos). *Dado un triángulo esférico de vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$ , se tiene*

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} \hat{C}}.\tag{2}$$

### 2.1.1. Demostraciones vía la geometría clásica

Comencemos introduciendo alguna notación. Dados tres puntos del espacio,  $A$ ,  $B$  y  $C$ , denotaremos por  $\triangle ABC$  al triángulo plano de vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y por  $ABC$  al plano que contiene dichos puntos (supuesto que no yacen en una misma recta). Nos referiremos al triángulo esférico de vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  por *triángulo esférico  $ABC$* .  $\mathbf{AB}$  denotará el segmento que une los puntos  $A$  y  $B$ ,  $|\mathbf{AB}|$  la longitud de tal segmento y  $AB$  la recta que pasa por dichos puntos. Finalmente, los símbolos " $\hat{\phantom{A}}$ " y " $\angle$ " denotarán ángulos entre figuras planas o esféricas.

Demostremos el teorema del coseno. Para ello, consideremos el triángulo esférico  $ABC$  sobre una esfera de centro  $O$  y radio unitario. Supondremos, en primer lugar, que

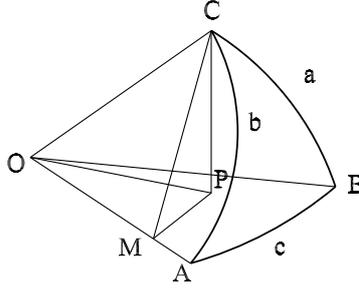


Figura 4: Triángulo esférico  $ABC$  y construcción de los puntos  $P$  y  $M$ .

$\hat{A}$  y  $b$  son agudos. Sean  $P$  y  $M$  las proyecciones ortogonales del vértice  $C$  sobre el plano  $AOB$  y la recta  $OA$ , respectivamente. Por ser  $\hat{A}$  y  $b$  agudos,  $P$  yace en el *interior* de  $\triangle AOB$  y  $M$  sobre el segmento  $OA$ , respectivamente. Véase la Figura 4.

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} CMP \perp OA, & \text{ pues } CP \perp OA \text{ y } CM \perp OA, \\ CP \perp MP, & \text{ pues } CP \perp AOB \supset MP. \end{aligned}$$

Además, como  $COM = COA$  y  $POM = AOB$ , se tiene

$$\angle(COM, POM) = \angle(COA, AOB) = \hat{A}.$$

Por tanto (véase la Figura 5 (a))

$$\begin{aligned} |\mathbf{OM}| &= \cos b \quad \text{y} \quad |\mathbf{MC}| = \sin b, \\ |\mathbf{MP}| &= |\mathbf{MC}| \cos \hat{A} = \sin b \cos \hat{A} \quad \text{y} \quad |\mathbf{PC}| = |\mathbf{MC}| \sin \hat{A} = \sin b \sin \hat{A}. \end{aligned}$$

Por otra parte, podemos descomponer el segmento  $OC$  como  $OC = OM + MP + PC$ , de modo que, proyectando ortogonalmente sobre el segmento  $OB$ , obtenemos

$$\cos(\widehat{OC, OB}) = |\mathbf{OM}| \cos(\widehat{OM, OB}) + |\mathbf{MP}| \cos(\widehat{MP, OB}) + |\mathbf{PC}| \cos(\widehat{PC, OB}).$$

Teniendo en cuenta que  $PC \perp OB$  (por construcción) y  $\angle(MP, OB) = 90^\circ - c$ , obtenemos (Figura 5 (b))

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A}. \quad (3)$$

Veamos ahora que la elección de  $\hat{A}$  y  $b$  como ángulos agudos puede ser obviada. Si  $\hat{A} > 90^\circ$  entonces  $P$  está en el *exterior* de  $\triangle AOB$ , de modo que  $\angle(COM, POM) =$

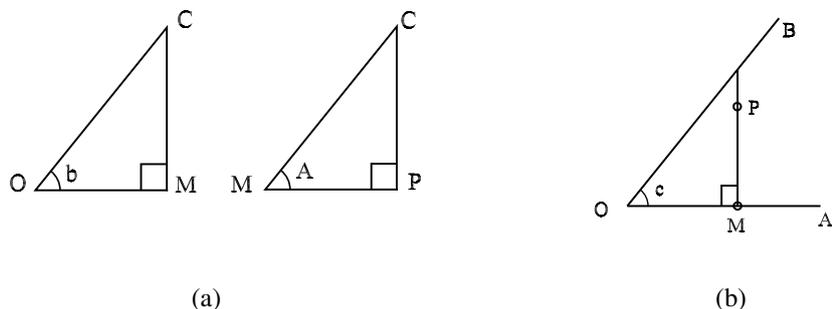


Figura 5: Triángulos planos rectángulos que se obtienen del triángulo esférico  $ABC$ .

$180^\circ - \hat{A}$ . Sin embargo, esto no afecta a la longitud del segmento  $MP$ , que será  $|MP| = |\mathbf{MC} \cos(180^\circ - \hat{A})| = |\mathbf{MC}| \cos \hat{A}$ . Si  $b > 90^\circ$  podemos aplicar la fórmula al triángulo adyacente  $\triangle A'BC$ , siendo  $A'$  el simétrico de  $A$  respecto el origen, y quedando los elementos del triángulo como sigue

$$a' = a, \quad b' = 180^\circ - b, \quad c' = 180^\circ - c, \quad c' = 180^\circ - c, \quad \text{y} \quad \hat{A}' = \hat{A},$$

con lo que la fórmula sigue satisfaciéndose. Finalmente, los casos en que  $\hat{A} = 90^\circ$  (triángulo esférico rectángulo) y  $b = 90^\circ$  (triángulo esférico rectilátero), las proyecciones de  $C$  sobre  $OA$  y  $AOB$  coinciden, es decir,  $M = P$ , y el resultado se sigue tras algunas simplificaciones del argumento inicial.

Observemos finalmente que puesto que la elección de vértices y lados ha sido arbitraria, podemos permutar las letras en la fórmula (3) y así concluir la demostración.

Demostremos ahora el teorema de los senos. Consideremos otra vez la descomposición  $\mathbf{OC} = \mathbf{OM} + \mathbf{MP} + \mathbf{PC}$  y sea  $Z$  un punto del espacio tal que  $OZ \perp AOB$  y  $|\mathbf{OZ}| = 1$ . Proyectando  $\mathbf{OC}$  sobre  $\mathbf{OZ}$  obtenemos

$$\cos(\widehat{OC, OZ}) = |\mathbf{OM}| \cos(\widehat{OM, OZ}) + |\mathbf{MP}| \cos(\widehat{MP, OZ}) + |\mathbf{PC}| \cos(\widehat{PC, OZ}).$$

Como  $OM, MP \subset AOB$  se tiene  $\cos(\widehat{OM, OZ}) = 0$  y  $\cos(\widehat{MP, OZ}) = 0$ . Por otra parte,  $PC \perp AOB$ , es decir  $PC$  es paralelo a  $OZ$ , luego  $\cos(\widehat{PC, OZ}) = 1$ . Se sigue que

$$\cos(\widehat{OC, OZ}) = \text{sen } b \text{ sen } \hat{A}.$$

Aplicando el mismo argumento al ángulo  $B$  (es decir, proyectando  $C$  sobre  $OB$  en vez de sobre  $OA$  para obtener  $M$ ) obtenemos

$$\cos(\widehat{OC, OZ}) = \text{sen } a \text{ sen } \hat{B},$$

de donde

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } \hat{B}}.$$

Nuevamente un argumento de simetría nos permite concluir la demostración.

### 2.1.2. Demostraciones vía el álgebra vectorial

El uso de las identidades del álgebra vectorial simplifica notablemente la deducción de los teoremas del coseno y de los senos. Usaremos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}), \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}, \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}), \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\mathbf{A}$  denota el vector con origen en  $O$  y extremo en  $A$ , etc. Observemos, en primer lugar, que el ángulo,  $\hat{A}$ , que forman los planos  $AOB$  y  $AOC$  viene dado por el ángulo que forman las normales a dichos planos entre sí, es decir

$$\hat{A} = \angle(\mathbf{A} \times \mathbf{B}, \mathbf{A} \times \mathbf{C}). \quad (5)$$

Se tiene, por tanto, que

$$\cos \hat{A} = \frac{(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C})}{|(\mathbf{A} \times \mathbf{B})||(\mathbf{A} \times \mathbf{C})|} = \frac{(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C})}{\text{sen } c \text{ sen } b}.$$

Usando las identidades anteriores obtenemos

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = \cos a - \cos c \cos b.$$

Luego

$$\cos \hat{A} \text{ sen } c \text{ sen } b = \cos a - \cos b \cos c,$$

que es el teorema del coseno.

Tomando senos en (5), y usando nuevamente las identidades (4) obtenemos

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{|(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C})|}{|(\mathbf{A} \times \mathbf{B})||(\mathbf{A} \times \mathbf{C})|} = \frac{|(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}))\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}))\mathbf{A}|}{\text{sen } c \text{ sen } b} = \frac{|\det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})|}{\text{sen } a \text{ sen } b \text{ sen } c},$$

luego

$$\frac{\text{sen } \hat{A}}{\text{sen } a} = \frac{|\det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})|}{\text{sen } a \text{ sen } b \text{ sen } c},$$

y como el lado derecho de la anterior identidad no se altera al permutar  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ , se sigue que

$$\frac{\text{sen } \hat{A}}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } c}.$$

## 2.2. Resolución de triángulos esféricos

Aplicando las relaciones obtenidas en el teorema del coseno al triángulo polar asociado, obtenemos las siguientes fórmulas, que relacionan los tres ángulos con un lado:

$$\begin{aligned}\cos \hat{A} &= -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cos a, \\ \cos \hat{B} &= -\cos \hat{A} \cos \hat{C} + \sin \hat{A} \sin \hat{C} \cos b, \\ \cos \hat{C} &= -\cos \hat{A} \cos \hat{B} + \sin \hat{A} \sin \hat{B} \cos c.\end{aligned}\tag{6}$$

Los grupos de fórmulas (1), (2), (6) y su apropiada combinación nos permiten abordar la resolución de triángulos esféricos en todos sus casos, que son:

1. Dados los tres lados,  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
2. Dados dos lados y el ángulo comprendido, por ejemplo,  $a$ ,  $b$  y  $\hat{C}$ .
3. Dados dos lados y un ángulo opuesto, por ejemplo,  $a$ ,  $b$  y  $\hat{A}$ .
4. Dados los tres ángulos,  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$ .
5. Dados dos ángulos y el lado común, por ejemplo,  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $c$ .
6. Dados dos ángulos y un lado opuesto, por ejemplo,  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $a$ .

Resolviendo el triángulo polar, los casos 4, 5 y 6 se reducen a los casos 1, 2 y 3, respectivamente, de modo que sólo hay que considerar éstos últimos.

El primer caso se resuelve por aplicación directa del teorema del coseno, véase (1). En el segundo caso, podemos obtener el tercer lado,  $c$ , usando el teorema del coseno y deducir los otros dos ángulos bien mediante dicho teorema o bien mediante el teorema de los senos, véase (2). Finalmente, en el tercer caso obtenemos el ángulo  $\hat{B}$  mediante el teorema de los senos. Para hallar  $c$  y  $\hat{C}$  podemos combinar las fórmulas de (1) y las del triángulo polar, (6). Observemos que en este caso, al usar el teorema de los senos, puede darse que existan dos soluciones para el ángulo  $\hat{B}$  (recordemos que manejamos ángulos en el intervalo  $[0, 180^\circ]$ ). En tal situación, se aplica la propiedad, antes comentada, de que a mayor lado se opone mayor ángulo.

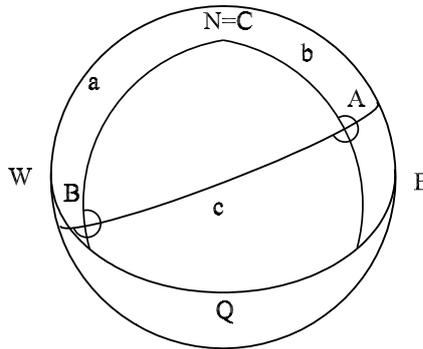


Figura 6: Vértices y lados de un triángulo esférico.

### 3. El problema de la distancia y del rumbo

Aunque la trigonometría esférica nace por la necesidad de describir el movimiento de los astros y, en particular, por resolver el problema de hallar la posición de un lugar de la Tierra a partir de su observación, trataremos primero, por ser más sencillo de plantear, el problema del cálculo de la distancia entre dos puntos situados en la esfera y del rumbo de la trayectoria que los une. Resolveremos el problema de dos modos. Primero, usando directamente las fórmulas deducidas en la sección anterior. Después, mediante la introducción de fórmulas análogas a las deducidas, en las que se transforman las expresiones trigonométricas en las que aparecen sumas por expresiones que involucran productos, siendo así útil el uso de los logaritmos y de las tablas náuticas, que es el modo normal de resolución en la marina.

#### 3.1. Resolución directa

Consideremos el siguiente ejemplo, el cual contiene todos los ingredientes del problema que deseamos resolver. Lo resolveremos, en primer lugar, mediante la aplicación directa de las fórmulas trigonométricas que dedujimos en la sección anterior.

*Un navío recorre la ruta que une Santa Cruz de Tenerife ( $29^{\circ} 27' 00''$  N,  $16^{\circ} 14' 00''$  W) con Santiago de Cuba ( $20^{\circ} 01' 29''$  N,  $75^{\circ} 49' 19''$  W). Hallar la distancia recorrida y los rumbos de salida y llegada.*

Denotando por  $A$  a Santa Cruz de Tenerife y por  $B$  a Santiago de Cuba tenemos

$$a = 90^\circ - \varphi_B = 69^\circ 58' 31'',$$

$$b = 90^\circ - \varphi_A = 60^\circ 33' 00'',$$

$$\hat{C} = L_B - L_A = 59^\circ 35' 19''.$$

Usando el teorema del coseno obtenemos

$$c = \arccos(\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos \hat{C}) = 54^\circ 22' 22,84'',$$

$$\hat{A} = \arccos\left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}\right) = 85^\circ 27' 35,19'',$$

$$\hat{B} = \arccos\left(\frac{\cos b - \cos a \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}\right) = 67^\circ 30' 15,03''.$$

Tenemos entonces que la distancia recorrida es

$$c = 54^\circ 22' 22,84'' = 54 \cdot 60 + 22 + \frac{22,84}{60} = 3262,38 \text{ millas.}$$

El rumbo de salida es

$$R_A = 360^\circ - \hat{A} = 274^\circ 32' 24,81'',$$

y el de llegada es

$$R_B = 180^\circ + \hat{B} = 247^\circ 30' 15,0376''.$$

### 3.2. Resolución normal

El modo habitual, en la marina, de resolver el ejercicio anterior pasa por encontrar unas relaciones con las que sea más fácil operar a mano y con la ayuda de tablas. Estas relaciones llevan el nombre de *analogías de Gauss-Delambre* y de *Neper* y se obtienen usando identidades trigonométricas combinadas con los teoremas del coseno y de los senos. Las que nos interesan para el ejemplo anterior son las siguientes.

**Teorema** (Analogías de Neper). *En todo triángulo esférico ABC se satisface*

$$\begin{aligned} \tan \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} &= \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \cot \frac{\hat{C}}{2}, & \tan \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a+b}{2}} \cot \frac{\hat{C}}{2}, \\ \tan \frac{a+b}{2} &= \frac{\cos \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}{\cos \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}} \tan \frac{c}{2}, & \tan \frac{a-b}{2} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}} \tan \frac{c}{2}. \end{aligned} \tag{7}$$

A continuación resolveremos el ejemplo anterior usando las analogías de Neper. Con los datos dados tenemos

$$\frac{a-b}{2} = 4^{\circ}42'45,5'', \quad \frac{a+b}{2} = 65^{\circ}15'45,5'', \quad \hat{C}/2 = 29^{\circ}47'39,5'',$$

de modo que, usando las tablas, obtenemos

$$\begin{array}{rclcl} \log \cos 4^{\circ}42'45,5'' & =\bar{1},99853 & \log \sin 4^{\circ}42'45,5'' & =\bar{2},91052 \\ \log \sec 65^{\circ}15'45,5'' & =0,37841 & \log \operatorname{cosec} 65^{\circ}15'45,5'' & =\bar{0},04179 \\ \log \cot 29^{\circ}47'39,5'' & =0,24207 & \log \cot 29^{\circ}47'39,5'' & =0,24207 \\ \hline \log \tan \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} & =0,61901 & \log \tan \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} & =\bar{1},19888, \end{array}$$

donde la notación  $\bar{1},99852$  significa  $\bar{1},99852 = 0,99852 - 1$ . Usando las tablas nuevamente, obtenemos

$$\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = 76^{\circ}28'51'' \quad \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} = 8^{\circ}58'58'',$$

y, por tanto,  $\hat{A} = 85^{\circ}27'50''$  y  $\hat{B} = 67^{\circ}29'52''$ . Finalmente, usando la tercera fórmula de (7), obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \log \sin 76^{\circ}28'51'' & =\hat{1},98779 \\ \log \operatorname{cosec} 8^{\circ}58', 58'' & =0,80674 \\ \log \tan 4^{\circ}42'45,5'' & =\hat{2},91612 \\ \hline \log \tan \frac{c}{2} & =\hat{1},71065, \end{array}$$

de donde  $c = 54^{\circ}22'29,6''$ .

**Demostración de las analogías de Neper.** Aunque la demostración resulta larga, sólo hace uso del teorema del coseno y de identidades trigonométricas elementales. Del teorema del coseno tenemos

$$\cos \hat{A} = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

de donde, usando la fórmula para  $\cos(\alpha + \beta)$ ,

$$1 - \cos \hat{A} = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

Usando ahora que  $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$  y la fórmula para  $\sin(\alpha + \beta)$  obtenemos

$$1 - \cos \hat{A} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a + b - c) \sin \frac{1}{2}(a - b + c)}{\sin b \sin c}.$$

Análogamente se deduce

$$1 + \cos \hat{A} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(b + c + a) \sin \frac{1}{2}(b + c - a)}{\sin b \sin c}.$$

Sustituyendo  $1 - \cos \hat{A}$  por  $2 \sin^2 \frac{\hat{A}}{2}$  y  $1 + \cos \hat{A}$  por  $2 \cos^2 \frac{\hat{A}}{2}$  y poniendo  $a + b + c = 2p$ , resulta

$$\sin \frac{\hat{A}}{2} = \left( \frac{\sin(p - b) \sin(p - c)}{\sin b \sin c} \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \cos \frac{\hat{A}}{2} = \left( \frac{\sin p \sin(p - a)}{\sin b \sin c} \right)^{1/2}, \quad (8)$$

con expresiones análogas para los ángulos  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$ . Ahora, usando las fórmulas (8) y sus análogas para  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$ , junto con identidades trigonométricas como las anteriores, obtenemos

$$\begin{aligned} \cos \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} &= \cos \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2} - \sin \frac{\hat{A}}{2} \sin \frac{\hat{B}}{2} \\ &= \left( \frac{\sin p}{\sin c} - \frac{\sin(p - c)}{\sin c} \right) \left( \frac{\sin(p - a) \sin(p - b)}{\sin a \sin b} \right)^{1/2} \\ &= \frac{\sin p - \sin(p - c)}{\sin c} \sin \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\sin \frac{c}{2} \cos \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2}} \sin \frac{\hat{C}}{2} \\ &= \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sin \frac{\hat{C}}{2}. \end{aligned}$$

Esta fórmula y sus análogas, obtenidas a partir de  $\sin \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$ ,  $\cos \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}$  y  $\sin \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}$ , suelen escribirse en forma de proporción, y reciben el nombre de *análogas de Gauss-Delambre*:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}}{\sin \frac{\hat{C}}{2}} &= \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}, & \frac{\cos \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}}{\sin \frac{\hat{C}}{2}} &= \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{c}{2}}, \\ \frac{\sin \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}}{\cos \frac{\hat{C}}{2}} &= \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}, & \frac{\sin \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}}{\cos \frac{\hat{C}}{2}} &= \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{c}{2}}. \end{aligned}$$

Finalmente, de las análogas de Gauss-Delambre se deducen las de Neper.

## 4. El problema de la posición

El problema de determinar la posición de un lugar de la esfera terrestre respecto un sistema de coordenadas fijo fue ya investigado, y en buena medida resuelto, en la Antigüedad. Los conocimientos astronómicos en la Antigua Grecia estaban muy desarrollados, tanto en el aspecto teórico como en el observacional. Muchos de los conceptos que hoy utilizamos, y que a continuación describiremos, fueron introducidos en aquellos tiempos.

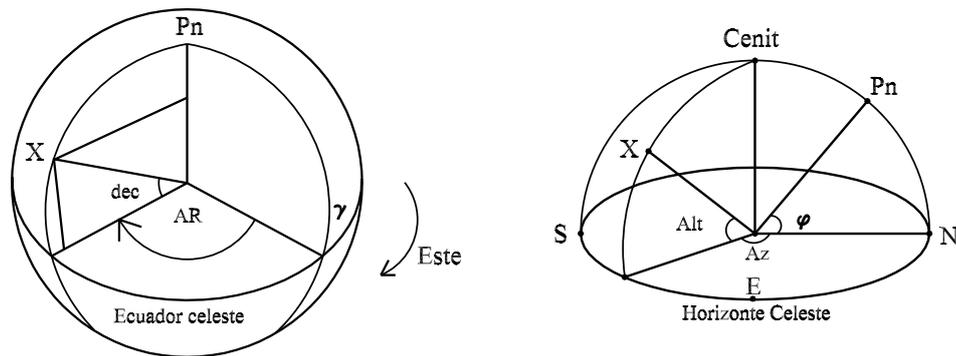
Para resolver el problema de la posición debemos mirar al exterior de la esfera terrestre, puesto que no es posible establecer las coordenadas de un lugar en una esfera haciendo uso sólo de sus propiedades intrínsecas. Cuando miramos a las estrellas en una noche oscura y nítida, tenemos la impresión de que las estrellas son puntos de luz situados en una bóveda por encima de nosotros. Aunque esto no sea así, pues las distancias entre la Tierra y las diferentes estrellas son distintas, resulta ventajoso manejar esta idea. Considerando una esfera de radio suficientemente grande, la cual contiene a todas las estrellas, podemos proyectar sobre la misma todos los objetos que observamos en el cielo de modo que, mediante la introducción de un sistema de coordenadas, podamos expresar su posición en el firmamento. La esfera en cuestión se denomina *esfera celeste*.

La esfera celeste hereda de un modo natural las coordenadas geográficas de la Tierra. Si consideramos el plano que contiene al Ecuador terrestre, su intersección con la esfera celeste será el *ecuador celeste*. Análogamente, podemos definir los *polos Norte y Sur celestes* como la intersección del eje terrestre con la esfera celeste, y también los equivalentes a los meridianos y paralelos de la esfera terrestre, que se conocen como *meridianos celestes o círculos horarios* y *paralelos de declinación*, respectivamente. El sistema de coordenadas resultante se conoce como *sistema de coordenadas ecuatoriales*, y consta de (véase Figura ?? (a)):

- la *declinación* (dec), que es el ángulo comprendido entre el ecuador celeste y el paralelo de declinación de la estrella medido a lo largo de un círculo horario, y de
- la *ascensión recta* (AR), que es el ángulo comprendido entre un círculo horario de referencia, llamado el *círculo horario de Aries* ( $\gamma$ )<sup>1</sup> y el círculo horario de la estrella, medido hacia el Este desde  $\gamma$  y a lo largo del ecuador celeste. Sus unidades

---

<sup>1</sup>El primer punto de Aries es uno de los dos puntos de intersección del ecuador celeste con la Eclíptica, trayectoria aparente del Sol en la esfera celeste debida a la traslación de la Tierra alrededor del Sol, la cual forma un ángulo de  $23,5^\circ$  con el ecuador celeste. La línea que pasa por el primer punto de Aries y por su



(a) sistema ecuatorial: declinación y ascensión recta. (b) sistema horizontal: altitud y acimut.

Figura 7: Coordenadas ecuatoriales y horizontales.

son horas, minutos y segundos. Puesto que una rotación de  $360^\circ$  se verifica en 24 horas, se establece la siguiente correspondencia:

$$1 \text{ hora} = 15^\circ, \quad 1 \text{ minuto} = 15', \quad 1 \text{ segundo} = 15'' \quad (9)$$

El equivalente a la ascensión recta medida en grados (con orientación Oeste desde  $\gamma$ ) se llama *ángulo de la hora sidérea* (AHS).

En contraste con la esfera terrestre, en la esfera celeste hay más de un sistema de coordenadas *natural*. Las coordenadas ecuatoriales (declinación y ascensión recta) son un ejemplo de coordenadas absolutas, esto es, que no cambian con el tiempo (salvo por la precesión del eje terrestre <sup>2</sup>).

Más fáciles de entender y de usar son las coordenadas que un observador vería en un momento dado sin más que alzar su vista al cielo. En esta situación, podemos definir el *Cenit* (Z) y el *Nadir* (Na), que son los puntos de intersección de la esfera celeste con el eje que pasa por el centro de la tierra y por el observador. El Cenit está sobre la cabeza del observador y el Nadir en el polo opuesto. El círculo máximo de la esfera celeste que es perpendicular a dicho eje es el *Horizonte*. Como en el caso de las coordenadas ecuatoriales, se consideran en las coordenadas horizontales los análogos de los meridianos,

---

polo opuesto (Libra) es la línea de los Equinoccios. Esta línea, actualmente, pasa por Piscis y no por Aries, debido a la precesión del eje terrestre (véase la siguiente nota a pie de página).

<sup>2</sup>El eje terrestre está sometido a un movimiento giratorio debido a fuerzas gravitatorias perpendiculares al plano de la Eclíptica. El periodo de este movimiento es de 25800 años. Fue Hiparco de Rodas (190-120 A.C.) quien descubrió este fenómeno.

GEOGRÁFICAS	ECUATORIALES	HORIZONTALES
ecuador	ecuador celeste	horizonte
polos	polos celestes	cenit y nadir
meridianos	meridianos celestes o círculos horarios	círculos verticales
meridiano Cero	círculo horario de Aries	círculo vertical principal
paralelos	paralelos de declinación	paralelos de altitud
latitud	declinación	altitud
colatitud	distancia polar	distancia cenital
longitud	ascensión recta	acimut

Cuadro 1: Analogías entre los sistemas de coordenadas geográficas y de la esfera celeste

llamados en este caso *círculos verticales*, y de los paralelos, llamados *paralelos de altitud*. Además, en el Horizonte se consideran los puntos cardinales Norte (N), Sur (S), Este (E) y Oeste (W). El *sistema de coordenadas horizontales* consta de (véase Figura ?? (b)):

- la *altitud* (alt), que es el ángulo formado entre el horizonte y la estrella, medido en grados a lo largo de un círculo vertical.
- El *acimut* (az), que es el ángulo comprendido entre el círculo vertical de la estrella y un círculo vertical de referencia, llamado *círculo vertical principal*, y determinado por pasar por el Cenit, el Polo Norte celeste,  $P_n$ , y el punto cardinal Norte. Este ángulo se mide desde el punto cardinal Norte en dirección Este. Observemos que el ángulo central formado por el Polo Norte celeste y el punto cardinal Norte es la latitud del observador.

En la Tabla 1 recogemos los distintos términos introducidos.

#### 4.1. Determinación de la latitud

El uso de las coordenadas geográficas (latitud y longitud) se remonta, al menos, a tres siglos antes de Cristo. Por el año 150 D.C., Ptolomeo realizó su primer atlas del mundo incluyendo los paralelos y los meridianos. También creó un índice en orden alfabético con los nombres y coordenadas geográficas de las principales ciudades de su tiempo. Ptolomeo usó el ecuador para marcar el paralelo cero debido a que la trayectoria del

sol, la luna y los planetas pasa casi por encima del mismo. El meridiano cero, que en ningún caso posee propiedades geofísicas relevantes, lo situó sobre las Islas Canarias. Más adelante, y de acuerdo a los avatares políticos, el meridiano cero pasó a las Azores, Roma, Jerusalén, San Petersburgo, Pisa, París, etc., hasta posarse sobre Greenwich.

La determinación de la latitud es un cálculo relativamente sencillo, el cual suele hacerse a partir de la duración del día o de la altitud del sol o de las estrellas. Si, por ejemplo, podemos tomar la altitud de la estrella Polar, entonces la latitud del lugar coincide con dicha altitud.<sup>3</sup> Más en general, sabiendo la altitud y declinación de una estrella podemos calcular la latitud del lugar, como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.** A su paso por el meridiano principal (entre el Cenit y el Sur), observamos que Altair (dec = 8°52'22") tiene una altitud de 55°31'28". Hállese la latitud del lugar.

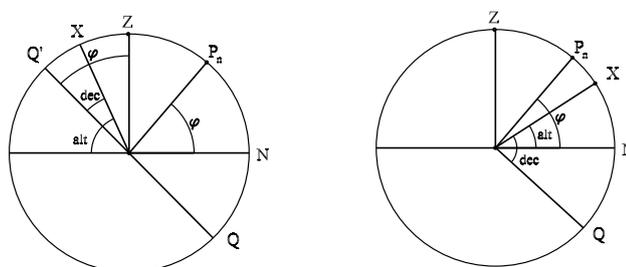


Figura 8: Distintas relaciones entre latitud, altitud y declinación de una estrella X.

De la Figura 8 vemos que

$$\varphi = 90^\circ + \text{dec} - \text{alt},$$

de donde  $\varphi = 43^\circ 20' 54''$ . Observemos que esta fórmula es distinta dependiendo de por dónde corte la estrella al meridiano principal. Tenemos

$$\varphi = \begin{cases} 90^\circ - \text{dec} + \text{alt} & \text{si corta entre N y Z,} \\ 90^\circ + \text{dec} - \text{alt} & \text{si corta entre Z y S.} \end{cases}$$

El siguiente método puede utilizarse cuando no se conozca la declinación de la estrella observada.

**Ejemplo 2.** A su paso sobre el círculo vertical principal, una estrella tiene una distancia cenital  $d_1$ , y a su paso sobre el primer círculo vertical (el círculo máximo que va de Este a Oeste pasando por el Cenit) tiene distancia cenital  $d_2$ . Hállese la latitud del lugar.

<sup>3</sup>En realidad, esto no es más que una buena aproximación puesto que la estrella Polar no está exactamente en el polo Norte ecuatorial. Su declinación es 89°16'57,1" por lo que, para un cálculo más exacto, debemos aplicar las fórmulas del Ejemplo 1.

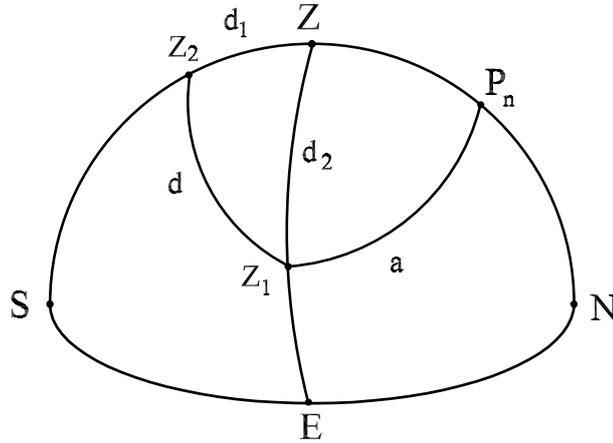


Figura 9: Planteamiento gráfico del Ejemplo 2

Denotemos por  $Z_2$  la posición de la estrella en el círculo vertical principal y por  $Z_1$  a la correspondiente en el primer círculo vertical. Puesto que  $Z_1$  y  $Z_2$  corresponden a situaciones de una misma estrella, la distancia de la misma al polo Norte ecuatorial es constante, es decir, los arcos que unen  $P_n$  con  $Z_1$  y  $Z_2$  son iguales ( $a$ , en la Figura 9). Por tanto, la latitud del lugar viene dada por  $\varphi = 90^\circ + d_1 - a$ . Observemos también que el ángulo  $\angle Z_1 Z Z_2$  es recto. Del teorema de los cosenos obtenemos, para el triángulo esférico  $Z_1 Z Z_2$ ,

$$\begin{aligned}\cos d &= \cos d_1 \cos d_2, \\ \cos d_2 &= \cos d_1 \cos d + \operatorname{sen} d_1 \operatorname{sen} d \cos \hat{Z}_2.\end{aligned}$$

Usando la primera de las anteriores igualdades en la segunda, se deduce  $\cos \hat{Z}_2 = \cos d_2 \operatorname{sen} d_1 / \operatorname{sen} d$ . Consideremos ahora el triángulo esférico  $Z_1 Z_2 P_n$ . El teorema de los cosenos implica

$$\cos a = \cos a \cos d + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} d \cos \hat{Z}_2.$$

Sustituyendo la anterior expresión de  $\cos \hat{Z}_2$  en esta fórmula y reorganizando los distintos términos obtenemos

$$\tan a = \sec d_2 \operatorname{cosec} d_1 - \cot d_1. \quad (10)$$

Usando (10) obtenemos

$$\cot \varphi = \cot d_1 - \operatorname{cosec} d_1 \cos d_2. \quad (11)$$

Este ejemplo puede resolverse de un modo muy sencillo mediante la introducción de coordenadas esféricas. Tenemos que  $\theta = 90^\circ - \operatorname{az}$  y  $\operatorname{alt}$  son coordenadas esféricas para la esfera celeste. Con esta elección tenemos que una estrella cualquiera,  $X$ , se representa por

$$X = (\cos \operatorname{alt} \operatorname{sen} \operatorname{az}, \cos \operatorname{alt} \cos \operatorname{az}, \operatorname{sen} \operatorname{alt}).$$

En particular,  $Z = (0, 0, 1)$ ,  $N = (0, 1, 0)$  y  $E = (1, 0, 0)$ . Las posiciones de la estrella de nuestro ejemplo sobre el círculo vertical principal y el primer círculo vertical vienen dadas, respectivamente, por

$$Z_1 = (\sin d_1, 0, \cos d_1) \quad \text{y} \quad Z_2 = (0, -\sin d_2, \cos d_2).$$

Como  $Z_1 - Z_2$  es perpendicular a  $OP_n$  (por estar ambas en el mismo paralelo de declinación), tenemos que  $Z_1 \cdot P_n = Z_2 \cdot P_n$ , de modo que, teniendo en cuenta que el acimut de  $P_n$  es cero y que su altitud es la latitud del lugar, es decir,  $P_n = (0, \cos \varphi, \sin \varphi)$ , obtenemos

$$-\sin d_1 \cos \varphi + \cos d_1 \sin \varphi = \cos d_2 \sin \varphi,$$

de donde se deduce la relación (11).

## 4.2. Longitud y Tiempo

Históricamente, el cálculo de la longitud ha presentado más dificultades que el de la latitud (especialmente en un medio móvil, como es un barco). La razón es que la medida de la longitud se produce en la misma dirección que el giro rotacional de la Tierra, de modo que no hay ningún punto de referencia que quede fijo (de ahí que el meridiano cero se imponga arbitrariamente). Por el contrario, para la medición de la latitud, el giro terrestre no entra en juego. El ecuador es la circunferencia máxima natural y la latitud se refleja en la altitud de los astros en la esfera celeste, que permanece constante a lo largo del tiempo. En la aproximación al problema del cálculo de la longitud se siguieron dos vías:

- la búsqueda de fenómenos astronómicos que la determinaran, que resultaron ser siempre de una gran complejidad, y
- la medida precisa del tiempo.

La relación que existe entre longitud y tiempo es la siguiente: puesto que la Tierra rota sobre sí misma una vez al día, dos observadores situados sobre meridianos distintos y, digamos, el mismo paralelo, verán el mismo cielo a lo largo del día, pero no simultáneamente. Usando la equivalencia entre grados y horas introducida en (9), podemos dar una medida del incremento de la longitud entre dos lugares siempre que sepamos la distancia temporal que los separa.

**Ejemplo 3.** A las 6h 57m, hora local, Arcturus ha culminado sobre el meridiano de Cádiz. Dos horas después, la misma estrella culmina sobre el meridiano en el que navegamos. Hállese la longitud del lugar.

Pasando la diferencia de horas a grados obtenemos  $2h=30^\circ$ . Como la longitud de Cádiz es  $6^\circ 18' W$ , la nuestra será  $36^\circ 18' W$ .

La simplicidad de este método esconde una dificultad técnica que hoy nos puede parecer trivial pero que, a lo largo de la Historia, ha planteado numerosos problemas: la medición del tiempo. Aún a principios del Siglo XVIII, los mejores relojes disponibles no tenían una precisión superior a un minuto diario, con lo que los cálculos de la longitud en tierra eran poco fiables. En la navegación, los relojes (de péndulo) no eran útiles. No en vano, y por espacio de siglos, las principales potencias marítimas ofrecieron premios en metálico para quien inventara un método fiable para la medición de la longitud. La mayor parte de los métodos propuestos se basaron en la observación astronómica, pero fueron rechazados debido a la imposibilidad de ser realizados a bordo.<sup>4</sup> No fue hasta bien entrado el Siglo XVIII que el problema quedó definitivamente resuelto gracias a la invención, por parte de John Harrison, del reloj de cuerda.

En cualquier caso, el método para el cálculo de la longitud de un lugar necesita de la introducción de ciertas nociones relacionadas con la medición del tiempo y resulta ser algo más sutil que lo realizado en el anterior ejemplo. Aun aceptando que los relojes no se desvíen de la hora, hay diferentes imprecisiones que se cometen en la medición del tiempo *civil*, que son producto tanto de la tradición como de la comodidad. Por ejemplo, un año astronómico (el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa a su órbita) no es exactamente 365 días (de ahí los años bisiestos). Tampoco la duración de un día solar es igual a lo largo del año, debido a la aceleración del giro de la Tierra al acercarse al Sol. Ni tampoco un día astronómico (lapso entre dos observaciones consecutivas de una estrella en la misma posición) es exactamente 24 horas, debido a que la Tierra, a parte de rotar sobre sí misma, también se traslada en su órbita alrededor del Sol.

---

<sup>4</sup>Galileo Galilei fue uno de los notables científicos que se ocupó de este problema (también Huygens -inventor del reloj de péndulo-, Newton, Halley,...). Galileo propuso un método basado en los eclipses de las lunas de Júpiter, que aunque permite, en efecto, el cálculo de la longitud, es inviable de realizar a bordo. Galileo presentó este proyecto a Felipe II, cuya corte había anunciado, en 1598, un premio para quien resolviera el problema de la longitud.

Para clarificar esta situación se comienza introduciendo el *día sidéreo*, que es el tiempo que tarda una estrella en retornar a la misma posición. Esto es

$$24 \text{ h} - \frac{24 \times 60}{365,2422} \text{ m} \sim 23 \text{ h } 56,0515 \text{ m},$$

donde el denominador es el número de días de un *año sidéreo* y el término que se resta es debido a la traslación, véase la Figura 10.

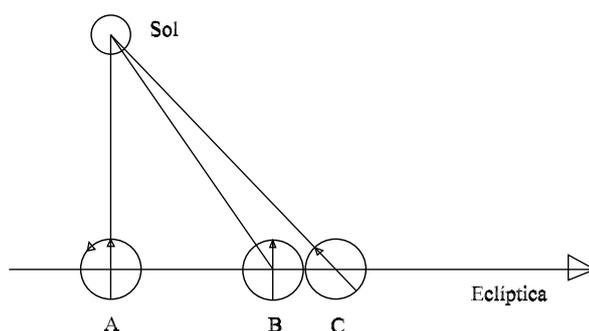


Figura 10: El tiempo transcurrido hasta que el meridiano del observador vuelve a la misma posición relativa a la eclíptica es la duración del día sidéreo ( $AB$ ), que es algo menor que el transcurrido hasta que el meridiano del observador tiene la misma posición relativa al Sol ( $AC$ ).

El cero de la *hora local sidérea* (HLS) se define como el momento en el que *culmina* el primer punto de Aries, es decir, el momento en el que cruza el meridiano principal de Este a Oeste. Una estrella con ascensión recta  $AR$  culminará  $AR$  horas después, es decir, cuando  $HLS = AR$ . Sabiendo la HLS de un lugar, podremos encontrar la de cualquier otro lugar sumando la diferencia de longitudes entre ellos (en horas). Recíprocamente, sabiendo las HLS de dos lugares, podemos determinar su diferencia de longitud:

$$HLS_1 - HLS_2 = L_1 - L_2 \quad (12)$$

Para fijar la posición de una estrella desde cualquier lugar de la Tierra, necesitamos fijar el tiempo en un lugar estándar. Este lugar es el meridiano de Greenwich, y el tiempo correspondiente es el UTC (Universal Time Coordinate). Convencionalmente, la Tierra se divide en 24 husos de  $15^\circ$  cada uno, llamados *husos horarios*. Por cada centro de huso horario que crucemos hacia el Oeste (Este), la hora local es el UTC más (menos) una hora. Por ejemplo, un lugar en el que la longitud sea  $163^\circ$  E tiene un huso de UTC + 11 h

puesto que  $163=10 \times 15 + 7,5 + 5,5$ . Si la longitud es  $64^\circ$  W el huso será UTC - 4 h, puesto que  $64=4 \times 15 + 4$ .

La relación entre la hora local sidérea en Greenwich (HSG) y el UTC puede encontrarse en los almanaques, aunque una única lectura es suficiente puesto que el resto pueden calcularse. En concreto, el 1 de Enero de 2001, a las cero horas UTC en Greenwich, eran las 6 h 32.76 m HSG. Cada día que transcurra, la HSG se incrementa en 3.942589 m, debido a la diferencia antes mencionada entre la duración del día civil y el sidéreo. Por ejemplo, el 12 de Abril de 2003 a las 10 h UTC en Greenwich, serán las 23h 19.12 m HSG, puesto que

$$\text{HSG} = 6 \text{ h } 32,76 \text{ m} + \text{UTC actual} + 3,942589 \text{ m} \times \text{n}^\circ \text{ de días transcurridos (módulo 24 h)}.$$

Tenemos ya las herramientas para calcular la longitud de un lugar dada una observación de una estrella conocida. Supongamos que a las x horas UTC culmina una estrella de AR conocida. Entonces, usando (12) con  $L_2 = \text{Greenwich}$ , obtenemos

$$L_1 = \text{HLS}_1 - \text{HSG} = \text{AR} - \text{HSG}.$$

**Ejemplo 4.** Rigel, AR =5 h 14.53 m acaba de culminar. Son las 11 h del 26 de Noviembre de 2003 UTC. Hállese la longitud del lugar.

Determinemos la HSG. Puesto que han pasado 1059 días desde el 1 de Enero de 2001, y como son las 11h UTC, la HSG será

$$\text{HSG} = 6 \text{ h } 32,76 \text{ m} + 11 \text{ h} + 3,942589 \text{ m} \times 1059 = 87 \text{ h } 7,96 \text{ m} = 15 \text{ h } 18,03 \text{ m},$$

tomando las horas módulo 24. Por tanto, la diferencia entre la AR y la HSG es de 10 h 3.5 m (con signo menos), que expresado en grados nos da la latitud del lugar:  $150^\circ 52.5' \text{ W}$ .

## 5. Otras cuestiones que relacionan la navegación y las matemáticas

Aunque la mayor parte de nuestro tiempo lo dedicaremos a la explicación de los métodos más comúnmente usados en la marina y a la resolución de problemas como los de las secciones anteriores, creemos que también es interesante el internarnos algo en las matemáticas que subyacen en otras aplicaciones a la navegación. De entre muchas cuestiones interesantes, comentaremos dos que se plantean muy pronto en la práctica de la navegación:

- ¿Qué error se comete cuando se aproxima la esfera terrestre por un plano euclídeo? ¿Cuándo es esta aproximación aceptable?
- Los dos modos más comunes de navegar entre dos puntos dados son siguiendo la derrota ortodrómica (por circunferencias máximas, luego minimizando la distancia) o siguiendo la derrota loxodrómica (a rumbo constante, luego más cómodo para la navegación). ¿Cuál es la diferencia entre las distancias recorridas siguiendo estas dos derrotas?

Si bien encontramos respuestas a estas cuestiones, más o menos simplificadas, en los manuales de navegación, creemos que es importante enseñar a los alumnos a plantearlas matemáticamente y a resolverlas analítica o numéricamente.

### 5.1. Aproximación de la esfera por un plano

Respecto a la primera pregunta, podemos proceder como sigue. Sea  $A$  un punto sobre la esfera. Si, desde este punto, navegamos por la esfera a rumbo  $R$  una distancia  $d$  llegaremos a otro punto, digamos  $A'$ . Debido a la simetría de la esfera con respecto al origen, podemos simplificar el problema considerando que el punto de origen es  $A = (r, 0, 0)$  (es decir, longitud  $L = 0$ , latitud,  $\varphi = 0$  y radio de la Tierra,  $r$ , medido en millas), y que el rumbo es  $R = 0$ . En efecto, en caso contrario, un giro de la esfera, que es una isometría, nos lleva la circunferencia máxima que une  $A$  y  $A'$  sobre un meridiano, véase la Figura 11. Observemos que navegar a rumbo cero significa desplazarnos por el meridiano del lugar, de modo que bastan dos coordenadas para determinar nuestra posición:  $x$  y  $z$ .

En el problema bidimensional, redefinimos  $A = (r, 0)$ . El punto  $A'$ , a distancia  $d$

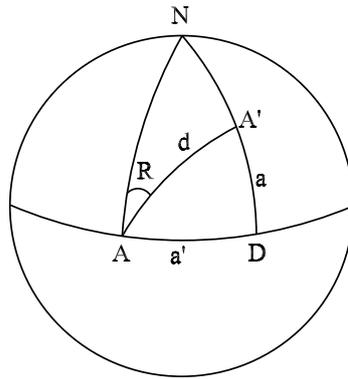


Figura 11: Planteamiento gráfico del problema. Mediante un giro, podemos aplicar  $A$  sobre el punto  $(r, 0, 0)$  del ecuador y situar el arco  $AA'$  sobre un meridiano.

millas sobre el arco de circunferencia, viene dado por (véase la Figura 12)

$$A' = (r \cos \alpha, r \sin \alpha), \quad \text{con } r\alpha = d.$$

Por otra parte, si partiendo de  $A$  navegamos una distancia  $d$  millas a rumbo  $R$  por el plano

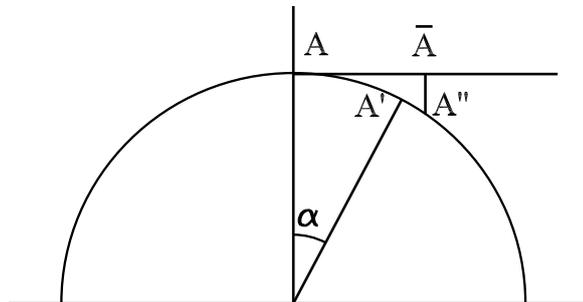


Figura 12: Construcción de los puntos  $A'$ ,  $\bar{A}$  y  $A''$ .

tangente a la esfera en  $A$  (que será como trasladarse una distancia  $d$  por la recta tangente a la circunferencia en  $A$ ), llegaremos a cierto punto  $\bar{A}$  fuera de la esfera (circunferencia). Proyectando  $\bar{A}$  sobre la circunferencia en la dirección de la normal a la recta tangente, obtendremos el punto  $A''$  (es el mapa creado por una foto aérea). El punto  $A''$  viene dado como la intersección de la circunferencia  $x^2 + z^2 = r^2$  con la recta  $z = r\alpha$ . Es decir,

$$A'' = (r\sqrt{1 - \alpha^2}, r\alpha).$$

Expresando  $A''$  en coordenadas polares tendremos que  $A'' = (r \cos \beta, r \sin \beta)$ , con  $\beta = \arcsen \alpha$ , de modo que la longitud de arco entre el punto original,  $A$ , y el punto  $A''$  será  $\tilde{d} = r \arcsen \alpha$ . Por tanto, el error absoluto que se comete al aproximar la esfera por el plano tangente es

$$\Delta = \tilde{d} - d = r \left( \arcsen \frac{d}{r} - \frac{d}{r} \right) = r \arcsen \frac{d}{r} - d,$$

donde hemos usado que  $\alpha = d/r$ . El error relativo viene dado por

$$\epsilon = \frac{\tilde{d} - d}{d} = \frac{r}{d} \arcsen \frac{d}{r} - 1.$$

En la Figura 13 se muestran las gráficas de estas funciones de  $d$ . Observemos que para

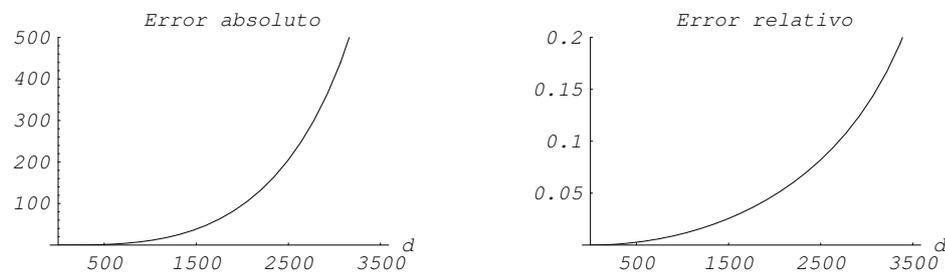


Figura 13: Errores absoluto (en millas) y relativo en la aproximación de la esfera por un plano.

grandes distancias el error se dispara. Por ejemplo, en el caso resuelto en la Sección 3, en el que calculábamos que la distancia entre Santa Cruz de Tenerife y Santiago de Cuba es de unas 3260 millas, el error absoluto cometido en esta aproximación es de unas 560 millas. Sin embargo, en distancias pequeñas, el error es insignificante. Por ejemplo, en un recorrido de 500 millas el error es menor de dos millas.

## 5.2. Derrota loxodrómica

En cuanto a la segunda cuestión que planteábamos al principio de esta sección, en la cual nos preguntábamos por la diferencia entre la distancia recorrida entre dos puntos cuando navegamos por la derrota ortodrómica o loxodrómica, comenzaremos por deducir la ecuación de la curva sobre la esfera que corta con ángulos iguales todos los meridianos, es decir, la ecuación de la loxodromia. Consideremos las coordenadas esféricas para la longitud,  $L$ , y la latitud,  $\varphi$ ,

$$(x, y, z) = (\cos L \cos \varphi, \sin L \cos \varphi, \sin \varphi).$$

Sea  $\sigma \equiv \sigma(t)$ , con  $t \in [0, 1]$ , una trayectoria regular sobre la esfera. Su elemento de longitud de arco viene dada por la norma de su derivada, es decir

$$d\sigma \equiv |d\sigma| = \sqrt{d\varphi^2 + \cos^2 \varphi dL^2}. \quad (13)$$

Para construir la loxodromia, consideremos el triángulo plano de la Figura 14<sup>5</sup>, donde

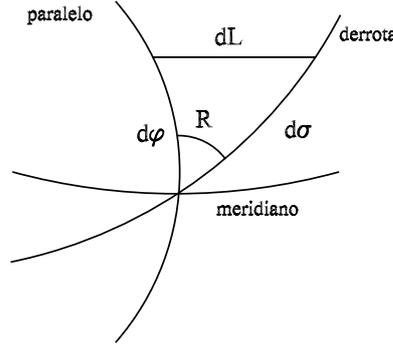


Figura 14: Triángulo *plano* formado por elementos diferenciales de longitud, latitud y derrota.

$R$  es el ángulo constante (el rumbo) que forma la trayectoria de la loxodromia con los meridianos. Tenemos

$$d\sigma = \frac{d\varphi}{\cos R}. \quad (14)$$

Observemos que para  $R = 90^\circ, 270^\circ$ , la derrota loxodrómica sigue por el paralelo del lugar. Analizaremos estos casos particulares más adelante. Usando la relación (13) obtenemos

$$\frac{d\varphi^2}{\cos^2 R} = d\varphi^2 + \cos^2 \varphi dL^2,$$

de donde se deduce la ecuación de la loxodromia

$$dL = \pm \frac{\tan R}{\cos \varphi} d\varphi. \quad (15)$$

El signo en la ecuación de la loxodromia lo determinamos analizando la relación entre el rumbo y los incrementos de longitud y latitud que conlleva. Si  $R$  está en el primer o tercer cuadrantes (donde  $\tan R \geq 0$ ), una ganancia en latitud implica una ganancia en longitud. En el segundo o cuarto cuadrantes tenemos la situación contraria. Por tanto, el signo a considerar es el positivo, véase la Figura 14.

<sup>5</sup>En realidad, consideramos la proyección del triángulo de la Figura 14 sobre el plano tangente a la esfera en el punto de corte entre la derrota y el meridiano.

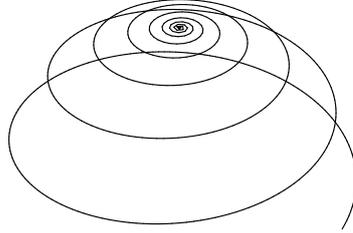


Figura 15: Derrota loxodrómica con rumbo  $80^\circ$ .

La ecuación (15) (con signo positivo) puede integrarse de forma explícita, obteniéndose

$$L(\varphi) = \tan R \operatorname{arctanh}(\operatorname{sen} \varphi) + L(0), \quad (16)$$

donde la constante de integración,  $L(0)$ , es la longitud con la que la derrota corta al ecuador. Recordemos que  $\operatorname{arctanh}(s) := \frac{1}{2} \log \frac{1+s}{1-s}$ .

De la relación (14) obtenemos que la longitud del segmento de loxodromia que une los puntos de latitud y longitud  $(\varphi_A, L(\varphi_A))$  y  $(\varphi_B, L(\varphi_B))$  viene dada por

$$\sigma_{AB} = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{\cos R}. \quad (17)$$

Como nuestro objetivo es comparar las distancias recorridas por las derrotas ortodrómica y loxodrómica que unen los puntos  $(L_A, \varphi_A)$  y  $(L_B, \varphi_B)$  debemos, en primer lugar, calcular el rumbo,  $R$ , que une esos dos puntos por la derrota loxodrómica, a fin de poder usar la fórmula (17). Para ello, usamos la ecuación de la loxodromia deducida en (16). Tenemos

$$\begin{aligned} L_A = L(\varphi_A) &= \tan R \operatorname{arctanh}(\operatorname{sen} \varphi_A) + L(0), \\ L_B = L(\varphi_B) &= \tan R \operatorname{arctanh}(\operatorname{sen} \varphi_B) + L(0), \end{aligned} \quad (18)$$

de modo que, restando ambas ecuaciones obtenemos

$$R = \arctan \left( \frac{L_A - L_B}{\operatorname{arctanh}(\operatorname{sen} \varphi_A) - \operatorname{arctanh}(\operatorname{sen} \varphi_B)} \right).$$

Observemos que de (18) también determinamos la constante de integración  $L(0)$ . La fórmula (17) junto con la determinación del rumbo nos proporciona la distancia recorrida por la derrota loxodrómica.

La distancia recorrida por la derrota ortodrómica la obtenemos resolviendo el triángulo esférico correspondiente, como en la Sección 3, obteniendo que la distancia,  $c$ , viene dada por

$$c = \arccos \left( \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos(L_B - L_A) \right). \quad (19)$$

Véase la Figura 16 para una comparación entre ambas distancias para distintos valores de las longitudes y latitudes de los puntos de partida y llegada. En particular, en el ejemplo de la Sección 3, calculamos que la distancia recorrida entre Santa Cruz de Tenerife y Santiago de Cuba por la derrota ortodrómica es de unas 3262 millas. Por la derrota loxodrómica la distancia que se recorre es de unas 3290 millas, de modo que la ganancia (diferencia entre ambas distancias) es de unas 28 millas.

Finalmente, en el caso en el que los punto  $A$  y  $B$  están sobre el mismo paralelo ( $\varphi_A = \varphi_B$ ), de modo que el rumbo de la loxodrómica es  $R = \pi/2$  y la discusión anterior no es válida, tenemos que el radio del paralelo es  $r \cos \varphi_A$ , y la longitud del arco de paralelo (derrota loxodrómica) que une  $A$  y  $B$  viene dada por

$$\sigma_{AB} = r \cos \varphi_A |L_A - L_B|,$$

mientras que la distancia por la derrota ortodrómica sigue viniendo dada por la fórmula (19).

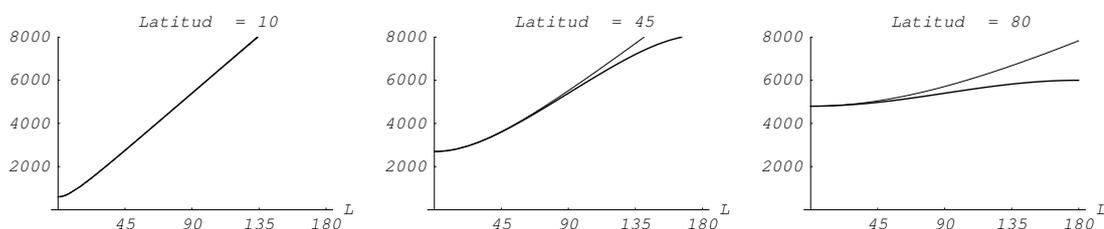


Figura 16: Comparación entre las distancias recorridas siguiendo la derrota loxodrómica (línea fina) y ortodrómica (línea gruesa) para  $\varphi_A = L_A = 0$ , y distintas latitudes del punto de llegada  $B$ . Las abscisas corresponden a la longitud de  $B$  y las ordenadas a la distancia recorrida, en millas.