

INFORMACION TECNOLOGICA

Revista Internacional Arbitrada

Indexada en Indices Internacionales

Edita:

Centro de Información Tecnológica (CIT)

Larraín Alcalde 1120 - Casilla 593

Teléfono: 56-51-213855 Fax: 56-51-210496

La Serena - Chile

EDITORIAL DEL NORTE LTOA. - BRASIL 431 - LA SERENA



ISSN 0716-8756

INFORMACION TECNOLOGICA

REVISTA INTERNACIONAL

SEPARATA



El Faro: Símbolo de la belleza turística de La Serena - Chile

OPTIMIZACION DEL COSTE DE COMBUSTIBLE EN UN SISTEMA HIDROTERMICO, MEDIANTE EL METODO DE RITZ

L.F. BAYON, J.M. GRAU, J.A. OTERO, M.M. RUIZ y P.M. SUAREZ

Univ. de Oviedo, E.U.I.T.I., Depto. de Matemáticas, C/ Manuel Llaneza s/n, Gijón, Asturias - España

RESUMEN

En este trabajo se utiliza el método de Ritz para minimizar el coste de combustible en un sistema de potencia hidrotérmico. El algoritmo propuesto está destinado a reducir lo más posible el gasto de combustible en las centrales térmicas. El sistema de potencia considerado consta de varias cuencas hidráulicas ramificadas, de centrales de carga variable. En el análisis se tiene en cuenta el tiempo en que tarda el agua en fluir desde la central aguas arriba a la central aguas abajo. El problema se formula en forma abstracta para poder aplicarle el método de Ritz, minimizando una funcional cuadrática heterogénea. La elección del sistema de funciones de forma, la formulación del sistema Ritz y la solución de dicho sistema pueden ser fácilmente realizados con el método propuesto, siendo esta simplicidad la principal ventaja de la propuesta. Además la resolución del sistema final muestra una convergencia muy rápida para problemas complejos. Por lo tanto el método obtenido se puede aplicar para la optimización de las pérdidas de transmisión e incluso para optimizaciones combinadas.

OPTIMIZATION OF FUEL COST IN A HYDRO-THERMAL SYSTEM, USING RITZ'S METHOD

ABSTRACT

In this work, Ritz's method is employed to minimize the fuel cost of a hydro-thermal system. The algorithm proposed is aimed to reduce the production cost of thermal plants. The power system considered in the study contains several chains of hydro-plants of variable head on different streams and the time delay of the flow between upstream and downstream plants is taken into consideration. The problem is formulated in an abstract form to apply the Ritz's method, minimizing a heterogeneous quadratic functional. The choice of a system of coordinate functions, the formation of the Ritz-System and the solution of the Ritz-System, can be easily done with the proposed method, being this simplicity the main advantage of the proposal. Furthermore, the solution of the final system shows a fast convergence for complex problems. Thus, this method can be applied to optimization of transmission losses or even multiple objective optimizations.

Keywords: optimization, fuel cost, hydro-thermal systems, Ritz's Method, quadratic functional

INTRODUCCION

En este trabajo se optimizará el coste de producción de un sistema de potencia que consta de centrales térmicas y centrales hidráulicas, es decir se calcularán las potencias generadas en las unidades de que consta el sistema, para que el coste de combustible de las centrales térmicas sea lo más pequeño posible, sin olvidarnos de otros factores que intervendrán en el problema en forma de restricciones que se tendrán que cumplir necesariamente.

Se considerarán cuencas hidráulicas ramificadas y por tanto este trabajo generaliza uno anterior (Suárez y Bayón, 1996) donde únicamente se estudiaban cuencas hidráulicas lineales.

La técnica elegida para obtener la solución es la teoría de los métodos aproximados y en concreto el método de Ritz para minimizar una funcional cuadrática heterogénea. Con ciertas simplificaciones adicionales introducidas en nuestro problema, el método de Ritz nos proporciona una solución aproximada perfectamente aceptable, con la ventaja de que basta tomar unos pocos términos de la sucesión minimizadora, por lo cual, los cálculos posteriores resultan también bastante sencillos.

FUNDAMENTOS MATEMATICOS

Se expondrán brevemente las técnicas matemáticas que se han aplicado para la resolución del problema, es decir los fundamentos del método y las ecuaciones a que da lugar.

El problema consiste en hallar el mínimo de una funcional cuadrática heterogénea F , de dominio $D(F) \subseteq H$, siendo H un espacio Euclídeo.

Se supone que $F(x)$ alcanza su valor mínimo F_0 precisamente en el punto x^* . Entonces se busca un elemento x que dé a F un valor, en lo posible, próximo a F_0 . Se puede esperar que tal elemento sea próximo al elemento x^* .

Sea $G(u,v)$ la funcional bilineal simétrica determinada en $D(F)$. A través de $g(u)$ designamos la funcional cuadrática: $g(u)=G(u,u)$, correspondiente a G .

Sea, l la funcional lineal, también definida en $D(F)$ (no es imprescindible que sea acotada). Supongamos que la funcional se ha definido por la fórmula:

$$F(x) = g(x) - 2lx \quad (1)$$

con la particularidad de que la funcional cuadrática homogénea $g(x)$ es definida positiva, esto es:

$$g(x) > 0 \quad \text{para } x \neq 0, \quad x \in D(F) \quad (2)$$

Además, para que tome sentido el problema de su minimización, F tendrá que estar acotada inferiormente. Se comprueba esta última suposición mediante el siguiente lema:

Si la funcional cuadrática g es coerciva, es decir, si con cierta $m_0 > 0$ es válida la desigualdad:

$$g(x) \geq m_0 \|x\|^2 \quad (x \in D(F)) \quad (3)$$

y si la funcional l es acotada, entonces la funcional F está acotada inferiormente.

La siguiente definición será fundamental en el desarrollo posterior.

La sucesión $\{x^{(n)}\}$ de los elementos $D(F)$ se llama minimizadora para la funcional F , si:

$$F(x^{(n)}) \rightarrow F_0 = \inf F(x) \quad (4)$$

Uno de los procedimientos de construcción de la sucesión minimizadora es el proceso de Ritz.

Se elige el sistema linealmente independiente $\{u_i\}$ de los elementos $D(F)$. Se le da a este sistema el nombre de coordenadas, aunque también es frecuente el nombre de funciones de forma. Se introducen los subespacios:

$$H^{(n)} = L(u_1, \dots, u_n) \in D(F) \quad (5)$$

donde L es el símbolo de la clausura lineal.

A partir del lema anterior se demuestra fácilmente el siguiente:

Las funcionales $g(x)$ y lx son continuas en cada uno de los espacios $H^{(n)}$, y la funcional $g(x)$ es coerciva en cada uno de los espacios $H^{(n)}$, es decir, existen tales constantes positivas m_n que:

$$g(x) \geq m_n \|x\|^2 \quad (x \in H^{(n)}) \quad (6)$$

Siendo:

$$F_n = \inf_{x \in H^{(n)}} F(x) \quad (7)$$

entonces, a cada n en $H^{(n)}$ hay un elemento y , además, único, en el que F adquiere el valor de F_n .

El proceso de Ritz reside en la construcción de la sucesión $\{x^{(n)}\}$ por el procedimiento indicado: $x^{(n)}$ es el elemento que minimiza F en $H^{(n)}$.

Se analiza ahora la cuestión de hallar $x^{(n)}$. Cualquier elemento $x \in H^{(n)}$ admite la representación:

$$x = \sum_{i=1}^n a_i u_i \quad (8)$$

Si se coloca esta expresión en F , entonces se convierte en la función de los n argumentos reales: $a_1, \dots, a_n$ para la cual conservamos la misma asignación:

$$F\left(\sum_{i=1}^n a_i u_i\right) = F(a_1, \dots, a_n) \quad (9)$$

En este caso:

$$F(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j G(u_i, u_j) - 2 \sum_{i=1}^n a_i l u_i \quad (10)$$

Se puede ver que esta función alcanza el mínimo en un único punto del espacio R^n , en el punto (a_i) , donde a_i son los coeficientes en el desarrollo de $x^{(n)}$ por los elementos de la base $(u_1, \dots, u_n)$.

Este punto puede hallarse por el método ordinario, igualando a cero las derivadas de F respecto a las variables independientes $a_1, \dots, a_n$:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^n a_j G(u_k, u_j) + \sum_{i=1}^n a_i G(u_i, u_k) - 2lu_k =$$

$$= 2 \left[\sum_{i=1}^n a_i G(u_i, u_k) - lu_k \right] \quad (1 \leq k \leq n). \quad (11)$$

Por consiguiente, la determinación de los coeficientes a_i se reduce a la resolución de dicho sistema de ecuaciones algebraicas.

Observación: Es evidente que todos los resultados de este párrafo son válidos para las funciones de tipo más general:

$$F(x) = g(x) - 2lx + c \quad (12)$$

donde c es una constante.

En el problema a resolver interesa introducir las nociones de funcional de energía y espacio energético ya que ésta es la forma que va a adquirir el funcional de costo.

Consideremos la funcional:

$$F(x) = (Ax, x) - 2(y^*, x) \quad (x \in D(A)) \quad (13)$$

llamada funcional de energía. Se supone que:

a) el operador A es simétrico, es decir, que para cualesquiera $u, v \in D(A)$ tiene lugar la relación:

$$(Au, v) = (u, Av) \quad (14)$$

b) la forma bilineal asociada al operador A es coerciva, esto es, existe el número $m_0 > 0$ tal que para cualquier $u \in D(A)$

$$(Au, u) \geq m_0 \|u\|^2 \quad (15)$$

c) $y^* \in R(A)$

Si se supone que $D(F) = D(A)$, $G(u, v) = (Au, v)$, $lu = (u, y^*)$ para $u, v \in D(F)$ entonces a la funcional F es aplicable lo examinado anteriormente sobre el mínimo de una funcional cuadrática y se puede escribir también:

$$F(x) = g(x) - 2lx \quad (16)$$

Ahora se define el producto escalar energético de la siguiente forma:

$$[u, v] = (Au, v) \quad \text{para } u, v \in D(A) \quad (17)$$

Este producto escalar induce la norma energética:

$$\|u\| = [u, u]^{1/2} \quad (18)$$

y con ambos conceptos $D(A)$ se convierte en un espacio euclídeo, en general, no completo. Sea H_A el llenado o completado de $D(A)$ en la métrica $\| \cdot \|$.

El espacio H_A es de Hilbert y se le llama espacio energético del operador A , y de la definición se deduce que $D(A)$ forma en H_A un conjunto denso. Además, en virtud de que $u \in D(A)$ se tiene:

$$H^{(n)} \subset D(A) \subset H_A \quad (19)$$

Con las definiciones y suposiciones realizadas se puede asegurar la convergencia mediante el siguiente teorema:

Si el sistema de coordenadas es completo en H_A , entonces $x^{(n)}$ converge hacia x^* tanto en la métrica H como en la métrica H_A .

MODELOS DEL SISTEMA HIDROTERMICO

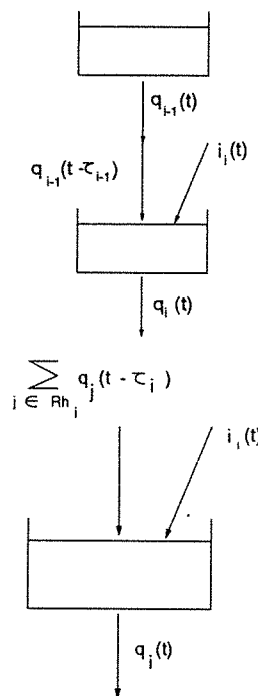


Fig. 1: Esquema de las centrales hidráulicas.

A continuación se establecen los modelos para los distintos subsistemas que componen el sistema hidrotérmico.

Para las pérdidas de transmisión se utilizará el modelo de Kirchmayer (1958), que viene dado por la fórmula:

$$P_L = K_{LO} + \sum_{i=0}^n B_{io} P_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i B_{ij} P_j \quad (20)$$

en donde K_{LO} , B_{io} y B_{ij} son valores conocidos en el sistema hidrotérmico.

Un esquema de las citadas centrales se representa en la figura 1 donde se puede observar que el caudal de descarga de una central hidráulica, va a influir en el caudal de entrada de la central hidráulica inmediatamente aguas abajo. Considerando este modelo se dirá que estas centrales están acopladas hidráulicamente.

Además, el caudal de salida de una central, en un instante t , tardará un tiempo determinado en llegar a las centrales inmediatamente aguas abajo. A este tiempo se le llama retraso en el transporte y se denota por τ .

Se asume que la red hidráulica tiene varias cuencas de plantas hidráulicas en diferentes ríos, así como plantas aisladas. Se denotará al conjunto de las plantas hidráulicas de una cuenca por R_h .

Se deben clasificar las plantas de acuerdo a su posición en la red en las siguientes categorías:

(1) Plantas Cabecera: tan sólo reciben el aporte del flujo natural de agua. La descarga de una planta cabecera afectará a otras centrales aguas abajo y se llama R_{hc} al conjunto de todas las plantas cabecera.

(2) Plantas Intermedias: reciben tanto flujo natural de agua como aportes controlados de otras plantas cabecera y/o intermedias. Ellas a su vez, influyen en otras plantas aguas abajo. Se denotarán con el símbolo R_{hi} .

(3) Plantas Desembocadura: reciben el mismo aporte que las intermedias pero el caudal de descarga no influye ya en ninguna central aguas abajo. Se nombrará por R_{hd} al conjunto de estas plantas.

(4) Plantas aisladas: sólo reciben aporte natural de agua y ellas a su vez no afectan a ninguna otra. Se hará referencia al conjunto de ellas como R_{ha} .

Las variables que aparecen en el sistema son:

$i_i(t)$: Flujo natural de agua para la central i .
 $q_i(t)$: Caudal de descarga de agua de la central i en el instante t .
 $\tau_{i,j}$: Retraso en el transporte entre la central $i-1$ y la central aguas abajo.

Las ecuaciones que definen el funcionamiento del sistema son las que describimos a continuación.

La cota superior está relacionada con el volumen $s_i(t)$ de acuerdo a:

$$y_i(t) = y_{io} + B_{yi}s_i(t) \quad i = m+1, \dots, n \quad (21)$$

La cota de descarga se sabe que varía con el caudal de descarga de acuerdo con:

$$y_{\pi}(t) = y_{\pi o} + B_{\pi}q_i(t) \quad i = m+1, \dots, n \quad (22)$$

La ecuación que relaciona el volumen de agua con los caudales de entrada y salida en cada central será:

(1) Plantas cabecera:

$$\dot{s}_i(t) = i_i(t) - q_i(t) \quad (23)$$

(2) Plantas intermedias: para las plantas intermedias la situación se ilustra en la figura 1, siendo R_{hi} el conjunto de plantas inmediatamente aguas arriba a la i -ésima.

El caudal desde cada planta lleva un retraso en el transporte de τ_j ($j \in R_{hi}$) a la i -ésima planta. Con esto se tiene:

$$\dot{s}_i(t) = i_i(t) + \sum_{j \in R_{hi}} q_j(t - \tau_j) - q_i(t) \quad (24)$$

(3) Plantas desembocadura: se describen por la misma ecuación que las plantas intermedias.

(4) Plantas aisladas: se describen por la misma ecuación que las plantas cabecera.

Para simplificar la formulación del problema se van a introducir las siguientes variables auxiliares:

$$D_i(t) = s_i(0) + \int_0^t i_i(x) dx$$

$$Y_j(t, \tau_j) = \int_0^t q_j(x - \tau_j) dx \quad j \in R_{hi}$$

$$Q_i(t) = \int_0^t q_i(x) dx \quad (25)$$

La variable $D_i(t)$ representa el volumen de agua en el depósito si la central i y las centrales aguas arriba son desactivadas (descarga nula). La variable $Y_j(t, \tau_j)$ es el volumen de agua descargada retrasada un tiempo τ_j . $Q_i(t)$ es el volumen de agua descargada en la planta i hasta el instante t . Es importante ver que la variable $D_i(t)$ es una variable no controlada mientras que $Q_i(t)$ e $Y_j(t, \tau_j)$ son variables de control.

Integrando las ecuaciones anteriores, se obtienen:

$$s_i(t) = D_i(t) - Q_i(t) \quad (26)$$

$$s_i(t) = D_i(t) + \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j) - Q_i(t)$$

Con estas variables la potencia generada en las centrales hidráulicas se puede expresar:

$$P_{hi}(t) = \frac{q_i(t)}{G_i} [\alpha_{yi} + B_{yi}s_i(t) - B_{\pi}q_i(t)] \quad (27)$$

en donde G_i es la eficiencia de la central hidráulica y α_{yi} , B_{yi} y B_{π} son parámetros dependientes de la geometría de los depósitos.

Se van a definir las variables que se relacionan a continuación y que, como se puede observar, se pueden calcular en cada central hidráulica.

$$A_i(t) = -\frac{1}{G_i} [\alpha_{yi} + B_{yi}D_i(t)] \quad ; \quad B_i = \frac{B_{yi}}{G_i} \quad ; \quad C_i = \frac{B_{\pi}}{G_i}$$

Operando adecuadamente en las ecuaciones de funcionamiento de la red hidráulica se obtienen las ecuaciones que definen el comportamiento de la red hidráulica:

$$q_{m+i}(t) - \dot{Q}_{m+i}(t) = 0 \quad (i \in R_h) \quad (28)$$

$$P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t)q_{m+i}(t) +$$

$$+ B_{m+i}q_{m+i}(t)Q_{m+i}(t) + C_{m+i}q_{m+i}^2(t) = 0 \quad (i \in R_{hca})$$

$$P_{hm+i}(t) + A_{m+i}(t)q_{m+i}(t) - B_{m+i}q_{m+i}(t) \sum_{j \in R_{hi}} Y_j(t, \tau_j) +$$

$$+ B_{m+i}q_{m+i}(t)Q_{m+i}(t) + C_{m+i}q_{m+i}^2(t) = 0 \quad (i \in R_{hd})$$

siendo R_{hCA} la unión de las plantas cabecera y aisladas y R_{hID} la unión de las plantas intermedias y desembocadura.

Para un posterior tratamiento la función $Y_j(t, \tau_j)$ nos interesará relacionarla con una nueva función, que se va a definir de la siguiente forma:

$$\Psi_j(t, \tau_j) = \int_{-\tau_j}^{t-\tau_j} q_j(x) dx \quad j \in R_{hID} \quad t \leq \tau_j$$

Esta función representa el volumen de agua descargada por las centrales inmediatamente aguas arriba desde el instante $-\tau_j$ hasta el instante $t-\tau_j$. Se puede observar que esta es una función de condiciones iniciales conocidas, con lo que siempre será de más fácil manejo que $Y_j(t, \tau_j)$.

Se puede ver fácilmente que se cumple:

$$Y_j(t, \tau_j) = \begin{cases} \Psi_j(t, \tau_j) & \text{para } 0 \leq t \leq \tau_j \\ \Psi_j(\tau_j, \tau_j) + Q_j(t - \tau_j) & \text{para } \tau_j < t < T_f \end{cases} \quad j \in R_{hID}$$

Se supondrá que el volumen de agua disponible en la central hidráulica i , durante todo el intervalo de optimización es b_i , por lo que siendo $[0, T_f]$ el intervalo de optimización, en cada planta hidráulica se tendrá que cumplir:

$$\int_0^{T_f} q_i(t) dt = b_i \quad (29)$$

Desde el punto de vista de la optimización el costo de combustible de cada central térmica es un dato conocido y se suele manejar el modelo entrada-salida. La entrada y la salida son, respectivamente, el costo de combustible y la generación de potencia activa de la unidad. Prescindiendo de las perturbaciones producidas por las válvulas dicha curva puede aproximarse por: $F(P_s) = \alpha + \beta P_s + \gamma P_s^2$ en donde α , β y γ son parámetros conocidos para cada grupo térmico.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se supone que el sistema consta de w cuencas hidráulicas. Para no complicar en exceso la notación se trabajará en lo sucesivo con una sola cuenca y se extiende el resultado al sistema completo fácilmente.

Sea un sistema con n centrales eléctricas, de las cuales m son térmicas y el resto, es decir $n-m$, hidráulicas, repartidas en una sola cuenca. Las centrales hidráulicas van a estar situadas tal como se indica en la figura 1, y por lo tanto existirá acoplamiento hidráulico entre ellas. El problema que se va a estudiar consiste en calcular las potencias que tienen que generar las distintas centrales, para que el coste de combustible, durante el intervalo de optimización $[0, T_f]$, sea mínimo.

El objetivo, por tanto, es minimizar el coste total de combustible, es decir, tendremos que minimizar el funcional:

$$J = \int_0^{T_f} \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i P_i(t) + \gamma_i P_i^2(t)) dt \quad (30)$$

sometido a una serie de restricciones.

La primera, la ecuación de equilibrio de potencia activa que define el modelo de red eléctrica:

$$\sum_{i=1}^n P_i(t) = P_D(t) + P_L(t) \quad (31)$$

Utilizando la fórmula de pérdidas que ya vimos, esta restricción la podemos expresar de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i(t) B_{ij} P_j(t) + \sum_{i=1}^n (B_{io} - 1) P_i(t) + P_D(t) + K_{LO} = 0$$

Las otras restricciones que se tendrán que tener en cuenta serán las ecuaciones de funcionamiento de la red hidráulica que se vieron anteriormente.

Y por último, el volumen de agua disponible durante el intervalo de optimización en la central hidráulica i es como ya vimos b_i y por tanto, en cada central hidráulica se tendrá que cumplir:

$$\int_0^{T_f} q_{m+i}(t) dt = b_{m+i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-m \quad (32)$$

Para tener en cuenta estas restricciones introducimos unas funciones multiplicadoras desconocidas, que se denominan $k(t)$, $m(t)$, $n(t)$, y $r_i(t)$.

La última restricción se incluirá en el funcional de costo mediante el multiplicador constante μ_i , que no depende del tiempo, pues la restricción asociada se refiere a todo el intervalo de optimización. Se tendrá que incluir en el funcional de costo estos multiplicadores, junto con las restricciones correspondientes, obteniendo el funcional de costo aumentado (Bayón, 1998).

Este funcional se puede expresar en forma matricial mediante el vector de control:

$$u(t) = \begin{bmatrix} P(t) \\ W(t) \end{bmatrix} \quad (33)$$

formado por los siguientes subvectores:

$P(t)$: incluye las potencias activas de todas las plantas generadoras del sistema.

$W(t) = \text{col}[W_i(t) : i \in R_h]$ con dimensión y definición diferente según la categoría de la planta a la que se refiera:

$$W_i(t) = \begin{bmatrix} Q_i(t) \\ q_i(t) \end{bmatrix} \quad i \in R_{hCA} \quad (34)$$

$$W_i(t) = \begin{bmatrix} Q_i(t) \\ q_i(t) \\ Y_{iw}(t) \end{bmatrix} \quad Y_{iw}(t) = \text{col}[Y_j(t, \tau_j) : j \in R_{hID}] \quad i \in R_{hID}$$

Con esta notación, el funcional de costo aumentado con las restricciones queda del modo siguiente:

$$J[u(t)] = \int_0^{T_f} [u^T(t) B(t) u(t)] dt + \int_0^{T_f} [L^T(t) u(t)] dt + c \quad (35)$$

siendo B , L y c operadores definidos con antelación (Bayón, 1998).

Si se define:

$$\begin{aligned} G(u, u) &= (Au, u) = \int_0^{T_f} [u^T(t)B(t)u(t)] dt \\ l.u &= \int_0^{T_f} [L^T(t)u(t)] dt \\ c &= - \sum_{i \in R_h} \mu_i b_i \end{aligned} \quad (36)$$

El funcional de costo toma la forma:

$$F(u) = (Au, u) - 2lu + c \quad (u \in D(A)) \quad (37)$$

Ahora ya se puede aplicar a este funcional la teoría vista en el apartado de fundamentos matemáticos.

Las condiciones que debían verificar y cuya comprobación se puede realizar con las definiciones precedentes eran:

- i) $g(u)$: funcional simétrica y coerciva.
- ii) $l(u)$: funcional lineal, acotada.

Para la demostración de la simetría y coercividad de $g(u)$ y la linealidad y acotación de $l(u)$ véase el trabajo de El-Hawary y Chrystensen (1979).

Con estas dos suposiciones se asegura que F está acotada inferiormente, y esto junto con la noción de espacio energético H_A (Bayón, 1998) permite afirmar que la sucesión minimizadora de Ritz converge a la solución exacta.

El espacio energético en el problema será:

$$L_{2B}^A(0, T_f) \equiv H_A \quad (38)$$

Sus elementos son vectores $u(t)$, cuyas componentes son funciones de cuadrado integrable y cuyo producto escalar se define de la siguiente forma:

$$[v(t), u(t)] = (Av, u) = \int_0^{T_f} v^T(t)B(t)u(t) dt \quad (39)$$

En cuanto a los sistemas de coordenadas o funciones de forma con los que se va a trabajar, aunque los sistemas de potencias $\{f^i\}$, $i=0, \dots, n$, ... dan malos resultados en cuanto a la estabilidad, demuestran una gran rapidez de convergencia, en comparación con los sistemas trigonométricos que son considerados, en general, lentos.

En todo caso, se asegura la convergencia, escogiendo un sistema de coordenadas completo en el espacio energético H_A . El sistema algebraico de potencias $\{f^i\}$, $i=0, \dots, n$, ... es completo en dicho espacio, como puede verse en Miklhin (1965), con lo que queda probada la convergencia de las aproximaciones.

En resumen, y a la vista de todos estos resultados, para el posterior problema de aproximación, se elegirán los sistemas de potencias $\{f^i\}$, $i=0, \dots, n$, ... cumpliendo las condiciones límite impuestas, y tomando tan sólo los primeros términos, para evitar la inestabilidad y aprovechar su rapidez de convergencia.

SOLUCION OPTIMA

Se busca la solución aproximada al mínimo de nuestro funcional aumentado, de acuerdo a la teoría del método de Ritz, es decir se va a buscar la solución en la forma:

$$x = \sum_{i=1}^n a_i w_i \quad (40)$$

Llegados a este punto se van a elegir las aproximaciones para las variables de trabajo. Como se ve en el funcional aumentado, tan sólo quedan ya, dos variables de control: las potencias térmicas $P_{si}(t)$ y los caudales vertidos por las centrales hidráulicas $q_i(t)$.

En general, y para unas funciones coordenadas cualesquiera $w_i(t)$, las aproximaciones serán:

$$\begin{aligned} P_{si}(t) &= P_{si}(0) + \sum_{i=1}^f d_i^s w_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, m \\ q_{m+i}(t) &= q_{m+i}(0) + \sum_{i=1}^f c_i^{m+i} w_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n-m \end{aligned} \quad (41)$$

siendo f el número de funciones de forma, y por tanto, la dimensión del subespacio de proyección.

Tras realizar numerosos test con diversos sistemas hidrotérmicos ramificados, se comprobó que no compensa tomar mucho términos de la sucesión minimizadora.

Dicho de otro modo, el aumento del número de funciones de forma, y el consiguiente aumento de la dimensión del problema, acarrea algunos problemas en cuanto a estabilidad y resolución del sistema de optimización final y apenas mejora la aproximación y la exactitud de la solución obtenida; es decir, la sucesión minimizadora converge muy rápidamente.

Por ello, y a diferencia de los sistemas térmicos, en los sistemas hidrotérmicos, dada su enorme complejidad, y dado que los test realizados nos avalan, vamos a aplicar en la práctica aproximaciones de Ritz que tan sólo consideran una función de forma $w_i(t)$. Con esta premisa se tendrá que:

$$\begin{aligned} P_{si}(t) &= P_{si}(0) + d_i^s t \quad i = 1, 2, \dots, m \\ q_{m+i}(t) &= q_{m+i}(0) + c_i^{m+i} \quad i = 1, 2, \dots, n-m \end{aligned} \quad (42)$$

Una vez así planteado el problema, se observa como el funcional pasa a ser función de los $n \times f \times q$ coeficientes de Ritz, (f por cada central térmica o hidráulica presente en el sistema y uno por cada nodo), y de los multiplicadores $l(j)$ y μ_i . Se tiene por tanto planteado un problema de la forma:

$$J = F(a_1, \dots, a_{n,f,q}, l(1), \dots, l(q), \mu_{m+1}, \dots, \mu_n) \quad (43)$$

Esta función alcanza el mínimo en un único punto del espacio $R^{n,f,q+n-m}$, en el punto $((a_i^*), (l(j)^*), (\mu_{m+i}^*))$, donde a_i^* son los coeficientes del desarrollo de $x^{n,f,q}$ por los elementos de la base $(w_1, \dots, w_{n,f,q})$. Este punto se hallará por el método clásico del cálculo variacional, igualando a cero las derivadas de J respecto a las variables independientes: $a_1, \dots, a_{n,f,q}, l(1), \dots, l(q), \mu_{m+1}, \dots, \mu_n$.

Por consiguiente, F será la función auxiliar de Lagrange del problema de extremos condicionados que tenemos planteado y la determinación del mínimo se reduce a la resolución del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial d_{ij}} &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad ; \quad l = 1, 2, \dots, f \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, q \\ \frac{\partial F}{\partial c_{l+i,j}} &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-m \quad ; \quad l = 1, 2, \dots, f \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, q \\ \frac{\partial F}{\partial l(j)} &= 0 \quad j = 1, 2, \dots, q \\ \frac{\partial F}{\partial \mu_{m+i}} &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-m \end{aligned} \quad (44)$$

Este sistema se resolverá mediante el método de convergencia global por retroceso (Bayón, 1998).

EJEMPLO NUMERICO

Se ha elaborado un programa de ordenador para aplicar los resultados obtenidos en este trabajo a un sistema de potencia cuyos datos se resumen en la Tabla 1. El sistema consta de tres plantas térmicas y seis plantas hidráulicas. En la figura 2 se muestra la red hidráulica y las plantas térmicas. La figura 3 muestra la variación del error relativo en las sucesivas iteraciones. La potencia demandada así como las potencias óptimas generadas en las distintas centrales se muestran en las figuras 4, 5, 6 y 7.

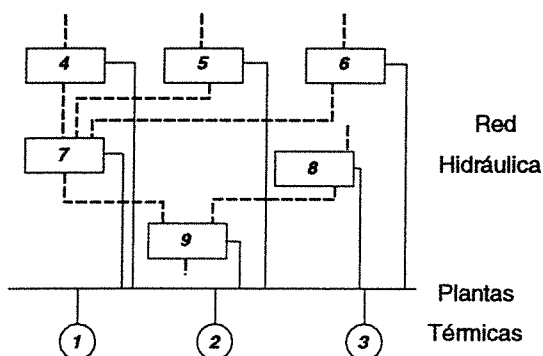


Fig. 2: Sistema hidrotérmico.

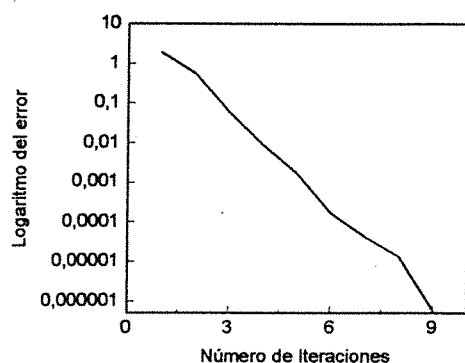


Fig. 3: Variación del error relativo.

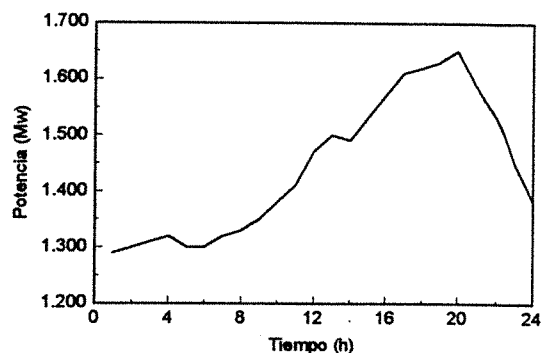


Fig. 4: Potencia Demandada.

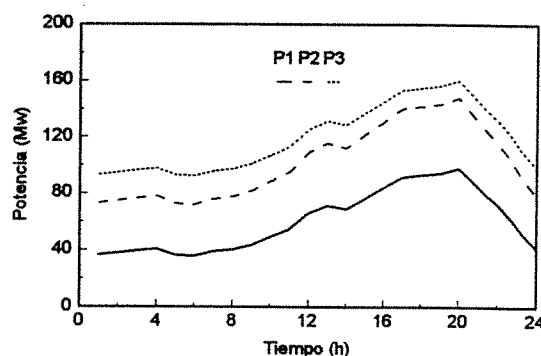


Fig. 5: Potencias térmicas óptimas.

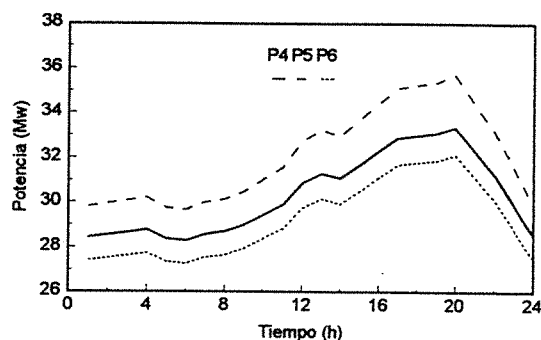


Fig. 6: Potencias hidráulicas óptimas.

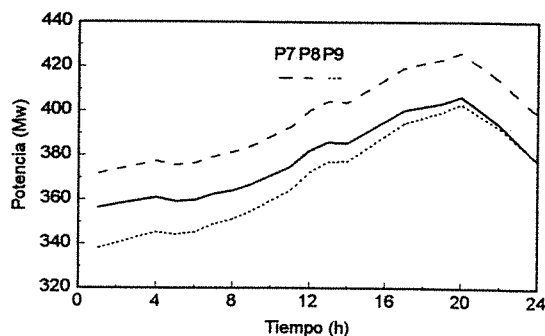


Fig. 7: Potencias hidráulicas óptimas.

Tabla 1: Datos del sistema.

Plantas Térmicas						Coeff. $\alpha(\$)$ $\beta(\$ / MW \cdot h)$ $\gamma(\$ / MW^2 \cdot h)$ $B(MW^{-1})$ $P(0)(MW)$
1	2	3				
0	0	0				
4.2	4.1	4.0				
0.0014	0.0013	0.0012				
0.00016	0.00010	0.00016				
31.58	66.98	87.73				
Plantas Hidráulicas						Coeff. $G(m^3/h \cdot MW)$ $b(m^3)$ $B(MW^{-1})$ $i(m^3/h)$ $s(m^3)$ $B_T(m^{-2} \cdot h)$ $B_y(m^{-2})$ $q(0)(m^3)$ $\tau(h)$
4	5	6	7	8	9	
526.31510 ³	536.31510 ³	546.31510 ³	570.83410 ³	580.83410 ³	590.83410 ³	
141.610 ⁵	141.6010 ⁵	141.6010 ⁵	991.2010 ⁵	991.2010 ⁵	991.2010 ⁵	
220.010 ⁻⁶	200.010 ⁻⁶	240.010 ⁻⁶	160.010 ⁻⁶	170.010 ⁻⁶	160.010 ⁻⁶	
101.95210 ⁵	101.95210 ⁵	101.95210 ⁵	301.95210 ⁵	401.95210 ⁵	501.95210 ⁵	
203.90410 ⁹	203.90410 ⁹	203.90410 ⁹	407.80810 ⁸	407.80810 ⁸	407.80810 ⁸	
581.74010 ⁻⁸	571.74010 ⁻⁸	581.74010 ⁻⁸	219.59710 ⁻⁸	239.59710 ⁻⁸	219.59710 ⁻⁸	
149.510 ⁻¹²	159.510 ⁻¹²	149.510 ⁻¹²	149.510 ⁻¹¹	159.510 ⁻¹¹	149.510 ⁻¹¹	
537.35110 ³	531.57210 ³	537.30410 ³	3815.1210 ³	3802.6710 ³	3751.5810 ³	
1	1	1	2	2		

CONCLUSIONES

En este trabajo se han aplicado conjuntamente la teoría del cálculo del mínimo de la funcional cuadrática heterogénea mediante el método de Ritz y la resolución de sistemas de ecuaciones mediante el método de convergencia global por retroceso, para minimizar el coste de combustible en un sistema hidrotérmico. El sistema se caracteriza por el acoplamiento hidráulico y por la presencia del retraso en el transporte en algunas variables de control. La solución obtenida presenta entre otras ventajas:

- La resolución del sistema no necesita valores iniciales próximos a la solución y muestra convergencia muy rápida para problemas complejos.
- Además de las potencias óptimas obtenemos los valores de las demás variables del sistema (caudales, altura de agua en los depósitos, etc).
- El método obtenido se puede aplicar para la optimización de las pérdidas de transmisión e incluso para optimización combinada, por ejemplo coste de combustible, contaminación y pérdidas de transmisión.

REFERENCIAS

- Bayón, L.F., *Optimización de un sistema hidrotérmico mediante el método de Ritz*. Cuaderno de Investigación nº 31. Departamento de Matemáticas. Universidad de Oviedo, España (1998)
- El-Hawary, M. E.; Chrystensen, G. S., *Optimal economic operation of electric power systems*. Academic Press (1979)
- Kirchmayer, L. K., *Economic operation of power systems*. General Electric Company, John Wiley & Sons, INC., New York - USA (1958)
- Mikhlin, S.G., *The Problem of the minimum of a quadratic functional*. Holden - Day, INC., San Francisco - USA (1965)
- Suárez, P.M.; Bayón, L.F., *Optimización de las emisiones de SO₂ Y NO_x en un sistema hidrotérmico*. Información Tecnológica - Vol 7 Nº 6. 49-54 (1996).

