

PROYECTO INVESTIGADOR

Presentado por:

José María Grau Ribas



Departamento de Matemáticas



Universidad de Oviedo

PROYECTO INVESTIGADOR

ÍNDICE

1. Preámbulo.	3
2. Actividad investigadora previa.	5
2.1. Optimización hidrotérmica.	5
2.1.1. Convolución infimal.	5
2.1.2. Control óptimo.	6
2.2. Teoría de números.	7
2.2.1. Teoría de números computacional. Primalidad.	7
2.2.2. Teoría elemental de números.	7
2.3. Problemas de parada óptima.	12
3. Sinopsis de las líneas de investigación propuestas.	13
3.1. Línea 1: Convolución infimal selectiva.	13
3.2. Línea 2: Sucesiones de funciones recurrentes.	13
3.3. Línea 3: Generalizaciones del problema de la secretaria.	14
3.4. Línea 4: El problema del último éxito.	14
3.5. Línea 5: Juegos con sumas de variables aleatorias.	15
3.6. Línea 6: Cuaternios de Hamilton generalizados.	15
3.7. Línea 7: Grafos con vértices en un anillo.	15
3.8. Línea 8: Grafos destructibles.	16
4. Línea 1: Convolución infimal selectiva.	17
4.1. Introducción	17
4.2. Trabajos previos.	18
4.2.1. Convolución infimal.	18
4.2.2. Convolución infimal selectiva.	19
4.3. Trabajos en perspectiva.	20
4.3.1. Complejidad del cálculo de la convolución infimal selectiva	20
5. Línea 2: Sucesiones de funciones recurrentes, $F_n : \{0, \dots, n\} \mapsto \mathbb{R}$.	23
5.1. Introducción	23
5.2. Trabajos previos.	26

5.3.	Trabajos en perspectiva.	27
5.3.1.	Convergencia puntual y uniforme de $F_n(\lfloor nx \rfloor)$ sobre compactos.	27
5.3.2.	Funciones $F_n(k)$ definidas a trozos.	33
6.	Línea 3: Variantes del problema de la secretaria.	35
6.1.	Introducción.	35
6.2.	Trabajos previos.	36
6.2.1.	Las variantes <i>mejor/peor</i> y <i>postdoc</i>	36
6.2.2.	La variante <i>mejor/peor</i> y <i>postdoc</i> con número de candidatas aleatorio.	37
6.2.3.	El problema de las secretarías gemelas.	38
6.2.4.	Un problema de parada óptima en economía.	39
6.3.	Trabajos en perspectiva.	39
6.3.1.	Revisión de problemas clásicos.	39
6.3.2.	Problema de la secretaria con dos entrevistas.	40
6.3.3.	Problema de la secretaria con muestreo.	41
6.3.4.	Problema de las secretarías clonadas m veces.	43
7.	Línea 4: El problema del último éxito.	45
7.1.	Introducción.	45
7.2.	Trabajos realizados.	46
7.2.1.	Una extensión del teorema de Bruss.	46
7.2.2.	Un juego relacionado con el problema del último éxito.	47
7.2.3.	Variaciones del problema del último éxito y nuevas cotas.	48
7.3.	Trabajos en perspectiva.	49
7.3.1.	Problema del último éxito con dos sucesiones de experimentos.	49
8.	Línea 5: Juegos con sumas de variables aleatorias.	53
8.1.	Introducción	53
8.2.	Trabajos en perspectiva.	54
8.2.1.	Showcase Showdown con variables $U[0, 1]$ y jugadas ilimitadas.	54
8.2.2.	Juego de la patata caliente con sumas de variables aleatorias.	59
9.	Línea 6: Cuaternios de Hamilton generalizados.	65
9.1.	Introducción.	65
9.2.	Trabajos previos.	66
9.2.1.	Estructura del anillo de cuaternios $\left(\frac{a,b}{\mathbb{Z}_n}\right)$ con a, b unidades.	66
9.2.2.	Cuaternios de Hamilton generalizados sobre \mathbb{Z}_n con n impar.	67
9.3.	Trabajos en perspectiva.	68

9.3.1. Cuaternios generalizados sobre anillo local de característica impar.	68
9.3.2. Cuaternios de Hamilton generalizados sobre $R = \mathbb{Z}_{2^s}$.	69
9.3.3. Anillos reversibles no simétricos de 256 elementos	73
10. Línea 7: Grafos con vértices en un anillo.	77
10.1. Introducción	77
10.2. Trabajos previos	78
10.2.1. Commuting Graph: $\widehat{\Gamma}(R)$.	78
10.2.2. Zero-divisor graph: $\overline{\Gamma}(R)$.	79
10.3. Trabajos en perspectiva.	80
10.3.1. El grafo de anticonmutación: x e y adyacentes si $xy + yx = 0$.	80
10.3.2. El grafo $\Gamma_0(R)$: x e y adyacentes si $xy = yx = 0$.	83
11. Línea 8: Grafos destructibles.	89
11.1. Introducción	89
11.2. Trabajos realizados.	90
11.3. Trabajos en perspectiva.	91
11.3.1. Grafos no destructibles minimales.	91
11.3.2. Minimalidad en grafos conexos cúbicos y simétricos.	92
11.3.3. Minimalidad en grafos vértice-transitivos.	93
11.3.4. Minimalidad en grafos cúbicos planos 3-conectados.	94
11.3.5. Minimalidad en grafos 3-conectados, cúbicos y bipartitos.	95
11.3.6. Cobertura de vértices minimal de grafos destructibles.	96
12. Publicaciones y otras Referencias.	101
12.1. Publicaciones del candidato.	101
12.2. Otras Referencias	109

1. PREÁMBULO.

El presente proyecto tiene como objetivo describir las líneas de investigación que el candidato pretende desarrollar. Se ha pretendido que este documento no sea el mero cumplimiento de un imperativo legal sino que resulte un instrumento útil, tanto para el candidato, como para sus colaboradores, así como para cualquier persona que se asome a estas páginas. Su elaboración ha requerido poner en orden ideas y resultados obtenidos, todavía no publicados, en líneas de investigación que, por distintas circunstancias, se han visto desplazadas por otras.

La actividad investigadora del candidato se ha desarrollado, especialmente en los últimos años, en campos muy diversos y poco o nada conectados. Esta actividad se enmarca de forma preferente, desde 1998, dentro del equipo de investigación de la Universidad de Oviedo, acreditado como tal, denominado *Optimización y Aplicaciones (OPyAP)*.



Grupo de Investigación OPyAP.



Universidad de Oviedo
Universidat d'Oviéu
University of Oviedo

Español | English



Grupo de Investigación acreditado OPyAP

Presentación

Investigación

Transferencia

Actualidad

Enlaces

Inicio » Presentación » Miembros

Miembros

Investigador responsable

• [GRAU RIBAS, JOSE MARIA](#)

Miembros del grupo

• [BAYON ARNAU, LUIS FROILAN](#)

• [FORTUNY AYUSO, PEDRO](#)

• [OTERO CORTE, JOSE AURELIO](#)

• [RUIZ SANTOS, MARIA DEL MAR](#)

• [SUAREZ RODRIGUEZ, PEDRO MARIA](#)

• [TASIS MONTES, MARIA DEL CARMEN](#)

Menú

» Historia

Miembros

» Plataformas, redes y sociedades científicas

» Dónde estamos

» Galería de imágenes

★ Destacados

6 PROYECTO INVESTIGADOR

Asimismo, desde 2010, he desarrollado una intensa actividad formando tándem con Antonio Miguel Oller Marcén, profesor del Centro Universitario de la Defensa (Academia General Militar de Zaragoza), y mediante colaboraciones puntuales con investigadores de muy diversas latitudes, algunos muy prestigiosos.

Amén de lo antes relatado, durante los tres últimos años, venimos realizando trabajos conjuntos varios miembros del equipo OPyAP con el mencionado Oller-Marcén en problemas de parada óptima.



Antonio Miguel Oller Marcén.

2. ACTIVIDAD INVESTIGADORA PREVIA.

De un modo muy compendiado, podríamos decir que la actividad investigadora del equipo OPyAP ha consistido en desarrollar modelos y herramientas matemáticas inspiradas en problemas de Optimización Hidrotérmica; mientras que la colaboración con Oller Marcén se ha centrado fundamentalmente en el campo de la Teoría de Números y, en los últimos tiempos, también, en problemas de parada óptima.

2.1. OPTIMIZACIÓN HIDROTÉRMICA.

En esta línea de investigación podemos establecer dos sublíneas bien diferenciadas: una dedicada al estudio del operador de *Convolución Infimal* (infimal convolution) inspirada en el concepto de central térmica equivalente, en el marco del despacho económico, y otra relacionada con el *Control Óptimo* inspirada en el problema de coordinación hidrotérmica.

2.1.1. CONVOLUCIÓN INFIMAL.

La térmica equivalente (equivalente minimizadora) de un conjunto de centrales térmicas de funciones de costo $F_i(x)$ con dominios $[m_i, M_i]$ es una central ideal cuyo coste de producción $\mathfrak{F}(x)$ representa el coste mínimo de la producción conjunta de cada nivel de potencia. En términos más precisos

$$\mathfrak{F}(x) := \min_{\substack{x_1 + \dots + x_n = x \\ x_i \in [m_i, M_i]}} \sum_{i=1}^n F_i(x_i)$$

Se trata en definitiva de la construcción de la convolución infimal de las funciones $\{F_i\}_{i=1}^n$:

$$\mathfrak{F}(x) = \left(\bigcirc_{i=1}^n F_i \right) (x)$$

Hemos realizado diversos trabajos en esta línea, que se inicia con [2] y se culmina en [159] con un algoritmo que calcula la convolución infimal de n funciones cuadráticas convexas (restringidas a intervalos) en tiempo cuasi-lineal, $\mathcal{O}(n \log(n))$. En esta línea, se realizaron otras aportaciones como las siguientes:

- En [18] se presentó un algoritmo para la construcción de la convolución infimal de funciones cuadráticas a trozos, inspirado en el problema de la construcción de la central térmica equivalente de varias centrales *multifuel*.
- En [38] se realizó el estudio de la convolución infimal de funciones afines a trozos, que se inspiró en las centrales de ciclo combinado.

Asimismo se estudió la convolución infimal en el contexto de la microeconomía:

- En [21] y [39] se trató el problema de la maximización de beneficio (profit maximization problem).

Otros detalles de esta línea se presentan en la sección dedicada a líneas de investigación futuras.

2.1.2. CONTROL ÓPTIMO.

Esta línea surgió, en sus inicios, como consecuencia del estudio de los problemas de coordinación hidrotérmica y posteriormente derivó hacia otros campos. El problema de control óptimo de referencia es el siguiente:

Dado el funcional J , definido a continuación,

$$J(\mathbf{z}) = \int_0^T \Psi(P_d(t) - H(t, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t))) dt,$$

se trata de minimizar J en el conjunto

$$\mathbb{D} := \{\mathbf{z} \in \widehat{C}^1[0, T] : \mathbf{z}(0) = \vec{0}, \mathbf{z}(T) = \mathbf{b}, m_i \leq z'_i(t) \leq \mathfrak{M}_i\},$$

donde $\mathbf{z}(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ representa el vector de volúmenes de agua turbinados por las centrales hidráulicas hasta el instante t ; H es función de generación de potencias de las centrales hidráulicas; $P_d(t)$ la potencia demandada y $\Psi(\cdot)$ la función de coste mínimo de producción de las centrales térmicas (térmica equivalente).

Se realizaron numerosas aportaciones en esta línea, entre otras, las siguientes:

- En [13] Se presentó un procedimiento para el cálculo de la solución de problemas de control óptimo multidimensional mediante la utilización del método del descenso coordinado cíclico.
- Trabajos de optimización no suave, inspirados en las centrales de bombeo: [25], [15] y [37].
- Trabajos de Optimización Bang-Bang y Bang-Singular-Bang inspirados en problemas con centrales de carga fija: [19] y [20].

Asimismo, se realizaron otros trabajos, siguiendo en el contexto del control óptimo, pero con derivaciones hacia otros campos ajenos a la optimización hidrotérmica como es el caso del control óptimo de procesos químicos: [57], [40] y [17].

2.2. TEORÍA DE NÚMEROS.

La actividad relacionada con la teoría de números se ha desarrollado principalmente en dos direcciones: teoría de números computacional (primalidad) y teoría elemental de números.

2.2.1. TEORÍA DE NÚMEROS COMPUTACIONAL. PRIMALIDAD.

En esta línea, en la que hemos contado con la colaboración del profesor de la Universidad de Cantabria, Daniel Sadornil Renedo, hemos realizados varios trabajos en los que se han desarrollado test de primalidad para distintas familias de números:

- En [22], presentamos un test para números Cullen generalizados; esto es, para la familia de números de la forma $nb^n + 1$.
- En [42], generalizamos lo anterior a la familia de números de la forma $4Kp^n + 1$.
- En [69] aportamos un test de primalidad para la familia de números $4Kp^n - 1$, basado en la utilización de potencias modulares de enteros gaussianos.



Daniel Sadornil Renedo.

2.2.2. TEORÍA ELEMENTAL DE NÚMEROS.

El eje central de la mayoría de nuestros trabajos en esta línea ha sido el estudio de conjuntos de enteros del tipo siguiente:

$$\left\{ n : \sum_{i=1}^n i^{f(n)} \equiv k \pmod{n} \right\},$$

siendo uno de los objetivos encontrar su densidad asintótica. Amén de lo anterior, hemos realizado trabajos que se pueden considerar de Álgebra (teoría de anillos), si bien las herramientas utilizadas son de teoría de números.

En varios de estos trabajos hemos contado con la colaboración de matemáticos de reconocido prestigio, de diversas latitudes:

- En [31], en colaboración Florián Luca¹, estudiamos el conjunto

$$\left\{ n : \sum_{i=1}^n i^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{n} \right\}$$

estableciendo que su densidad asintótica está en $[0.379005, 0.379826]$. Es decir, 0.379...



Florián Luca.

- En [64], en colaboración con Max Alekseyev (George Washington University), estudiamos conjuntos del tipo

$$\mathcal{M}_p := \left\{ n : \sum_{i=1}^n i^n \equiv p \pmod{n} \right\}$$

donde p es un número primo.



Max Alekseyev.

Se presentó un algoritmo que encuentra, de modo rápido, elementos de \mathcal{M}_p y, en muchos casos, es capaz de determinar su finitud determinándolo completamente; por

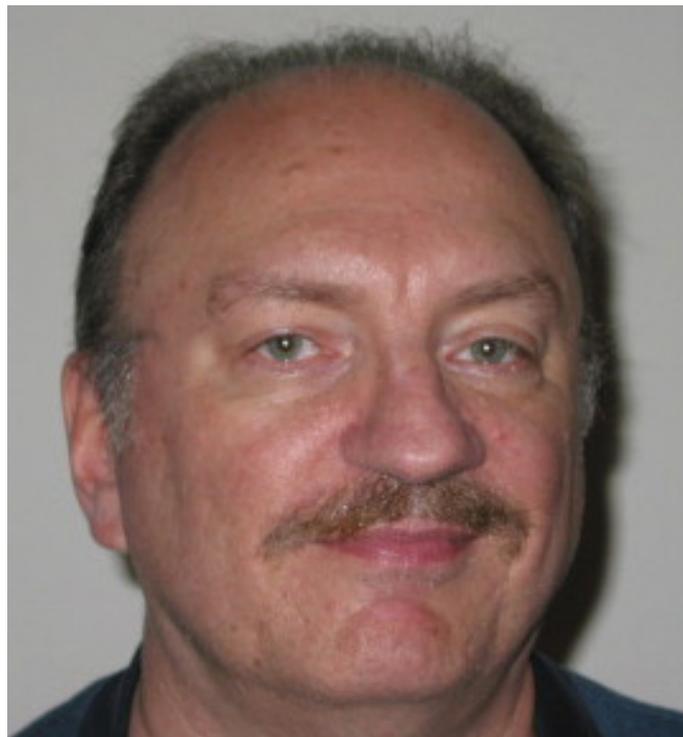
¹Se trata de uno de los numeristas más prolíficos, con más de 600 artículos en su haber. Es de origen rumano y en la actualidad es profesor en la Universidad de Witwatersrand (Johannesburg). Tiene número de Erdős 1.

ejemplo:

$$\mathcal{M}_{19} = \{2, 3, 7, 43, 4903, 168241543, 5773040306503\}$$

- En [43], en colaboración con Jonathan Sondow (Princeton University), estudiamos conjuntos del tipo

$$M_Q := \left\{ n : \sum_{i=1}^n i^n \equiv Q \pmod{n} \right\}$$



Jonathan Sondow (1943-2020).

Se probó que la congruencia solo es posible cuando el cociente $Q := n/m$ satisface $\sum_{p|Q} \frac{Q}{p} + 1 \equiv 0 \pmod{Q}$. Las únicas soluciones conocidas son $Q = 1$ y los ocho siguientes *primary pseudoperfect numbers*:

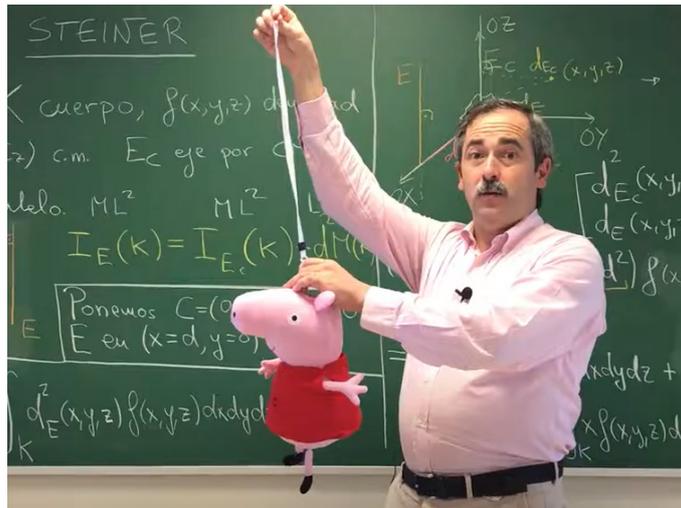
2, 6, 42, 1806, 47058, 2214502422, 52495396602, 8490421583559688410706771261086.

Fijado Q , demostramos que el conjunto de enteros positivos n que satisfacen la congruencia, con $n = Qm$, en los 9 casos indicados, tiene densidad asintótica positiva, con la excepción de $Q = 52495396602$, en cuyo caso $M_Q = \emptyset$.

- En [44], junto con Pedro Fortuny Ayuso, estudiamos el conjunto

$$\left\{ n : \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n (a + b \cdot i)^n \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$

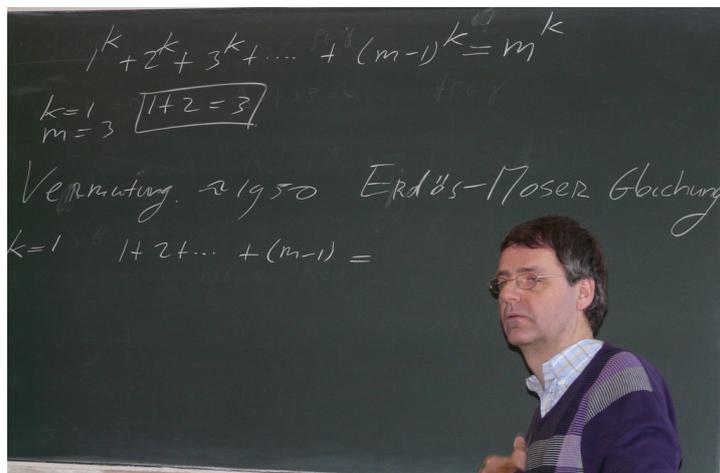
cuya densidad asintótica pudo determinarse con 6 dígitos de precisión: 0.971000...



Pedro Fortuny Ayuso.

- En [52], en colaboración con Pieter Moree (Max-Planck-Institut fuer Mathematik), estudiamos conjuntos de la forma

$$\left\{ n : \sum_{j=1}^n j^{an+b} \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$



Pieter Moree, coordinador científico del Instituto Max-Planck de Bonn.

- En [46] Con László Tóth (University of Pécs, Hungría) estudiamos la función multiplicativa que generaliza la función φ de Euler:

$$\rho_{k,\lambda}(n) := \text{card} \{(x_1, \dots, x_k) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^k : x_1^2 + \dots + x_k^2 \equiv \lambda \pmod{n}\}$$



László Tóth.

- En varios trabajos relacionados con generalizaciones de cuaternios de Hamilton ([45], [63] y [53] hemos contado con la colaboración de Celino Miguel (Universidade da Beira Interior).



Celino José Martins Miguel

2.3. PROBLEMAS DE PARADA ÓPTIMA.

El interés en esta línea es reciente. La actividad en ella se inició en 2017 y fue en 2018 cuando publicamos el primer trabajo, [61]. En él se estudiaron dos variantes del problema de la secretaria: seleccionar la *mejor o la peor* y la variante *postdoc* (2ª mejor). Dicho trabajo tuvo continuidad con [62], sobre las mismas variantes, considerando un número de secretarías aleatorio. Asimismo, en [60], se estudia el problema de las *secretarías gemelas* (the returning secretary problem). En este último año, también se han logrado tres publicaciones relacionadas con el *problema del último éxito* (last-success-problem): [66], [67] y [71]. De todo ello se hablará, más adelante, con más extensión, al tratarse de una de las líneas de investigación propuestas.

3. SINOPSIS DE LAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN PROPUESTAS.

La investigación propuesta está en sintonía con el historial investigador del candidato en cuanto a diversidad temática. En total se proponen 8 líneas de trabajo que se comentarán con detalle en la siguiente sección. En todas ellas se ha conseguido algún fruto en forma de publicación o se está en vías de conseguirlo. En el grupo de investigación OPyAP, existen otras líneas de investigación activas, relacionadas con el control óptimo, pero aquí se exponen solamente aquellas lideradas o promovidas por el candidato. A continuación se adelanta una brevísima descripción de cada una de ellas, que será completada en las próximas secciones. Las 8 líneas de investigación que se pretende desarrollar son las siguientes:

3.1. LÍNEA 1: CONVOLUCIÓN INFIMAL SELECTIVA.

Esta es, entre las líneas propuestas, la única reminiscencia de lo que otrora fue la línea única del equipo: *Optimización Hidrotérmica*. Está inspirada en el denominado problema del *Unit Commitment* que consiste en determinar, para cada nivel de potencia, las centrales que deben participar en la producción y en qué forma, de modo que el coste de producción conjunto sea mínimo. La diferencia con la térmica equivalente (donde todas las centrales participan de la producción aunque sea en su mínimo técnico) es que aquí se puede prescindir de aquellas centrales menos eficientes.

La *convolución infimal selectiva* (SIC) de un conjunto de funciones de costo de producción, $F_i(x)$, con dominios respectivos $[m_i, M_i]$, es una función, $\Psi(x)$, que representa el coste mínimo de la producción conjunta de cada nivel de potencia, x , permitiendo prescindir de ciertas unidades de producción si fuera preferible. En términos más formales, la convolución infimal selectiva de un conjunto de funciones $\{F_i\}_{i=1}^n$ es

$$\Psi(x) := \left(\bigotimes_{i=1}^n F_i \right) (x) := \begin{array}{l} \text{mín} \\ \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = x \\ x_i \in [m_i, M_i] \\ \alpha_i \in \{1, 0\} \end{array} \sum_{i=1}^n F_i(x_i)$$

Este operador se introdujo formalmente en [58] y el objetivo fundamental en esta línea es estudiar la complejidad computacional de su cálculo para funciones cuadráticas y afines.

3.2. LÍNEA 2: SUCESIONES DE FUNCIONES RECURRENTE.

En esta línea se pretende desarrollar una idea presentada en [60], con la que se introdujo una metodología novedosa, que permite estudiar el comportamiento asintótico de la solución de problemas de parada óptima, mediante el uso de ecuaciones diferenciales.

Dadas las sucesiones de funciones $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$F_n, G_n, H_n : \{0, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisfacen

$$\begin{aligned} F_n(k) &= G_n(k) + H_n(k)F_n(k-1), \\ F_n(n) &= \mu_n, \end{aligned}$$

se pretende investigar las condiciones que deben satisfacerse para que la sucesión $f_n(x) := F_n(\lfloor nx \rfloor)$ converja uniformemente en $[0, 1]$. Cuando esto sucede, en [60] se demostró que el límite, llamémosle f , satisface una cierta ecuación diferencial con la condición final $f(1) = \lim \mu_n$. Cuando esta convergencia no es uniforme, conjeturamos que el límite también satisface idéntica ecuación diferencial, pero la condición final resulta más esquiva; de hecho, en ciertos casos, esta condición final es independiente de la sucesión μ_n .

3.3. LÍNEA 3: GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA DE LA SECRETARIA.

Son muchas las variantes y generalizaciones del problema de la secretaria cuya estrategia óptima es de umbral. En estos casos la función que proporciona la probabilidad de éxito utilizando un cierto umbral puede definirse de modo recurrente y es ahí donde la metodología introducida en [60] puede servir para el estudio de los valores asintóticos del umbral óptimo y probabilidad de éxito. En esta línea se pretenden estudiar nuevas generalizaciones del problema de la secretaria así como revisar otras, ya estudiadas, utilizando la nueva metodología que se desarrolla en la línea anterior.

3.4. LÍNEA 4: EL PROBLEMA DEL ÚLTIMO ÉXITO.

Esta línea pretende desarrollar ideas que han surgido relacionadas con el problema del último éxito (Last-Success-Problem). Dada una sucesión de experimentos de Bernoulli (éxito/fracaso) que se muestran secuencialmente, el problema consiste en encontrar la estrategia para señalar el último éxito (último 1) con la máxima probabilidad de acertar. En otros términos, se trata de maximizar la probabilidad de señalar un éxito en la sucesión y que a la postre sea el último.

Hemos llegado a este tópico por su conexión con el problema de la secretaria y como consecuencia de la relación epistolar con Franz Thomas Bruss, máxima autoridad en el tema y autor del célebre teorema que lo resuelve (Odds-Theorem, [90]). De esta línea, hasta ahora desarrollada en solitario, se han derivado tres publicaciones: [66], [67] y [71].

La idea más prometedora que se pretende desarrollar pasa por considerar dos sucesiones de experimentos de Bernoulli, siendo el objetivo en este caso señalar un éxito de la primera sucesión de modo que en la segunda no se produzca ningún otro a partir de entonces. De hecho, en diferentes variantes del problema de la secretaria, subyacen esas dos sucesiones de experimentos de Bernoulli.

3.5. LÍNEA 5: JUEGOS CON SUMAS DE VARIABLES ALEATORIAS.

Se pretende investigar diversos juegos basados en la extracción, por parte de los jugadores, de números aleatorios (resultado de cierta variable aleatoria) cuya suma se pretende que se aproxime lo más posible, sin pasarse, a una cantidad prefijada. En estos juegos subyace un problema de parada óptima y cada jugador tiene como estrategia óptima fijar un cierto umbral de ambición antes del cual nunca debe conformarse con la suma acumulada y, por tanto, debe arriesgarse a efectuar nuevas extracciones.

En esta línea estamos trabajando desde hace poco tiempo y todavía no hemos sometido los resultados a la consideración de ninguna revista.

3.6. LÍNEA 6: CUATERNIOS DE HAMILTON GENERALIZADOS.

Estudiamos generalizaciones de los cuaternios de Hamilton utilizando como anillo subyacente \mathbb{Z}_n o, más generalmente, producto de anillos locales. Esta generalización de los cuaternios, que Hamilton definió sobre un espacio vectorial real de dimensión 4, resulta muy natural:

Sea R un anillo conmutativo con identidad y $H(R)$ el módulo libre de R del rango 4 con base $\{1, i, j, k\}$. Es decir,

$$H(R) := \{x_0 + x_1i + x_2j + x_3k : x_0, x_1, x_2, x_3 \in R\}.$$

Ahora, sean $a, b \in R$ y consideremos una multiplicación asociativa en $H(R)$ de acuerdo con las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} i^2 &= a, \\ j^2 &= b, \\ ij &= -ji = k. \end{aligned}$$

Así, obtenemos un anillo unitario (*anillo de cuaternios de Hamilton generalizados sobre R*) que se denotará por $\left(\frac{a,b}{R}\right)$.

Aunque la naturaleza de esta línea es en apariencia eminentemente algebraica, las herramientas que se utilizan son de teoría elemental de números y es prácticamente el único hilo activo que se mantiene en esta disciplina. Esta línea se desarrolla en colaboración con los profesores Oller-Marcén y Celino Miguel (Universidade da Beira Interior) y de ella se han derivado dos publicaciones: [45] y [63].

3.7. LÍNEA 7: GRAFOS CON VÉRTICES EN UN ANILLO.

Esta línea está a caballo entre el Álgebra y la Teoría de Grafos. El *modus operandi* en este contexto consiste en considerar un cierto subconjunto en un anillo, que constituye el conjunto de vértices del grafo, y definir una razonable relación de adyacencia para construir las aristas. El estudio de este tipo de grafos es relativamente reciente, iniciado en [87] por I. Beck en 1988, y se ha desarrollado en múltiples direcciones.

En este campo, y en colaboración con los mencionados Oller-Marcén y C. Miguel, hemos desarrollado dos aportaciones ([53] y [56]); ahora contamos también con la participación de Pascual Jara (Universidad de Granada).

3.8. LÍNEA 8: GRAFOS DESTRUCTIBLES.

Se pretende introducir y desarrollar un concepto de Teoría de Grafos que parece no tener estudios precedentes. Se trata del concepto de *Grafo Destructible* en diversos sentidos que generaliza tanto el concepto de grafo euleriano como el de grafo hamiltoniano. Hemos definido estos grafos como aquellos que admiten un camino (o circuito) de tal modo que todas las aristas del grafo son incidentes a algún vértice de tal camino (o circuito). De este modo se plasma y formaliza la idea de poder "destruir" cada arista del grafo desde algún vértice del camino (o circuito) incidente con ella. Y, de ahí, la denominación de esta clase de grafos que, aparentemente, no han sido estudiados hasta la fecha.

Esta línea de investigación se está desarrollando con la profesora de la Universidad de Lleida, Susana Clara López Masip, y de ella se ha derivado un trabajo presentado como ponencia en un congreso, [115].

4. LÍNEA 1: CONVOLUCIÓN INFIMAL SELECTIVA.

4.1. INTRODUCCIÓN

En el contexto de la optimización, y muy especialmente en el del análisis convexo, se considera el operador de la **Convolución infimal** que definimos a continuación.

Definición 4.1. Sean dos funciones $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Se denomina *Convolución Infimal* de F y G a la operación definida del modo siguiente:

$$(F \odot G)(x) := \inf_{y \in \mathbb{R}} \{F(x - y) + G(y)\} \quad (1)$$

Propiedades de este operador pueden consultarse en [136], [143] y [144].

Es fácil darse cuenta de que $(F(\mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}), \odot)$ es un semigrupo conmutativo, siendo $F(\mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}})$ el conjunto de las funciones de $\mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Además se cumple que para cualquier conjunto finito $A \subset \mathbb{N}$:

$$(\odot_{i \in A} F_i)(K) = \inf_{\substack{x_i = K \\ i \in A}} \sum_{i \in A} F_i(x_i). \quad (2)$$

Cuando las funciones se consideran restringidas a un cierto dominio $Dom(F_i) = [m_i, M_i]$, la definición anterior sigue siendo perfectamente válida redefiniendo $F_i(x) = +\infty$ si $x \notin Dom(F_i)$. En este caso, la definición equivalente puede expresarse del siguiente modo.

Definición 4.2.

$$(F_1 \odot F_2)(K) := \min_{\substack{x_1 + x_2 = K \\ m_1 \leq x_1 \leq M_1 \\ m_2 \leq x_2 \leq M_2}} (F_1(x_1) + F_2(x_2)) = \min_{\substack{m_1 \leq x \leq M_1 \\ m_2 \leq K - x \leq M_2}} ((F_1(x) + F_2(K - x))) \quad (3)$$

$$\Psi^A(K) := \odot_{i \in A} F_i(K) = \min_{\substack{x_i = K \\ i \in A \\ m_i \leq x_i \leq M_i}} \sum_{i \in A} F_i(x_i) \quad (4)$$

Así definida, Ψ^A es la Convolución Infimal de varias funciones de costo de producción y $\Psi^A(K)$ representa el costo conjunto para el nivel de producción K cuando ésta se reparte entre las distintas unidades del modo más eficiente posible. Este concepto da pie a otro más realista como es el de permitir producir el *output* recurriendo únicamente a las unidades de producción más rentables; es decir, prescindir de aquellas cuya utilización en el proceso productivo supone incurrir en mayor coste que no usarlas. Esta es la idea motivadora de la introducción de un operador que hemos denominado: **Convolution infimal selectiva (SIC)**.

4.2. TRABAJOS PREVIOS.

4.2.1. CONVOLUCIÓN INFIMAL.

Hemos realizado varios trabajos relacionados con este operador. El primer trabajo [2], inspirado en aquel momento en el concepto de térmica equivalente, describe la expresión de la convolución infimal de polinomios de segundo grado restringidos a dominios positivos $D_i = [0, \infty]$. En dicho trabajo utilizábamos la denominación de equivalente minimizadora en lugar de convolución infimal. La idea de la térmica equivalente había sido considerada por El-Hawary ²(ver [101]), aunque obviando la restricción de positividad de las potencias.



Mohamed E. El-Hawary (1943-2019).

Teorema 4.1. Sean $F_i(x) := \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2$ con $i = 1, \dots, m$ y $\gamma_i > 0$. Supongamos los coeficientes β_i ordenados de forma creciente y consideremos los coeficientes:

$$\delta_k = \frac{1}{2} \left[\beta_k \sum_{i=1}^k \frac{1}{\gamma_i} - \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i}{\gamma_i} \right].$$

La equivalente minimizadora es la función polinómica de segundo grado a trozos siguiente

$$\Psi(\xi) = \tilde{\alpha}_k + \tilde{\beta}_k \xi + \tilde{\gamma}_k \xi^2 \text{ if } \delta_k \leq \xi < \delta_{k+1}$$

$$\tilde{\gamma}_k = \frac{1}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{\gamma_i}}; \tilde{\beta}_k = \tilde{\gamma}_k \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i}{\gamma_i}; \tilde{\alpha}_k = \sum_{i=1}^m \alpha_i + \frac{\tilde{\beta}_k^2}{4\tilde{\gamma}_k} - \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{4\gamma_i}$$

Además, es de clase C^1 y $\Psi'(\delta_k) = \beta_k$ for $i = 1, \dots, m$.

²Mohamed E. El-Hawary (1943-2019) fue un científico canadiense de origen egipcio. Fue matemático, ingeniero eléctrico, investigador de inteligencia computacional y profesor de ingeniería eléctrica e informática en la Universidad de Dalhousie

Ejemplo 4.1. Consideraremos la equivalente minimizadora (convolución infimal) de las cuatro funciones de costo siguientes:

$$F_1(x) := x + 4x^2; F_2(x) := 2x + 3x^2; F_3(x) := 3x + 2x^2; F_4(x) := 4x + x^2.$$

Los δ_i del teorema anterior son: $0 < \frac{1}{8} < \frac{5}{12} < 23/24$

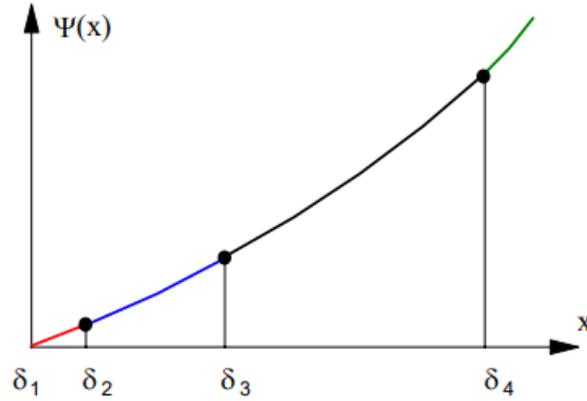


Figura 1: $F_1 \odot F_2 \odot F_3 \odot F_4$

Tras realizar algunos trabajos, considerando restricciones cada vez más generales, culminamos en [159] el estudio de la convolución infimal de funciones cuadráticas restringidas a intervalos. En dicho trabajo presentamos un algoritmo de complejidad $\mathcal{O}(n \log(n))$ que construye (de modo simbólico exacto) la convolución infimal de n funciones polinómicas de segundo grado convexas, $f_i(x) = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2$, restringidas a intervalos $[m_i, M_i]$. Hay que decir en este punto que la convolución infimal pierde, en general, su carácter C^1 , pero mantiene la continuidad.

Amén de lo dicho, también se realizaron trabajos de microeconomía como [50], donde se construyó la convolución infimal de funciones de costo más generales. Asimismo, en [18], realizamos el estudio de la convolución infimal de funciones cuadráticas a trozos que modelizan las funciones de costo de producción de centrales multifuel.

4.2.2. CONVOLUCIÓN INFIMAL SELECTIVA.

Este operador lo introdujimos formalmente en [58]. La idea subyacente que lo inspira es el problema del *Unit Commitment*, en el marco del despacho económico. A continuación tenemos la definición formal y resultados que se derivan de ella.

Definición 4.3. Sean dos funciones $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Llamaremos *Convolución Infimal Selectiva* de F and G a la operación definida del modo siguiente:

$$(F \otimes G)(x) := \min\{F(x), G(x), (F \odot G)(x)\} \quad (5)$$

Es fácil darse cuenta de que este operador es conmutativo y asociativo y en consecuencia se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.1. $(F(\mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}), \otimes)$ es un semigrupo conmutativo.

La siguiente proposición expresa el modo de actuar del operador sobre una familia de más de dos funciones.

Proposición 4.2. Sea $A \subset \mathbb{N}$ y $G_i : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ para cada $i \in A$. Se cumple que:

$$\bigotimes_{i \in A} G_i(x) = \min_{B \in P(A)} \left(\bigodot_{i \in B} G_i(x) \right) = \min_{B \subseteq A} \left\{ \bigodot_{i \in B} G_i(x) \right\} \quad (6)$$

donde $P(A)$ representa el conjunto de partes no vacías de A .

Observemos, a continuación, que la SIC representa la solución de una familia uniparamétrica de problemas de programación entero-mixta.

Proposición 4.3. Sean $\{F_i\}_{i \in A} \subset F(\mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}})$. Se cumple que:

$$\bigotimes_{i \in A} F_i(\xi) = \inf_D \sum_{i \in A} z_i \cdot F_i(x_i) \quad (7)$$

donde

$$D = \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^n \times \{0, 1\}^n \mid \sum_{i \in A} z_i \cdot x_i = \xi\} \quad (8)$$

En otros términos, tendremos el siguiente resultado.

Proposición 4.4. Sean $\{F_i\}_{i=1}^n$ con dominios respectivos $[m_i, M_i]$, entonces

$$\Psi(x) := \left(\bigotimes_{i=1}^n F_i \right) (x) := \min_{\substack{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = x \\ x_i \in [m_i, M_i] \\ \alpha_i \in \{1, 0\}}} \sum_{i=1}^n F_i(x_i)$$

Asimismo, en [58], se presentó un algoritmo para el cálculo simbólico/exacto de la convolución infimal selectiva de funciones afines ($F_i(x) = a_i + b_i x$) y cuadráticas ($F_i(x) = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2$, con $\gamma_i > 0$). En ambos casos, el algoritmo de cálculo presentado consta de cuatro partes:

Parte 1: Cálculo de la convolución infimal de dos funciones.

Parte 2: Cálculo del mínimo de una lista de funciones definidas a trozos.

Parte 3: Cálculo de la convolución infimal de dos funciones definidas a trozos.

Parte 4: Cálculo de la convolución infimal selectiva de dos funciones.

4.3. TRABAJOS EN PERSPECTIVA.

4.3.1. COMPLEJIDAD DEL CÁLCULO DE LA CONVOLUCIÓN INFIMAL SELECTIVA

Las proposiciones 4.3 y 4.4 podrían sugerir que el operador de SIC es poco práctico desde el punto de vista computacional, pues resolver un problema particular de programación entero-mixta se estrella con la explosión combinatoria y el consiguiente tiempo

no polinomial requerido para su cálculo exacto. Más aun, debe tenerse en cuenta que el operador no resuelve un problema sino una familia uniparamétrica de problemas resultante al variar el valor de la restricción de la suma de las variables. Sin embargo, cuando las funciones involucradas permiten el cálculo simbólico de su convolución infimal (como es el caso de las cuadráticas o lineales) la asociatividad del operador permite albergar esperanzas de que puedan desarrollarse algoritmos de tiempo polinomial utilizando la idea desarrollada en [18] para el estudio de la convolución infimal de funciones cuadráticas a trozos. La razón para el optimismo descansa en la idea de que $F \otimes G$ es una función convexa a trozos (3 trozos como máximo) y que la convolución infimal de dos funciones convexas a trozos (con n y m trozos respectivamente) presenta muchos menos de los $n \times m$ trozos que cabría esperar, con el consiguiente alivio de la explosión combinatoria.

Así, por ejemplo, el test de Viviani [18] muestra que la convolución infimal de 10 funciones cuadráticas a trozos, una con dos trozos y con 3 trozos las nueve restantes, presenta solamente 50 trozos, muchos menos, obviamente, que los $2 * 3^9 = 39366$ que la estimación combinatoria más pesimista podría estimar. Y, asimismo, la convolución infimal selectiva de esas mismas 10 funciones presenta tan solo 90 trozos, frente al aproximadamente millón que podría esperarse.

Pretendemos probar que la construcción de la convolución infimal selectiva de n funciones cuadráticas convexas o lineales tiene complejidad computacional polinomial. Tenemos algunos resultados que se aproximan a ello pero no se ha logrado concretar el orden de complejidad.

Proposición 4.5. Sean $a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$ y sean $\{F_i\}_{i=1}^n$ con $F_i(x) = a_i + b_i x$ funciones definidas en el intervalo $[m_i, M_i]$ y supongamos que $\min\{F_i\}_{i=1}^n$ presenta $\mathfrak{N}(n)$ trozos, entonces el número de operaciones elementales necesarias para calcular $\min\{F_i\}_{i=1}^n$ es

$$\mathcal{O}(\mathfrak{N}(n)n^2)$$

Proposición 4.6. Sean $a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$ y sean $\{F_i\}_{i=1}^n$ con $F_i(x) = a_i + b_i x$ funciones definidas en intervalos de la forma $[m_i, M_i]$ y supongamos que su SIC tiene $\phi(n)$ trozos, el número de operaciones necesarias para calcularla es

$$\mathcal{O}(\phi(n)^4)$$

Este resultado queda a merced del número de trozos de que consta la expresión de la SIC. Este número depende fuertemente de la familia concreta que se considere. Pero, en el peor de los casos, parece que $\phi(n) \in \mathcal{O}(n^2)$, de modo que podemos plantear la conjetura siguiente.

Conjetura 4.1. Sean $a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$ y sean $\{F_i\}_{i=1}^n$ con $F_i(x) = a_i + b_i x$ funciones definidas en el intervalo $[m_i, M_i]$ el número de operaciones necesarias para calcular su convolución infimal selectiva es

$$\mathcal{O}(n^8)$$

Todos los resultados anteriores, así como la conjetura final, se mantienen cuando las funciones, en lugar de ser afines, son cuadráticas convexas.

5. LINEA 2: SUCESIONES DE FUNCIONES RECURRENTEs, $F_n : \{0, \dots, n\} \mapsto \mathbb{R}$.

5.1. INTRODUCCIÓN

La presente línea tiene su génesis en una técnica novedosa, basada en la resolución de ecuaciones diferenciales, presentada en [60], para el estudio del comportamiento asintótico de la solución de problemas de parada óptima con n etapas cuando n tiende a infinito.

Antes que nada, recordaremos brevemente en qué consiste un problema de parada óptima.

PROBLEMAS DE PARADA ÓPTIMA.

Definición 5.1. *Un problema de parada óptima es un problema de decisión que se define a partir de las 2 siguientes sucesiones:*

- Una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n cuya distribución conjunta es conocida,
- Sucesión de funciones de pago $y_i(X_1, \dots, X_i)$,

y las 3 siguientes reglas:

- Se observan secuencialmente las variables aleatorias $\{X_i\}_{i=1}^n$.
- Tras la observación de cada variable, el decisor puede optar entre PARAR y CONTINUAR.
- Si el decisor PARA tras la observación de la variable X_i , recibe el pago $y_i(X_1, \dots, X_i)$.

y el **OBJETIVO** es:

- Encontrar una regla de parada que maximice la esperanza de ganancia.

CASO PARTICULAR: VARIABLES DE BERNOULLI INDEPENDIENTES.

Consideraremos el caso particular en el que las variables X_i son independientes de Bernoulli con $p_i = P(X_i = 1)$ y las funciones de pago

$$y_i(X_i) = X_i \cdot \mathbf{P}_i.$$

La programación dinámica permite resolver de modo sencillo el problema considerando la función $E(k)$ que representa la esperanza de ganancia cuando en la etapa k -ésima rechazamos el pago y decidimos continuar y observar la variable X_{k+1} .

$$E(k) = p_{k+1} \max \{ \mathbf{P}_{k+1}, E_n(k+1) \} + (1 - p_{k+1})E(k+1); E(n) = 0$$

Una estrategia que acepta el pago cuando $\mathbf{P}_k > E(k)$ es óptima y la esperanza de ganancia es $E(0)$.

Llamaremos conjunto de parada óptima al formado por los valores de k para los que $\mathbf{P}_k > E(k)$; es decir aquellas etapas en las que es preferible aceptar el pago que continuar.

$$\text{ConjuntoDeParadaOptima} := \{k : \mathbf{P}_k > E(k), k = 1, \dots, n\}$$

Ejemplo 5.1. $n = 100$ $p_k = 1/k$ y $\mathbf{P}_k = 10 \sin(\frac{k}{20})^2$

$$\text{ConjuntoDeParadaOptima} = [18, 53] \cup [73, 99]$$

$$\text{Esperanza de ganancia} = E(0) = 6.01433\dots$$

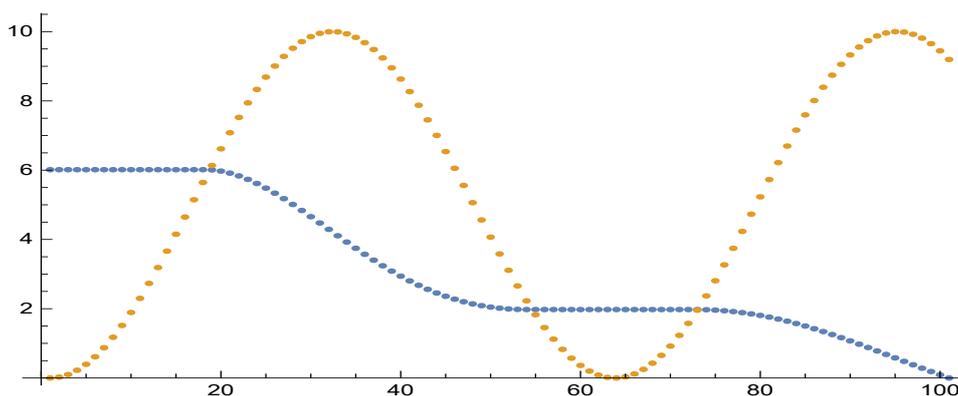


Figura 2: $E(k)$ (azul) y \mathbf{P}_k (naranja) en el Ejemplo 5.1

ESTRATEGIAS DE UMBRAL.

Diremos que un problema de parada óptima tiene estrategia óptima de umbral (problema monótono) si el conjunto de parada óptima es de la forma $[k, n]$ (que no es el caso del ejemplo 5.1). En estos casos resulta efectivo considerar la función $F(k)$ que representa la esperanza de ganancia cuando utilizamos k como umbral, la cual obedece a la recurrencia siguiente:

$$F_n(k) = p_n(k+1) \cdot \mathbf{P}_{k+1} + (1 - p_n(k+1)) \cdot F(k+1); F(n) = 0.$$

Con esto, la esperanza de ganancia y el umbral óptimo para el problema con n etapas serán:

$$\mathbb{E}_n = \max \{ F_n(k) : k = 0, \dots, n \}$$

$$\text{UmbralÓptimo} = \operatorname{argmax}\{F_n(k) : k = 0, \dots, n\}$$

Si consideramos una familia de problemas monótonos variando n y la consiguiente sucesión de funciones $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con dominios $[0, \dots, n]$ se plantea el problema de estudiar el comportamiento asintótico del umbral y de la probabilidad de éxito al tender n a infinito. Llamando k_n al umbral óptimo y \mathbb{E}_n a la esperanza de ganancia se trata por tanto de investigar los siguientes límites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_n$$

Para ello resultan cruciales los dos resultados siguientes:

Proposición 5.1. *Sea $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones reales definidas sobre $\{0, 1, \dots, n\}$ y sea $\mathcal{M}(n)$ un valor para el cual F_n alcanza su máximo valor. Si la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dadas por $f_n(x) := F_n(\lfloor nx \rfloor)$ converge uniformemente en $[0, 1]$ a una función f continua en $[0, 1]$ y θ es el único máximo global de f en $[0, 1]$, entonces*

i) $\lim_n \mathcal{M}(n)/n = \theta.$

ii) $\lim_n F_n(\mathcal{M}(n)) = f(\theta).$

iii) Si $\mathfrak{M}(n) \sim \mathcal{M}(n)$ entonces $\lim_n F_n(\mathfrak{M}(n)) = f(\theta).$

Proposición 5.2. *Sea $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones reales definidas sobre $\{0, 1, \dots, n\}$ y sea $\mathcal{N}(n)$ el único entero para el que se cumple*

$$\frac{\mathcal{N}(n)}{n} < F_n(\mathcal{N}(n))$$

$$\frac{\mathcal{N}(n) + 1}{n} \geq F_n(\mathcal{N}(n) + 1)$$

Si $f_n(x) := F_n(\lfloor nx \rfloor)$ converge uniformemente en $[0, 1]$ a una función f continua en $[0, 1]$ y θ es la única solución de la ecuación $x = f(x)$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(n)/n = \theta = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\mathcal{N}(n)).$$

Cuando la recurrencia que define F_n puede ser resuelta explícitamente, suele resultar sencillo el cálculo del límite de la sucesión f_n , así como la verificación de la uniformidad de la convergencia. La presente línea de investigación se ocupa precisamente del análisis de este límite, especialmente cuando la resolución explícita no es posible, como solución de un ecuación diferencial lineal de primer orden. Existen algunos trabajos aislados (ver [137], [138], [86] y [142]) en los que se ha hecho uso de las ecuaciones diferenciales para estudiar valores asintóticos en generalizaciones del problema de la secretaria, pero no se ha utilizado ninguna idea de forma sistemática.

5.2. TRABAJOS PREVIOS.

En [60], se presentaron los dos siguientes resultados que permite obtener el límite de $f_n(x) := F_n(\lfloor nx \rfloor)$, cuando F_n está definida de modo recurrente, con la asunción de que existe y de que la convergencia es uniforme en $[0, 1]$.

Proposición 5.3. Sean $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones de funciones

$$F_n, G_n, H_n : \{0, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisfacen

$$\begin{aligned} F_n(k) &= G_n(k) + H_n(k)F_n(k+1), \\ F_n(n) &= \mu_n. \end{aligned}$$

Además, para cada $x \in [0, 1]$, definimos

$$f_n(x) := F_n(\lfloor nx \rfloor), h_n(x) := n(1 - H_n(\lfloor nx \rfloor)) \text{ y } g_n(x) := nG_n(\lfloor nx \rfloor).$$

Si se cumple las condiciones siguientes

- i) Las sucesiones $\{h_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen puntualmente en $(0, 1)$ y uniformemente en $[\varepsilon, \varepsilon']$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1$ a las funciones continuas $h(x)$ y $g(x)$, respectivamente.
- ii) La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0, 1]$ a una función continua f .

Entonces, $f(1) = \mu := \lim \mu_n$ y f satisface en $(0, 1)$ la siguiente ecuación diferencial

$$f'(x) = f(x)h(x) - g(x).$$

Proposición 5.4. Sean $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones de funciones

$$F_n, G_n, H_n : \{0, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisfacen

$$\begin{aligned} F_n(k) &= G_n(k) + H_n(k)F_n(k-1), \\ F_n(0) &= \mu_n. \end{aligned}$$

Además, para cada $x \in [0, 1]$, definimos

$$f_n(x) := F_n(\lfloor nx \rfloor), h_n(x) := n(1 - H_n(\lfloor nx \rfloor)) \text{ y } g_n(x) := nG_n(\lfloor nx \rfloor).$$

Si se cumple las condiciones siguientes

- i) Las sucesiones $\{h_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen puntualmente en $(0, 1)$ y uniformemente en $[\varepsilon, \varepsilon']$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1$ a las funciones continuas $h(x)$ y $g(x)$, respectivamente.
- ii) La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0, 1]$ a una función continua f .

Entonces, $f(0) = \mu := \lim \mu_n$ y f satisface en $(0, 1)$ la siguiente ecuación diferencial

$$f'(x) = -f(x)h(x) + g(x).$$

En general, la uniformidad de la convergencia puede ser difícil de establecer *a priori*; sin embargo, la naturaleza del problema, junto con una simple inspección de la evolución de la gráfica de $f_n(x)$ para valores moderadamente grandes de n , hace que la asunción de la uniformidad de la convergencia sea totalmente razonable e incluso el supuesto de que el límite de la función es de clase C^1 .

5.3. TRABAJOS EN PERSPECTIVA.

En lo que resta consideraremos la recurrencia hacia delante

$$\begin{aligned} F_n(k) &= G_n(k) + H_n(k)F_n(k+1), \\ F_n(n) &= \mu_n. \end{aligned}$$

de modo que cada resultado o conjetura tendrá su contrapartida para funciones definidas por recurrencia hacia atrás

$$\begin{aligned} F_n(k) &= G_n(k) + H_n(k)F_n(k-1), \\ F_n(0) &= \mu_n. \end{aligned}$$

La proposición 5.3 resulta muy útil para la resolución de muchos problemas donde, en efecto, no hay ninguna duda de que la convergencia de la sucesión f_n es uniforme en $[0, 1]$; sin embargo, esto constituye una debilidad desde el punto de vista del rigor matemático necesario, que debe ser solventada. Por otra parte, es fácil construir ejemplos donde, no solo esta convergencia no es uniforme, sino que las proposiciones anteriores no funcionan.

5.3.1. CONVERGENCIA PUNTUAL Y UNIFORME DE $F_n(\lfloor nx \rfloor)$ SOBRE COMPACTOS.

En determinadas condiciones, aunque la convergencia no sea uniforme en $[0, 1]$, la sucesión f_n parece que converge puntualmente en $(0, 1)$ a una función f de clase $C^1(0, 1)$ que satisface la ecuación diferencial de la proposición 5.3. Sin embargo no necesariamente satisface que la condición final sea $f(1) = \mu := \lim_n(\mu_n)$ y tenemos dos conjeturas al respecto.

Conjetura 5.1. Sean $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ funciones reales con dominio $\{0, 1, \dots, n\}$ y $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaciendo

$$F_n(k) = G_n(k) + H_n(k)F_n(k+1); F_n(n) = \mu_n.$$

Consideremos para cada $x \in [0, 1]$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) := F_n(\lfloor nx \rfloor), h_n(x) := n(1 - H_n(\lfloor nx \rfloor)) \text{ y } g_n(x) := nG_n(\lfloor nx \rfloor).$$

Si se cumplen las siguientes condiciones

1. Existe

$$\Theta := \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(n-k) \right)$$

2. $\{h_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen puntualmente en $(0, 1)$ y uniformemente en $[\varepsilon, \varepsilon']$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1$ a sendas funciones continuas h y g .

Entonces $\{f_n\}$ converge puntualmente en $(0, 1)$ y uniformemente sobre compactos a una función f de clase $C^1(0, 1]$ que satisface

- $f(1) = \Theta$
- $f'(x) = f(x)h(x) - g(x)$ en $(0, 1)$.

En principio podría parecer que no puede resultar muy práctico este resultado por la dificultad del cálculo del límite reiterado, Θ , en el supuesto de que exista, al no disponer de una fórmula explícita para $F_n(n - k)$. Sin embargo disponemos de la siguiente expresión formal

$$F_n(k) = \sum_{i=k}^{n-1} \left(\prod_{j=k}^{i-1} H_n(j) \right) G_n(i) + \mu_n \prod_{j=k}^{n-1} H_n(j)$$

que en casos como el ejemplo siguiente nos permite calcularlo.

Ejemplo 5.2. Consideremos

$$F_n(k) = G_n(k) + H_n(k)F_n(k + 1); F_n(n) = 1$$

donde

$$G_n(k) = \left(\frac{k}{n} \right)^n + \frac{1}{k+n}; H_n(k) = \frac{k}{k+1}.$$

$$F_n(k) = \sum_{i=k}^{n-1} \left(\prod_{j=k}^{i-1} H_n(j) \right) G_n(i) + \mu_n \prod_{j=k}^{n-1} H_n(j)$$

$$\sharp(k) := \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(n - k) = \frac{e^{-k} (e^{k+1} - 1)}{e - 1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sharp(k) = \frac{e}{e - 1}$$

$$-g(x) + h(x)y(x) = y'(x) \text{ con } y(1) = \frac{e}{e - 1}$$

$$f(x) = \frac{x(-(e - 1) \log(2x) + (e - 1) \log(x + 1) + e)}{e - 1}$$

$$f(x) = \frac{ex}{e - 1} - x \log(2x) + x \log(x + 1)$$

Conjetura 5.2. En las condiciones de la conjetura 5.1, $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[\epsilon, 1]$ para todo $\epsilon \in (0, 1)$ si y solo si $\Theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$.

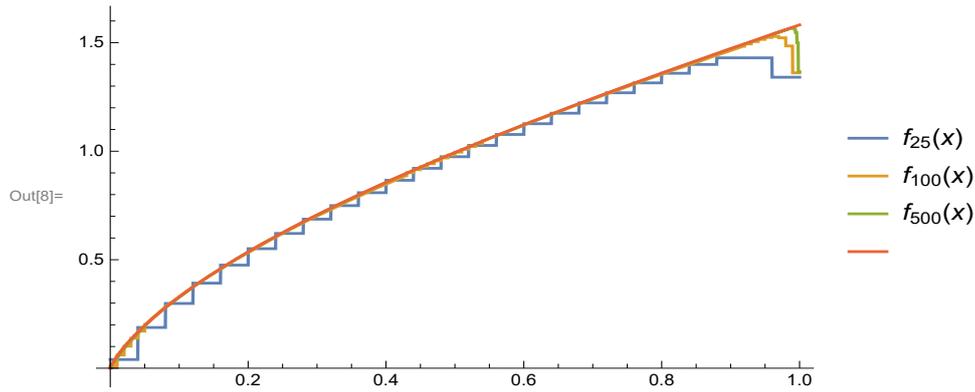


Figura 3: $f_n(x) = F_n(\lfloor nx \rfloor)$ del ejemplo 5.2 para $n \in \{25, 100, 500\}$ y su límite $f(x)$.

• **LÍMITE INDEPENDIENTE DE $F_n(n) = \mu_n$.** Existe una interesante situación que merece un estudio aparte, como es el caso en el que f_n converge a una función f que es independiente de los valores finales, μ_n , de la recurrencia. En este caso, tenemos la siguiente conjetura.

Conjetura 5.3. Sean $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ funciones reales con dominio $\{0, 1, \dots, n\}$ y $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaciendo

$$F_n(k) = G_n(k) + H_n(k)F_n(k + 1); F_n(n) = \mu_n.$$

Consideremos para cada $x \in [0, 1]$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) := F_n(\lfloor nx \rfloor), h_n(x) := n(1 - H_n(\lfloor nx \rfloor)) \text{ y } g_n(x) := nG_n(\lfloor nx \rfloor).$$

Si se cumplen las siguientes condiciones

1. $\{h_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen puntualmente en $(0, 1)$ y uniformemente en $[\varepsilon, \varepsilon']$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1$ a sendas funciones continuas h y g .
2. $0 > A = \lim_{x \rightarrow 1} h(x)(x - 1)$, $B = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)(x - 1)$ y $|\mu_n| < K$

Entonces $\{f_n\}$ converge puntualmente en $(0, 1)$ y uniformemente sobre compactos a una función f de clase $C^1(0, 1]$ que satisface

- $f(1) = \frac{B}{A}$
- $f'(x) = f(x)h(x) - g(x)$ en $(0, 1)$.

Además, la convergencia es uniforme en $(\varepsilon, 1]$ si y solo si $\lim_n \mu_n = \frac{B}{A}$.

Ejemplo 5.3. Consideremos la función recurrente siguiente

$$F_n(k) = G_n(k) + H_n(k)F_n(k + 1); F_n(n) = \frac{5}{2}$$

Donde $G_n(k) = \frac{2(k+2n)}{n(2-3k+3n)}$ and $H_n(k) = \frac{-3k+3n}{2-3k+3n}$.

$$g_n(x) := n \cdot G_n(\lfloor nx \rfloor), h_n(x) := n \cdot (1 - H_n(\lfloor nx \rfloor))$$

$$g(x) = \frac{4 + 2x}{3 - 3x}; h(x) = \frac{2}{3 - 3x}$$

la ecuación diferencial a resolver es $y'(x) = h(x)y(x) - g(x)$ o mejor dicho

$$3(-1+x)y'(x) = 2(2+x) - 2y(x)$$

con condición inicial $y(1) = 3$ donde $3 = B/A$ viene de

$$-\frac{2}{3} = A = \lim_{x \rightarrow 1} h(x)(x-1) \text{ and } -2 = B = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)(x-1)$$

$$f(x) = \frac{13 + 2x}{5}$$

La convergencia no es uniforme en $[0, 1]$ (Ver figura 4) ya que

$$\lim_n \mu_n = \frac{5}{2} \neq 3.$$

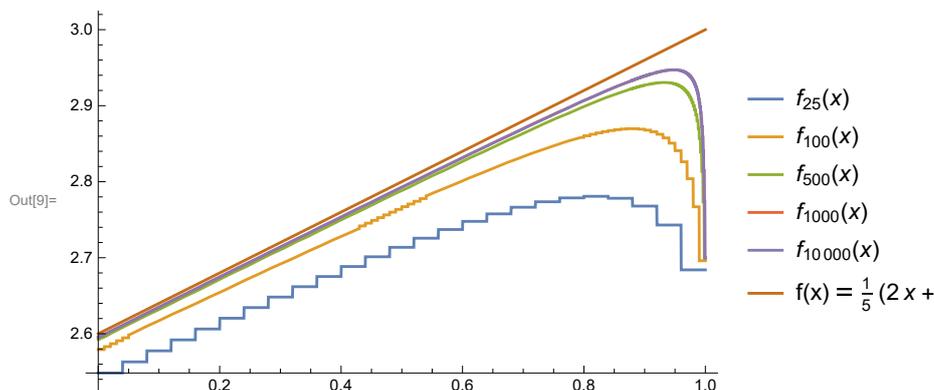


Figura 4: $f_n(x)$ para $n \in \{25, 100, 1000, 10000\}$ y su límite $f(x)$.

Ejemplo 5.4. Consideremos la misma definición recurrente de la función del ejemplo anterior pero con valor final $F_n(n) = 3$. El límite de la sucesión f_n es el mismo, pero en este caso la convergencia es uniforme (ver figura 5).

Esta es la situación especial que decíamos: la función límite de f_n (puntual en $(0,1)$) no depende para nada de μ_n , lo cual es razonable ya que la condición final $f(1) = B/A$ es la única compatible con la ecuación diferencial.

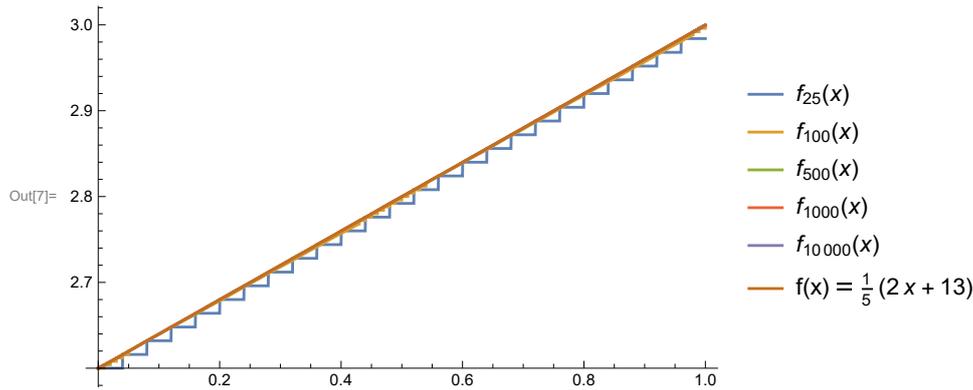


Figura 5: $f_n(x)$ para $n \in \{25, 100, 1000, 10000\}$ y su límite $f(x)$.

• **CONVERGENCIA UNIFORME EN $[0, \epsilon]$.** En ocasiones los problemas de convergencia de f_n están en el 0, con independencia de que los haya o no en el 1. En este caso tenemos la siguiente conjetura.

Conjetura 5.4. Sean $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ funciones reales con dominio $\{0, 1, \dots, n\}$ y $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaciendo

$$F_n(k) = G_n(k) + H_n(k)F_n(k + 1); F_n(n) = \mu_n.$$

Consideremos para cada $x \in [0, 1]$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) := F_n(\lfloor nx \rfloor), h_n(x) := n(1 - H_n(\lfloor nx \rfloor)) \text{ y } g_n(x) := nG_n(\lfloor nx \rfloor).$$

Si se cumplen las siguientes condiciones

1. Existe

$$\Theta := \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(n - k) \right)$$

2. $\{h_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen puntualmente en $(0, 1)$ y uniformemente en $[\epsilon, \epsilon']$ para todo $0 < \epsilon < \epsilon' < 1$ a sendas funciones continuas, h y g .

3. Existe θ tal que para todo k

$$\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(k)$$

Entonces $\{f_n\}$ converge puntualmente en $(0, 1)$ y uniformemente sobre compactos a una función f de clase $C^1(0, 1)$ que satisface

- $f(1) = \Theta$
- $f'(x) = f(x)h(x) - g(x)$ en $(0, 1)$.

Además la convergencia es uniforme en $[0, \epsilon]$ si y solo si $f(0) = \theta$.

Ejemplo 5.5. Consideremos la función recurrente siguiente

$$F_n(k) = G_n(k) + H_n(k)F_n(k + 1); F_n(n) = \frac{1}{2}$$

Donde $G_n(k) = \frac{1}{k+2}$ and $H_n(k) = \frac{k}{k+1}$.

$$g_n(x) := n \cdot G_n(\lfloor nx \rfloor), h_n(x) := n \cdot (1 - H_n(\lfloor nx \rfloor))$$

$$g(x) = \frac{1}{x}; h(x) = \frac{1}{x}$$

la ecuación diferencial a resolver es $y'(x) = h(x)y(x) - g(x)$, esto es

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} - \frac{1}{x}$$

con condición inicial

$$y(1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(n - k) \right) = \frac{1}{2}$$

cuya solución es

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2}$$

La convergencia es uniforme en $[\epsilon, 1]$ para todo ϵ pero no en $[0, 1]$ ya que

$$1 = f(0) \neq \lim_n (F_n(k)) = \frac{2k + 1}{2k + 2}.$$

La figura 6 ilustra lo dicho.

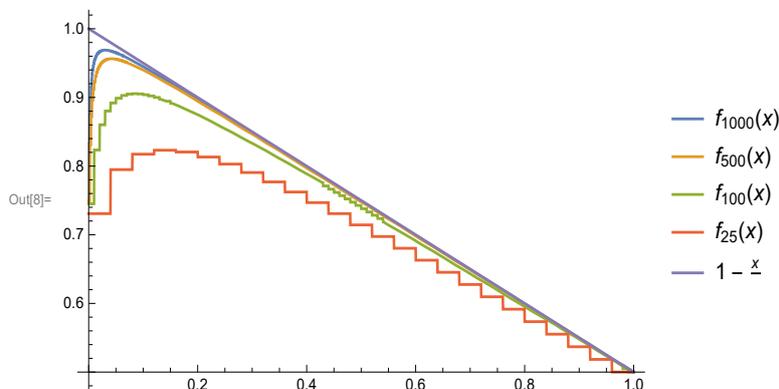


Figura 6: $f_n(x)$ para $n \in \{25, 100, 500, 1000\}$ y su límite $f(x)$.

5.3.2. FUNCIONES $F_n(k)$ DEFINIDAS A TROZOS.

En ocasiones, en especial cuando el problema subyacente presenta una estrategia óptima con dos o más umbrales, sería deseable disponer de un resultado similar a la Proposición 5.3 como es el siguiente.

Proposición 5.5. *Sea $\{\mathbf{s}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $\mathbf{s}_n \in \{0, \dots, n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{s}_n}{n} = \mathbf{s}$ y sean las sucesiones de funciones reales $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{G_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{G_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{H_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{H_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ con dominio $\{0, \dots, n\}$, satisfaciendo*

$$\begin{aligned} F_n(k) &= G_n^1(k) + H_n^1(k)F_n(k+1) \text{ si } k < \mathbf{s}_n \\ F_n(k) &= G_n^2(k) + H_n^2(k)F_n(k+1) \text{ si } \mathbf{s}_n \leq k < n \\ F_n(n) &= \mu. \end{aligned}$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= F_n(\lfloor nx \rfloor) \\ h_n^i(x) &:= n(1 - H_n^i(\lfloor nx \rfloor)) \\ g_n^i(x) &:= nG_n^i(\lfloor nx \rfloor). \end{aligned}$$

Si se cumplen las siguientes condiciones

- i) Las sucesiones $\{h_n^1\}$ y $\{g_n^1\}$ convergen puntualmente en $(0, \mathbf{s}]$ y uniformemente en $[\varepsilon, \mathbf{s}]$ para todo $0 < \varepsilon < \mathbf{s}$ a las funciones continuas $h^1(x)$ y $g^1(x)$, respectivamente.
- i) Las sucesiones $\{h_n^2\}$ y $\{g_n^2\}$ convergen puntualmente en $[\mathbf{s}, 1)$ y uniformemente en $[\mathbf{s}, \varepsilon]$ para todo $\mathbf{s} < \varepsilon < 1$ a las funciones continuas $h^2(x)$ y $g^2(x)$, respectivamente.
- ii) La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0, 1]$ a una función f continua.

Entonces, $f(1) = \mu$, f satisface en $[\mathbf{s}, 1]$ la ecuación diferencial

$$f'(x) = f(x)h^2(x) - g^2(x)$$

y f satisface en $(0, \mathbf{s}]$ la ecuación diferencial

$$f'(x) = f(x)h^1(x) - g^1(x)$$

Este resultado, cuya demostración sería análoga a la de [60], presenta la misma debilidad (asunción de la convergencia uniforme de f_n) y los retos planteados más arriba tendrán sus análogos en este contexto.

6. LÍNEA 3: VARIANTES DEL PROBLEMA DE LA SECRETARIA.

6.1. INTRODUCCIÓN.

El *problema de secretaria* es uno de los muchos nombres que recibe uno de los más famosos problemas de parada óptima. Este problema puede plantearse como sigue:

- Un empleador quiere contratar a la mejor secretaria de las n disponibles.
- Las candidatas son entrevistados de una en una en orden aleatorio.
- Una decisión sobre cada candidata se hará inmediatamente después de la entrevista.
- Una vez rechazada una candidata no puede ser llamada de nuevo.
- Durante la entrevista, el empleador solo es capaz de discriminar si la candidata es mejor que las anteriores.

Se trata de encontrar la estrategia óptima que maximiza la probabilidad de seleccionar la mejor candidata.

También puede plantearse como un problema de toma de decisiones en un juego con las siguientes reglas:

- ★ Disponemos de una urna con n objetos diferentes totalmente ordenados.

(Si $x \prec y$ diremos que y es mejor que x)

- ★ Los objetos son extraídos y mostrados en orden aleatorio.
- ★ Cada objeto debe ser seleccionado o rechazado antes de ser mostrado el siguiente.
- ★ Un objeto rechazado no puede ser seleccionado más adelante.
- ★ Sólo es posible discernir si un objeto es mejor que todos los anteriores.
- ★ Seleccionar el mejor objeto se considera ÉXITO y, en otro caso, FRACASO.

Este problema tiene una elegante solución. Dynkin³ [98] y Lindley⁴ [129] demostraron de forma independiente que la mejor estrategia es una denominada *de umbral* que consiste en rechazar aproximadamente las primeras $\lfloor n/e \rfloor$ candidatas entrevistadas y luego seleccionar la primera que sea mejor que todos las anteriores. Siguiendo esta estrategia, la probabilidad de seleccionar a la mejor candidata es al menos $1/e$. Esta solución fue refinada por Gilbert y Mosteller⁵ en [113], mostrando que $\left\lfloor (n - \frac{1}{2})e^{-1} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ es mejor aproximación para el umbral óptimo que $\lfloor n/e \rfloor$. Este problema y algunas generalizaciones se pueden resolver de manera directa mediante un teorema de F.T. Bruss (Odds-Theorem, [90]). Abundante información y referencias bibliografías sobre el tema se pueden encontrar en trabajos de Tomas S. Ferguson⁶ como son [103], [104] y [105].

³Eugene Borisovich Dynkin (1924–2014) fue un matemático soviético y estadounidense. Hizo contribuciones a los campos de la probabilidad y el álgebra.

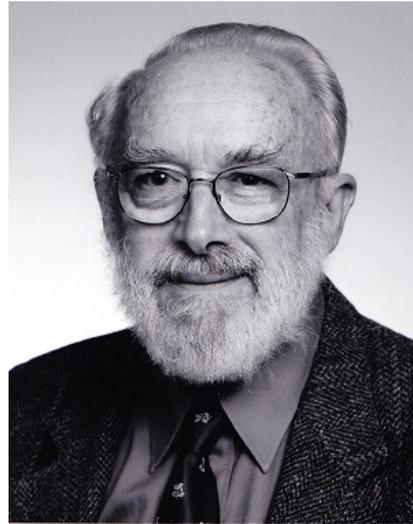
⁴Dennis Victor Lindley (1923–2013) fue un estadístico inglés experto en teoría de decisión.

⁵Charles Frederick Mosteller (1916–2006), fue uno de los más eminente probabilistas del siglo XX.

⁶Thomas Shelburne Ferguson (nacido el 14 de diciembre de 1929) es un matemático y estadístico estadounidense. Es profesor emérito de matemáticas y estadística en la Universidad de California



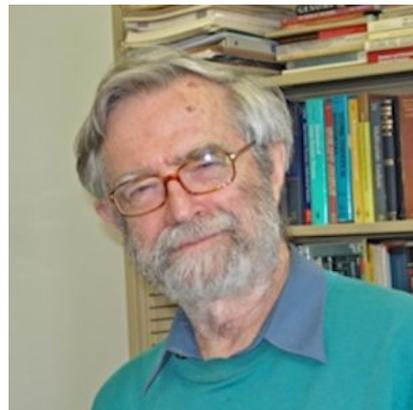
Eugene Borisovich Dynkin (1924–2014).



Dennis Victor Lindley (1923–2013).



Charles Frederick Mosteller (1916–2006).



Thomas Shelburne Ferguson (1929)

6.2. TRABAJOS PREVIOS.

En los últimos años, hemos realizado dos trabajos ([61] y [62]) en este contexto, integrantes del grupo OPyAP junto con Oller-Marcén. Asimismo, en [70], con la colaboración de Raquel García (Universidad de Salamanca), hemos presentado una aplicación a la economía. Por otra parte, en esta línea también se enmarca el trabajo en solitario, [60], mencionado con anterioridad.

6.2.1. LAS VARIANTES *mejor/peor* Y *postdoc*.

En [61] hemos estudiado dos variantes del problema de la secretaria. En la variante *mejor/peor* se considera como objetivo seleccionar la mejor o la peor secretaria y en la variante *postdoc* el objetivo es seleccionar la segunda mejor. En ambos casos la estrategia es de umbral y en ambas el umbral óptimo es $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. La probabilidad de éxito, en el caso

de la variante mejor/peor, es

$$\frac{\left\lfloor \frac{1+n}{2} \right\rfloor}{2 \left\lfloor \frac{1+n}{2} \right\rfloor - 1}$$

y la mitad de esto en el caso de la variante *postdoc*.

Asimismo, hemos estudiado la variante mejor/peor con pagos diferentes según el objeto seleccionado sea el mejor o el peor y, en ambas variantes, se ha investigado la consideración de costes/gratificaciones por cada entrevista realizada.

6.2.2. LAS VARIANTE *mejor/peor* Y *postdoc* CON NÚMERO DE CANDIDATAS ALEATORIO.

En [62] hemos estudiado las variantes indicadas anteriormente, considerando desconocido el número de candidatas aunque asumiendo que ese número es una variable Uniforme $[1, n]$ y Poisson de parámetro λ . En ambos casos, se establece que la estrategia óptima es de umbral y los siguientes resultados asintóticos.

Teorema 6.1. Denotaremos por $\mathcal{M}(n)$ el umbral óptimo en el problema de la secretaria mejor/peor con un número de candidatos que es el resultado de una variable aleatoria discreta uniforme $U[1, n]$ y $\mathbf{P}(n)$ a la probabilidad de éxito. Sea

$$\vartheta := -\frac{1}{2}W\left(-\frac{2}{e^2}\right) = 0.20318786\dots,$$

Se cumple lo siguiente:

i)

$$1 = \mathbf{P}(1) = \mathbf{P}(2) > \mathbf{P}(3) > \dots > \mathbf{P}(n) > \mathbf{P}(n+1) > \dots > 2(\vartheta - \vartheta^2) = 0.32380511\dots$$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{M}(n)}{n} = \vartheta.$

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(n) = 2(\vartheta - \vartheta^2).$

Teorema 6.2. Denotaremos por $\mathcal{M}(\lambda)$ el umbral óptimo en el problema de la secretaria mejor/peor con un número de candidatas que es el resultado de una variable aleatoria discreta Poisson de parámetro λ y $\mathbf{P}(\lambda)$ a la probabilidad de éxito. Se cumple lo siguiente:

i) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{M}(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{2}.$

iii) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\lambda) = \frac{1}{2}.$

6.2.3. EL PROBLEMA DE LAS SECRETARIAS GEMELAS.

En [60] he estudiado el problema de la secretaria considerando que hay n parejas de secretarias gemelas o, en otros términos, el problema de decisión descrito como sigue.

- Disponemos de una urna con $2n$ objetos; n diferentes totalmente ordenados y una copia de cada uno de ellos.
- Los objetos son mostrados en orden aleatorio.
- Cada objeto debe ser seleccionado o rechazado antes de ser mostrado el siguiente.
- Solo es posible discernir si un objeto es mejor o igual que todos los anteriores y si la copia del objeto mostrado ha sido mostrada anteriormente.
- Un objeto rechazado no puede ser seleccionado más adelante.
- Seleccionar una de copia del mejor objeto se considera ÉXITO y, cualquier otra elección, FRACASO.

En esta variante, cada objeto tiene una copia idéntica y el objetivo es seleccionar una copia del mejor candidato. Este problema fue introducido en 2011 por Garrod en su tesis doctoral ([108]) y puede verse también en [109]. En 2015, Vardi [165, 166], de forma independiente, abordó el mismo problema. Tanto Garrod como Vardi abordan el problema con técnicas combinatorias desde la perspectiva de conjuntos parcialmente ordenados. Más recientemente, en [60], introduzco un nuevo método basado en el uso de la programación dinámica y ecuaciones diferenciales para el estudio asintótico (ver proposiciones 5.4 y 5.3 expuestas en la descripción de línea de investigación anterior).

En este problema, la estrategia óptima es, al igual que en el problema de la secretaria, estrategia de umbral. Aquí, un buen candidato debe entenderse como un maximal (mejor que todos los inspeccionados anteriormente) cuyo gemelo ya ha sido inspeccionado; huelga decir que seleccionar un objeto, cuyo gemelo no ha sido entrevistado, nunca puede constituir estrategia óptima. La estrategia óptima de umbral puede describirse como sigue:

Teorema 6.3. *Para el problema de las secretarias gemelas, si n es el número de objetos diferentes, entonces existe \mathbf{k}_n de tal modo que la siguiente estrategia es óptima*

1. Rechazar los primeros \mathbf{k}_n objetos diferentes
2. Después, aceptar el primer **buen candidato** que aparezca.

El umbral óptimo está dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{k}_n = \min \left\{ k : 5 - \frac{2n}{k} \geq \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} \right\}$$

En cuanto a los resultados asintóticos tenemos los siguiente:

Proposición 6.1. *Si \mathbf{k}_n es el umbral óptimo, entonces*

$$\lim_n \left(\frac{\mathbf{k}_n}{n} \right) = \vartheta := \frac{2}{W(2e^5)} = 0.4709265..$$

y denotando por \mathbf{P}_n la probabilidad de éxito usando el umbral \mathbf{k}_n , tenemos que

$$\lim_n \mathbf{P}_n = \frac{1}{3} \left(4\vartheta + 6\sqrt{1-\vartheta} + \left(\vartheta + 2\sqrt{1-\vartheta} - 2 \right) \log(\vartheta) - 4 \right) = 0.76797426\dots$$

6.2.4. UN PROBLEMA DE PARADA ÓPTIMA EN ECONOMÍA.

En [70], hemos considerado una variante del Problema de la Secretaria, aplicada a un problema de economía donde una firma inversora debe decidir si invierte o no, y qué cantidad, en proyectos que se le presentan secuencialmente, teniendo en consideración que solamente con el mejor proyecto se puede conseguir el retorno de la inversión y una rentabilidad positiva.

Se han analizado y comparado diversas situaciones atendiendo a distintas funciones de utilidad del capital para la firma inversora.

Considerando la función Ψ , que representa la utilidad esperada, cuando se realiza una inversión con probabilidad de éxito p en la cantidad óptima, según el modelo de utilidad considerada, se tiene el siguiente programa dinámico

$$\mathbb{U}_n(r) = \frac{1}{r+1} \cdot \text{máx} \left[\Psi \left(\frac{r+1}{n} \right), \mathbb{U}_n(r+1) \right] + \frac{r}{r+1} \cdot \mathbb{U}_n(r+1); \quad \mathbb{U}_n(n) = \mathcal{U}(1)$$

Donde $\mathbb{U}_n(r)$ representa la utilidad esperada al rechazar el proyecto r -ésimo y, en particular, $\mathbb{U}_n(0)$ es la utilidad esperada a priori.

La estrategia óptima es de tipo umbral y la recurrencia que calcula la utilidad esperada al usar r como umbral es la siguiente

$$\bar{\mathbb{U}}_n(r) = \frac{1}{r+1} \cdot \Psi \left(\frac{r+1}{n} \right) + \frac{r}{r+1} \cdot \bar{\mathbb{U}}_n(r+1); \quad \bar{\mathbb{U}}_n(n) = \mathcal{U}(1)$$

Utilizando la metodología introducida en [60], se han obtenido los umbrales óptimos asintóticos y la probabilidad asintótica de éxito para diferentes modelos de utilidad: logarítmica, lineal, raíz cuadrada, exponencial, etc.

6.3. TRABAJOS EN PERSPECTIVA.

6.3.1. REVISIÓN DE PROBLEMAS CLÁSICOS.

Pretendemos hacer una revisión de distintas variantes del problema de la secretaria que aparecen en la literatura, utilizando la metodología introducida en [60], que hemos comentado en la línea 2.

Son muchas las variantes y generalizaciones del problema de la secretaria cuya estrategia óptima es de umbral. En estos casos la función que proporciona la probabilidad de éxito utilizando un cierto umbral puede definirse de modo recurrente y es ahí donde la metodología introducida en [60] puede servir para el estudio de los valores asintóticos del umbral óptimo y de la probabilidad de éxito. Veamos algunos ejemplos:

- **EL PROBLEMA DE LA SECRETARIA CON PAGOS DIFERENTES POR ACERTAR/FALLAR/NO SELECCIONAR.** Consiste en considerar el problema de la secretaria en el que la recompensa es 1 si el jugador selecciona el mejor objeto, -1 si selecciona a algún objeto que no es el mejor y 0 si no se selecciona ningún objeto. Más generalmente podemos plantear que se recibe un pago α por acertar el mejor objeto, una penalización β por seleccionar erróneamente un objeto y una penalización γ por no seleccionar ningún objeto. El caso particular de $\alpha = \beta = 1$ y $\gamma = 0$ aparece estudiado en [105].
- **PROBLEMA DE LA SECRETARIA CON EL EMPLEO INCIERTO** . Consiste en considerar el clásico problema de la secretaria con la posibilidad adicional de que una candidata observada no esté disponible (la candidata rechaza la oferta con probabilidad conocida). Si este es el caso, no se permite seleccionar a la candidata y las entrevistas continúan. Esta variante aparece tratada en [157].
- **NÚMERO ALEATORIO DE CANDIDATAS.** El número de objetos es desconocido, pero se asume que es aleatorio con la distribución de probabilidad conocida. Las reglas son como en el problema estándar, pero si el jugador rechaza un objeto y resulta que no hay más, pierde. Cuando la distribución considerada es uniforme discreta en $\{1, \dots, n\}$ puede usarse la metodología de referencia. Este problema está tratado en [141] y [145].
- **SELECCIÓN DE UNO DE LOS DOS MEJORES.** Se trata de seleccionar el mejor o el segundo mejor objeto recibiendo en cada caso pagos respectivos $U(1)$ y $U(2)$. Este problema aparece tratado en [113] y [118].
- **EL PROBLEMA DE LA SECRETARIA CON COSTE POR ENTREVISTA.** Se considera que la realización de cada entrevista tiene un coste de c/n unidades monetarias y se gratifica el éxito con una unidad monetaria. Este problema aparece tratado en [104].
- **EL PROBLEMA DE SELECCIONAR LOS r MEJORES.** También parece que puede ser usada la nueva metodología en problemas donde aparecen varios umbrales como es el caso del problema de seleccionar los 2 mejores objetos o, más generalmente, los r mejores objetos. Este problema aparece tratado en [92].
- **EL PROBLEMA DE LA SECRETARIA CON VARIAS SELECCIONES.** En esta variante se permite al entrevistador seleccionar varias candidatas, siendo el objetivo que alguna de ellas sea la mejor. Este problema fue tratado en [133] y presenta tantos umbrales como selecciones son permitidas.

6.3.2. PROBLEMA DE LA SECRETARIA CON DOS ENTREVISTAS.

Una variación muy natural del problema de las secretarías gemelas es sustituir la duplicidad de objetos por duplicidad de entrevistas. Estamos realizando un trabajo donde se consideran dos variantes, en una se considera que cada secretaria es entrevistada dos veces y en la otra que el empleador tiene la posibilidad de entrevistar en dos ocasiones

a una sola secretaria de su elección. En ambos casos la segunda entrevista se realiza tras volver la secretaria a un lugar aleatorio en la cola de candidatos. La naturaleza de la primera variante es muy similar a la variante de las secretarías gemelas; pero la segunda presenta mayor dificultad conceptual pues la estrategia óptima consiste en la utilización de dos umbrales, en cierto sentido similar al problema de la secretaria con dos oportunidades de selección. Estas variantes pueden enunciarse como sigue:

Variante 1

- 1. Disponemos de una urna con n objetos diferentes totalmente ordenados.
- 2. Los objetos de la urna son extraídos y mostrados en orden aleatorio.
- 3. Un objeto rechazado por primera vez es retornado a la urna.
- 4. Cada objeto debe ser seleccionado o rechazado antes de ser mostrado el siguiente.
- 5. Solo es posible discernir si un objeto es mejor o igual que todos los anteriores y si el objeto es mostrado por primera o segunda vez.
- 6. Un objeto rechazado por segunda vez ya no puede ser seleccionado más adelante.
- 7. Seleccionar el mejor objeto se considera ÉXITO y, cualquier otro, FRACASO.

Variante 2

Es el resultado de sustituir en la variante 1 el ítem 3 por

- 3' El empleador puede devolver a la urna un objeto de su elección tras ser inspeccionado.

A continuación se muestran las probabilidades de éxito, utilizando la estrategia óptima, en las dos variantes introducidas junto con las de la variante de las secretarías gemelas y las del problema de la secretaria clásico.

n	2	3	100	1000	10000	$\rightarrow \infty$
Classic	0.5	0.5	0.3710...	0.3681...	0.3679...	0.367879...
Returning	0.833...	0.833...	0.7697...	0.7681...	0.76799...	0.767974...
V – 1	0.75	0.75	0.6548...	0.6524...	0.65223...	0.652204...
V – 2	0.75	0.6666...	0.4924...	0.4889...	0.48856...	0.488521...

6.3.3. PROBLEMA DE LA SECRETARIA CON MUESTREO.

Una variante introducida muy recientemente en [107] consiste en permitir observar una muestra de objetos, antes de comenzar las inspecciones de los objetos seleccionables. Naturalmente, disponer de una muestra de objetos puede proporcionar una información que, aprovechada adecuadamente, aumenta la probabilidad de éxito. Es fácil darse cuenta de que si la muestra es muy grande y en el proceso de entrevistas (inspecciones) aparece un objeto mejor que los anteriores, incluida la muestra, la probabilidad de éxito seleccionándolo es mayor que si no dispusiéramos de la información de que supera a los objetos de la muestra auxiliar. En el mencionado trabajo se consideró una información completa en el sentido de que el decisor es capaz de discernir la posición relativa de cada candidato lo que da lugar a una estrategia con tantos umbrales como el tamaño de la muestra auxiliar. El trabajo presenta especialmente simulaciones

computacionales que permiten hacer ciertas conjeturas pero deja puntos interesantes por abordar. Es nuestro propósito estudiar el problema cuando se dispone de información limitada en cuanto a los elementos de la muestra, en concreto cuando solamente se es capaz de recordar el mejor objeto. Estudiaremos el caso en el que el tamaño del muestreo sea fijo y el caso en el que podamos elegir el tamaño de la muestra.

Consideraremos el problema de parada óptima con las siguientes reglas:

- 1) Disponemos $n + m$ objetos sobre los que tenemos definido un orden total.
- 2) Se hace de forma aleatoria una partición de los objetos en dos subconjuntos: uno de n candidatos y otro de m objetos para muestra (sampleo).
- 3) Solo es posible discernir el valor relativo de los objetos.
- 4) Se nos informa y somos capaces de recordar el mejor objeto de la muestra.
- 5) Se muestran secuencialmente los n candidatos como en el problema de la secretaria.
- 6) Se considera éxito seleccionar al mejor de los n candidatos.

Tenemos ya algunos resultados; el primero de ellos establece que la estrategia óptima presenta dos umbrales.

Teorema 6.4. *Si n es el número de candidatos y m el número de objetos del sampleo entonces existen α_n^m y β_n^m de tal modo que la siguiente estrategia es óptima*

1. Rechazar los α_n^m primeros objetos inspeccionados.
2. Después, aceptar el primero que sea mejor que todos los objetos vistos incluida la muestra.
3. Después de β_n^m , aceptar el primero que sea mejor que todos los candidatos anteriores.

Tenemos también algunos resultados asintóticos

Proposición 6.2. *Sea una sucesión de problemas con n candidatos y tamaño m_n del sampleo. Si $\frac{m_n}{n} \rightarrow m$, cuando n tiende a infinito, entonces tenemos que*

$$\alpha(m) := \lim \frac{\alpha_n^{m_n}}{n} = \max \left\{ 0, \frac{1 + m - e m}{e} \right\} = \begin{cases} \frac{1 + m - e m}{e}, & \text{if } m \in [0, \frac{1}{e-1}] ; \\ 0, & \text{if } m \geq \frac{1}{e-1} \end{cases}$$

$\beta(m) := \lim \frac{\beta_n^{m_n}}{n}$ es la única raíz en $[0, 1]$ de la ecuación

$$\frac{(1 + m) x^{1+m}}{m + x} = e^{-m}$$

Proposición 6.3. *Sea la sucesión m_n con $\frac{m_n}{n} \rightarrow m$, entonces $\beta(m) := \lim \frac{\beta_n^{m_n}}{n}$ es la única raíz en $[0, 1]$ de la ecuación*

$$\frac{(1 + m) x^{1+m}}{m + x} = e^{-m}$$

Proposición 6.4. Sea la sucesión m_n con $\frac{m_n}{n} \rightarrow m \geq \frac{1}{-1+e}$ entonces la probabilidad asintótica de éxito siguiendo la estrategia óptima es

$$\frac{m (\beta(m) - \log(m) + \log(m + \beta(m)))}{1 + m}$$

Proposición 6.5. Sea la sucesión m_n con $\frac{m_n}{n} \rightarrow m < \frac{1}{-1+e}$ entonces la probabilidad asintótica de éxito siguiendo la estrategia óptima es

$$\frac{1 + m + e m \beta(m) - e m \log(1 + m) + e m \log(m + \beta(m))}{e + e m}$$

Determinamos también el valor m_n del sampleo que proporciona mayor probabilidad de éxito y encontramos que m_n/n tiende a 1.10077... y probabilidad de éxito límite es 0.47857006...

Proposición 6.6. Para cada n consideremos $m(n)$ el tamaño óptimo del muestreo y $\mathcal{L}(n)$ el umbral óptimo correspondiente y $\mathcal{P}(n)$ la probabilidad de éxito. Se tiene que

i)

$$\frac{m(n)}{n} \rightarrow \vartheta := 1.100767538885498...$$

ii)

$$\frac{\mathcal{L}(n)}{n} \rightarrow \xi := 0.523983505318955...$$

iii)

$$\mathcal{P}(n) \geq \mathcal{P}(n + 1) > \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}(n) = \frac{m (\beta - \log(m) + \log(m + \beta))}{1 + m} = 0.47857006...$$

donde $(\xi, \vartheta,)$ son las soluciones para (x, y) del sistema de 2 ecuaciones

$$\begin{cases} x^{1+y} (1 + y) = e^{-y}(x + y) \\ ye^{x(1+y)} x^{x(1+y)} = x + y \end{cases}$$

6.3.4. PROBLEMA DE LAS SECRETARIAS CLONADAS m VECES.

Otra generalización natural del problema de las secretarias gemelas (returning secretary problem) es el problema consistente en considerar que cada objeto está clonado m veces. De hecho, este problema ya fue considerado por Garrod en su tesis doctoral [108]. Garrod presenta un procedimiento para el cálculo del umbral óptimo y probabilidad de éxito poco eficiente y no consigue resultados, en cuanto a su comportamiento asintótico, ni siquiera para $m = 3$.

En esta línea hemos concebido un algoritmo que calcula de modo muy eficiente (complejidad lineal) el umbral óptimo y probabilidad de éxito y un procedimiento para el cálculo de los valores asintóticos basado en la resolución mediante desarrollos de Taylor de un sistema de m de ecuaciones diferenciales.

A continuación se muestra los resultados obtenidos para valores de m hasta 10.

m	\mathbf{k}_{100}^m	\mathbf{k}_{1000}^m	\mathbf{k}_{10000}^m	$\lim_n \left(\frac{\mathbf{k}_n^m}{n} \right)$	\mathbf{P}_{100}^m	\mathbf{P}_{1000}^m	\mathbf{P}_{10000}^m	$\lim_n \mathbf{P}_n^m$
1	38	369	3679	0.367879441	0.37104277	0.36819561	0.36791104	0.3678794
2	48	471	4710	0.470926543	0.76970661	0.76814759	0.76799160	0.7679742
3	50	493	4927	0.492635760	0.93518916	0.93490075	0.93487222	0.9348690
4	50	499	4981	0.498053032	0.93490075	0.98307710	0.98307411	0.9830737
5	50	500	4995	0.499479760	0.99561947	0.99561715	0.99561693	0.9956169
6	50	500	4999	0.499861014	0.99885461	0.99885447	0.99885446	0.9988544
7	50	500	5000	0.499963006	0.99969900	0.99969899	0.99969899	0.9996989
8	50	500	5000	0.499990198	0.99992082	0.99992082	0.99992082	0.9999208
9	50	500	5000	0.499997415	0.99997920	0.99997920	0.99997920	0.9999792
10	50	500	5000	0.499999321	0.99999455	0.99999455	0.99999455	0.9999945

Tabla 1: *Umbral óptimo, probabilidad de éxito y valores asintóticos.*

Más detalles sobre esta línea se pueden encontrar en una versión provisional de un proyecto de artículo: (arXiv:2009.07911).

7. LÍNEA 4: EL PROBLEMA DEL ÚLTIMO ÉXITO.

7.1. INTRODUCCIÓN.

Denominamos *problema del último éxito* (Last-Success-Problem) al problema de maximizar la probabilidad de señalar el último éxito en una secuencia finita de experimentos de Bernoulli. Consideraremos n variables aleatorias de Bernoulli que son observadas secuencialmente. El mencionado problema consiste en encontrar una regla de parada que maximice la probabilidad de detenerse en el último "1" de la secuencia. El caso con variables aleatorias independientes ha sido estudiado por Hill y Krengel [121], Hsiao y Yang [123] y fue resuelto de modo simple y elegante por Franz Thomas Bruss⁷ en [90] con el siguiente famoso resultado.



Franz Thomas Bruss.

Teorema 7.1. (*Odds-Theorem, F.T. Bruss 2000*). Sean n variables aleatorias de Bernoulli, I_1, I_2, \dots, I_n , independientes de parámetros $p_i = P(I_i = 1)$. Sean los parámetros $q_i = 1 - p_i$ y $r_i = p_i/q_i$ y consideremos el siguiente índice:

$$\mathbf{s} = \begin{cases} \text{máx}\{1 \leq k \leq n : \sum_{j=k}^n r_j \geq 1\}, & \text{si } \sum_{i=1}^n r_i \geq 1; \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para maximizar la probabilidad de detenerse en el último "1" de la secuencia, es óptima la estrategia de detenerse en el primer "1" que encontramos entre las variables I_s, I_{s+1}, \dots, I_n . La probabilidad de ganar con esta estrategia es

$$\mathcal{V}(p_1, \dots, p_n) := \left(\prod_{j=s}^n q_j \right) \left(\sum_{i=s}^n r_i \right)$$

⁷Franz Thomas Bruss es en la actualidad profesor de matemáticas en la Université Libre de Bruxelles y presidente de la Sociedad de Estadística de Bélgica. Ha recibido diversos galardones por sus contribuciones matemáticas, entre ellos el Premio Jacques Deruyts en 2004.

A partir de ahora denotaremos por $\mathcal{G}(p_1, \dots, p_n)$ el juego consistente en señalar el último 1 (éxito) de la sucesión $\{I_1, \dots, I_n\}$, donde $0 < p_i = P(I_i = 1)$ para todo $i = 1, \dots, n$. Denotamos $R_k := \sum_{i=k}^n \frac{p_i}{1-p_i}$ y $Q_k := \prod_{i=k}^n (1-p_i)$. El índice s del teorema anterior se denominará *umbral óptimo* y la probabilidad de ganar utilizando la estrategia óptima, se denotará $\mathcal{V}(p_1, \dots, p_n)$. Bruss también presentó en [90] la siguiente cota para la probabilidad de ganar.

Teorema 7.2. *Si s es el umbral óptimo para el juego $\mathcal{G}(p_1, \dots, p_n)$, entonces*

$$\mathcal{V}(p_1, \dots, p_n) > R_s e^{-R_s}.$$

Bruss presentó asimismo un *addendum* en [91] con el siguiente resultado para el caso en el que $R_1 \geq 1$.

Teorema 7.3. *If $R_1 \geq 1$ then*

$$\mathcal{V}(p_1, \dots, p_n) > \frac{1}{e}.$$

Muy recientemente el resultado anterior ha sido refinado en [84] como sigue.

Teorema 7.4. *If $R_1 \geq 1$ then*

$$\mathcal{V}(p_1, \dots, p_n) \geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n > \frac{1}{e}.$$

Sin embargo, la mejoría no es significativa si n es grande.

7.2. TRABAJOS REALIZADOS.

En esta línea he publicado, muy recientemente, tres artículos: [66], [67] y [71].

7.2.1. UNA EXTENSIÓN DEL TEOREMA DE BRUSS.

En el artículo [66] he considerado la incorporación al problema del último éxito de pagos variables que dependen del índice de la variable en la que se produce ese último éxito. Si tenemos variables I_1, \dots, I_n de parámetros p_i consideraremos un pago $w_i > 0$ si la variable $I_k = 1$ es señalada con acierto como último 1 de la secuencia. Con estos pagos no constantes, en general, la estrategia óptima no es necesariamente de umbral. Cuando la estrategia óptima sea de umbral diremos que el problema es monótono. Tenemos a continuación un resultado de monotonía que incluye los casos en los que el pago w_k es no decreciente y, en particular, incluye el problema del último éxito ($w_i = 1$).

Proposición 7.1. *Si $w_{k+1} \geq (1 - p_{k+1})w_k$ para todo $k \in \{1, \dots, n - 1\}$, el problema es monótono*

También tenemos un resultado que generaliza el teorema de Bruss en términos similares a los suyos y que constituye una prueba alternativa a su famoso teorema, más sencilla si cabe que la suya.

Teorema 7.5. Sean I_1, I_2, \dots, I_n variables aleatorias Bernoulli independientes con parámetros p_i . Sean w_i reales positivos que representan el pago que recibe un jugador si para en el último "1" y éste se produce en la variable I_i . Definimos (con el auxiliar $w_0 := 0$)

$$s = \text{máx} \left\{ k : \sum_{j=k}^n \frac{w_j \cdot p_j}{1 - p_j} \geq w_{k-1} \right\}.$$

Si el problema es monotono, entonces s es umbral óptimo; es decir, para maximizar la esperanza de ganancia, es óptimo parar en el primer "1" que se produzca en las variables I_s, \dots, I_n . Además, con esta estrategia, la esperanza de ganancia es:

$$\mathbb{E} = \begin{cases} \left(\prod_{j=s}^n (1 - p_j) \right) \sum_{i=s}^n \frac{w_i \cdot p_i}{1 - p_i}, & \text{if } p_s < 1; \\ w_s \cdot \prod_{j=s+1}^n (1 - p_j), & \text{if } p_s = 1 \end{cases}$$

7.2.2. UN JUEGO RELACIONADO CON EL PROBLEMA DEL ÚLTIMO ÉXITO.

En [67] he introducido y estudiado una versión adversarial del problema del último éxito. Se consideran n variables aleatorias independientes de Bernoulli I_i con parámetros p_i que se observan secuencialmente. Consideramos el siguiente juego secuencial de suma cero para dos personas. Dos jugadores, A y B, actúan por turnos comenzando con el turno el jugador A. El juego tiene n etapas, en la etapa k , si $I_k = 1$, entonces el jugador que tiene el turno puede elegir entre mantenerlo o pasarlo al otro jugador. Si $I_k = 0$, entonces el jugador en posesión del turno está obligado a conservarlo. El objetivo del juego es no tener el turno después de la última etapa: es decir, el jugador que tenga el turno en la etapa n gana si $I_n = 1$ (porque pasa el turno a su rival y no hay más etapas) y, de lo contrario, pierde. Esto recuerda al *juego de la patata caliente* en el que el objetivo es no tener en la mano la patata caliente al final del juego, con la regla de poder pasarla, si uno así lo desea, a su oponente cuando $I_k = 1$.

Denotamos por V_k a la probabilidad de ganar del jugador en posesión del turno cuando nos disponemos a observar la variable I_k . En particular, la probabilidad de ganar del jugador A es V_1 y, por tanto, la probabilidad de ganar del jugador B es $1 - V_1$. Por otra parte, el poseedor del turno, al llegar a la última etapa, tendrá una probabilidad de ganar p_n , en definitiva $V_n = p_n$. El programa dinámico que encuentra la estrategia óptima y probabilidad de ganar viene dado por la recurrencia siguiente

$$V_k = p_k \cdot \text{máx}\{V_{k+1}, 1 - V_{k+1}\} + (1 - p_k) \cdot V_{k+1}; V_n = p_n.$$

Teniendo presente esta expresión, se llega a que la estrategia óptima para el poseedor del turno resulta muy sencilla. Esta estrategia óptima puede expresarse como sigue:

Proposición 7.2. La forma de proceder del jugador en posesión del turno que maximiza la probabilidad de ganar es pasar el turno al rival siempre que no reste por observar ninguna variable aleatoria con parámetro mayor que $1/2$ y mantenerlo en caso contrario.

La probabilidad de ganar del poseedor del turno es mayor, inferior o igual a la de su rival dependiendo de los parámetros de las variables aleatorias que restan por observar, en concreto:

Proposición 7.3. Si la última variable aleatoria con parámetro mayor o igual que $1/2$ es I_k entonces el poseedor del turno antes de observar esa variable tiene probabilidad de ganar mayor que $1/2$ si $p_k > 1/2$ y exactamente $1/2$ si $p_k = 1/2$. Después de haberse observado la variable I_k el poseedor del turno tiene una probabilidad de ganar inferior a $1/2$.

7.2.3. VARIACIONES DEL PROBLEMA DEL ÚLTIMO ÉXITO Y NUEVAS COTAS.

Un reciente trabajo en esta línea, aceptado para su publicación en *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, es [71]. Uno de los resultados principales es el relativo al caso en el que las variables de Bernoulli tengan todas el mismo parámetro p . Esto fue tratado de modo incorrecto en [127].

Proposición 7.4. Consideremos el juego $\mathcal{G}(p_1, \dots, p_n)$, con $p_i = p < 1$.

- Si $n \geq (\lceil 1/p \rceil - 1)$, entonces $s = n - \lceil 1/p \rceil + 2$ es el umbral óptimo y

$$\mathcal{V}(p, \dots, p) = \frac{p}{1-p} \cdot (\lceil 1/p \rceil - 1) \cdot (1-p)^{\lceil 1/p \rceil - 1} =$$

$$p \cdot (\lceil 1/p \rceil - 1) \cdot (1-p)^{\lceil 1/p \rceil - 2}$$

- Si $n < (\lceil 1/p \rceil - 1)$, entonces $s = 1$ es el umbral óptimo y

$$\mathcal{V}(p, \dots, p) = n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$$

También hemos obtenido cotas mas finas que las dadas hasta ahora para la probabilidad de ganar en el problema del último éxito.

Teorema 7.6. Sea s el umbral óptimo en el juego $\mathcal{G}(p_1, \dots, p_n)$ y

$$p := \min\{p_i : i = s, \dots, n\},$$

entonces

$$\mathcal{V}(p_1, \dots, p_n) \geq \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{\lceil 1/p \rceil}\right)^{-1 + \lceil 1/p \rceil}, & \text{if } 1 \leq R_s < \infty; \\ R_1 \left(\frac{n}{n+R_1}\right)^n, & \text{if } R_1 < 1 \\ \left(\frac{n-s}{n-s+R_{s+1}}\right)^{n-s}, & \text{if } R_s = \infty \end{cases}$$

En particular, si $R_s \geq 1$, entonces $\mathcal{V}(p_1, \dots, p_n) > \frac{1}{e}$.

Hemos considerado dos variantes del problema:

Variante I: Si no ocurre ningún éxito, es decir $I_k = 0$ para todo k , se repite el juego las veces que sea necesario hasta que haya alguno en el que parar.

Variante II: El jugador puede elegir entre jugar la versión estándar o predecir que no habrá ningún éxito.

Teorema 7.7. Si s es el umbral óptimo para el juego $\mathcal{G}(p_1, \dots, p_n)$, entonces se cumple para la Variante I

$$\mathcal{V}^*(p_1, \dots, p_n) \begin{cases} \geq \frac{R_1 \left(\frac{n}{n+R_1}\right)^n}{1 - \left(\frac{n}{n+R_1}\right)^n} > \frac{R_1}{-1+e^{R_1}} \geq \frac{1}{-1+e}, & \text{if } R_1 \leq 1; \\ \frac{e^{-1}}{1 - \prod_{i=1}^n (1-p_i)}, & \text{if } 1 < R_1 < \infty; \\ = \mathcal{V}(p_1, \dots, p_n), & \text{if } R_s = \infty. \end{cases}$$

Proposición 7.5. Haciendo $R_1 = \sum_{i=1}^n (p_i / (1 - p_i))$, la estrategia óptima para Variante II es como sigue:

- (1) Si $R_1 = 1$, es indiferente predecir que no habrá unos o jugar el juego estándar.
- (2) Si $R_1 > 1$, entonces se juega el juego estándar.
- (3) If $R_1 < 1$, entonces se predice que las variables aleatorias valdrán todas 0.

En cualquiera de los casos, la probabilidad de ganar, llamémosle $\mathcal{V}^{**}(p_1, \dots, p_n)$, es mayor que $1/e$.

A continuación se muestra la relación entre las probabilidades de ganar en las dos variantes introducidas y en el juego estándar.

Proposición 7.6. Si para algún $i = 1, \dots, n$, $p_i = 1$, los tres juegos son equivalentes. En otro caso,

$$\mathcal{V}(p_1, \dots, p_n) \leq \mathcal{V}^{**}(p_1, \dots, p_n) < \mathcal{V}^*(p_1, \dots, p_n)$$

7.3. TRABAJOS EN PERSPECTIVA.

7.3.1. PROBLEMA DEL ÚLTIMO ÉXITO CON DOS SUCESIONES DE EXPERIMENTOS.

Como ya se ha dicho, el problema del último éxito consiste maximizar la probabilidad de señalar el último éxito en una sucesión de experimentos de Bernoulli. Muchos problemas de parada óptima, como es el caso del problema de la secretaria, pueden verse como un caso particular de esto. Sin embargo existe una gran cantidad de problemas donde en realidad subyacen dos sucesiones de experimentos de Bernoulli, de modo que el objetivo es detenerse en un éxito de la primera de tal forma que no ocurra ningún otro éxito de la segunda a partir de entonces. Tenemos un resultado de naturaleza similar al teorema de Bruss para este tipo de situaciones.

Teorema 7.8. Sean n variables aleatorias de Bernoulli, I_1, I_2, \dots, I_n , independientes de parámetros p_i y lo mismo J_1, J_2, \dots, J_n de parámetros p_j . Consideremos la función $f(j) = \frac{1-p_j}{1-p_j}$ y consideremos el siguiente índice:

$$s = \text{mín} \left\{ 1 \leq k \leq n : \sum_{i=k}^n \frac{p_i \left(\prod_{j=k}^{i-1} f(j) \right)}{1 - p_i} < 1 \right\} - 1$$

Para maximizar la probabilidad de detenerse en una variable $I_k = 1$ de forma que $J_i = 0$ para

todo $i > k$, es óptima la estrategia de detenerse en el primer "1" que encontremos entre las variables I_s, I_{s+1}, \dots, I_n . La probabilidad de ganar con esta estrategia es

$$\left(\prod_{i=s}^n 1 - p_i \right) \left(\sum_{i=s}^n \frac{p_i \left(\prod_{j=s}^{i-1} f(j) \right)}{1 - p_i} \right)$$

Esta situación aparece en muchos problemas de parada óptima donde el teorema de Bruss (Odds-Theorem) no funciona. Veamos algunos:

◇ **El problema de la secretaria con probabilidad de rehusar.** (The best choice problem with a refusal probability). En esta variante los candidatos que son seleccionados tienen una probabilidad $1 - p$ de rehusar el empleo, en tal caso las entrevistas continúan. Aunque Dendievel asegura en [99] que este problema se resuelve mediante el teorema de Bruss (odds-theorem), realmente no es así ya que una vez que una secretaria es seleccionada y no rehúsa (es contratada), el éxito en el juego se logra si todos las demás son peores que la seleccionada, con independencia de si pensaban rehusar o no. De modo que estamos ante un caso claro del problema planteado, donde, siendo $1 - p$ la probabilidad de rehusar, las dos sucesiones de variables aleatorias de Bernoulli I_i y J_i tienen como parámetros

$$p_i = P(I_i = 1) = \frac{p}{i} \quad \text{y} \quad p_i = P(J_i = 1) = \frac{1}{i}$$

◇ **Variante del problema de la secretaria mejor/peor.** En este caso, el éxito consiste en seleccionar el mejor o el peor objeto y las dos sucesiones de variables de Bernoulli subyacentes tienen los siguientes parámetros

$$p_i = P(I_i = 1) = \frac{2}{i} \quad \text{y} \quad p_i = P(J_i = 1) = \frac{1}{i}$$

◇ **El problema del postdoc.** En esta variante el éxito consiste en seleccionar el segundo mejor objeto. Las dos sucesiones de variables de Bernoulli subyacentes tienen los siguientes parámetros

$$p_i = P(I_i = 1) = \frac{1}{i} \quad \text{y} \quad p_i = P(J_i = 1) = \frac{2}{i}$$

◇ **Variante de la secretaria multiatributo.** En esta variante las secretarías presentan m atributos independientes y el objetivo es seleccionar la mejor en alguno de ellos. Las dos sucesiones de variables de Bernoulli subyacentes tienen los siguientes parámetros

$$p_i = P(I_i = 1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{i} \right)^m \quad \text{y} \quad p_i = P(J_i = 1) = \frac{1}{i}$$

Un resultado muy interesante en esta línea es el siguiente.

Proposición 7.7. Sea $\alpha \in [0, 1]$. Si tenemos las sucesiones de variables aleatorias de Bernoulli I_i y J_i con parámetros respectivos p_i y \mathfrak{p}_i satisfaciendo $\mathfrak{p}_i = \alpha p_i$, siendo κ y \mathbf{P} , respectivamente, el umbral óptimo y la probabilidad de ganar, entonces, cambiando los papeles de las sucesiones, tenemos que el umbral es el mismo y la probabilidad de éxito

$$\alpha \cdot \mathbf{P}$$

A continuación, un ejemplo de aplicación de la proposición anterior.

Ejemplo 7.1. Imaginemos dos sucesiones de experimentos aleatorios consistentes unos en lanzar un dado y otros en extraer una carta de una baraja española. Supongamos que se considera éxito en los lanzamientos de dados obtener un 6 y en las extracciones de cartas de la baraja extraer una que sea de oros. Consideraremos el problema de detenernos en una extracción de dado exitosa de modo que en las subsiguientes extracciones de cartas no haya ningún éxito (ningún oro). La proposición anterior nos asegura que si consideraremos el problema de detenernos en una extracción de carta exitosa (oros) de modo que en las subsiguientes extracciones de dados no haya ningún éxito (ningún 6), la estrategia óptimo a seguir es la misma (utilizar 17 como umbral) y la probabilidad de éxito en este caso es $3/2$ de la probabilidad de éxito en el primero que es $\frac{3439}{10368} = 0.33169\dots$

8. LÍNEA 5: JUEGOS CON SUMAS DE VARIABLES ALEATORIAS.

8.1. INTRODUCCIÓN

Existe una gran variedad de juegos basados en la extracción de números aleatorios que se van sumando intentando lograr una suma lo más grande posible, sin que se exceda cierta cantidad prefijada. Este es el caso de los juegos de cartas como son el *Blackjack* o *la siete y media* y el *Showcase Showdown* que es uno de los juegos del famoso programa de la televisión americana "Price Is Right". Naturalmente los que han despertado un mayor interés para los matemáticos son los que se basan en extracciones aleatorias de distribución continua y, en especial, la variable uniforme $(0, 1)$. Minoru Sakaguchi es el autor más prolífico en esta línea (véanse [149], [150], [153], [154], [152] y [151]). Y existen otros recientes interesantes trabajos, como [156] y [132], de Mazalov ⁸, [148] de Swenson y [124] de Kaynar.



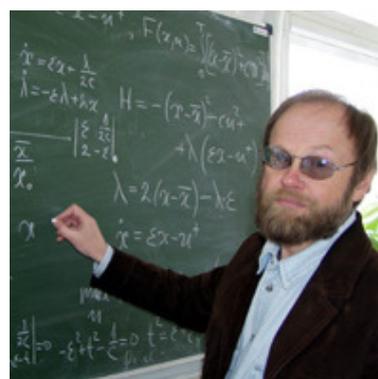
La siete y media.



Blackjack.



Showcase Showdown en el programa de televisión estadounidense The Price Is Right



Wladimir Mazalow (1954).

⁸Wladimir Mazalow (1954) es especialista en problemas de parada óptima en procesos estocásticos. Desde 2016, ha sido presidente de la Sociedad Internacional de Juegos Dinámicos (ISDG). En la actualidad es editor en jefe adjunto de la revista internacional "The Game Theory and Applications"

8.2. TRABAJOS EN PERSPECTIVA.

8.2.1. SHOWCASE SHOWDOWN CON VARIABLES $U[0, 1]$ Y JUGADAS ILIMITADAS.

Consideraremos el siguiente juego n -personal (*Showcase Showdown*), con jugadores $\{A_i\}_i^n$ y número ilimitado de jugadas:

Cada jugador A_i observa una sucesión de resultados aleatorios (distribución uniforme $[0,1]$) que se van sumando hasta que el jugador para o la suma excede de 1. Si la suma de los números extraídos por el jugador A_i no excede de 1, A_i recibe una puntuación, $S(A_i)$, igual a dicha suma; en caso contrario, su puntuación es 0. Gana el jugador con mayor puntuación y hay empate si todos puntúan cero (es decir, si las sumas de todos los jugadores exceden de 1).

Consideraremos las siguientes variantes, según la información disponible por parte de los jugadores y los pagos que reciben los ganadores.

- Juego I: Con información. Cada jugador A_i conoce $S(A_j)$ para $j = 1, \dots, i - 1$. El ganador recibe un pago externo unitario.
- Juego II: Sin información. Cada jugador A_i desconoce el resultado de los demás jugadores. El ganador recibe un pago unitario.
- Juego II.1: (suma no constante) El pagador es un agente externo. Si el resultado de todos es cero, todos reciben pago nulo.
- Juego II.2: (suma cero) El ganador, si lo hay, recibe el pago de de los demás jugadores, $1/(n - 1)$ de cada uno de ellos.
- Juego II.3: (Asimétrico) Si el resultado de todos es cero, el último jugador gana.

Las estrategias a considerar en estos juegos sin información consisten en establecer un *umbral de ambición* en el sentido de no parar hasta que ese umbral sea superado. Así pues estos juegos pueden ser entendidos como juegos continuos donde cada jugador elige el umbral de ambición llamémosles κ_i y el pago recibido vendrá dado por ciertas funciones $\mathbf{P}_i(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$, dependiendo del juego.

Dado un cierto $\kappa \in [0, 1]$ consideremos el proceso aleatorio que se corresponde con la variable aleatoria que representa la puntuación obtenida en el juego *Showcase Showdown* al utilizar κ como umbral de ambición. Para ello realizaremos sucesivas extracciones aleatorias uniformemente distribuidas en $[0, 1]$ hasta que la suma exceda κ . Si la suma no excede de 1, se considera como resultado el valor de la última suma; en caso contrario, se considera resultado 0. Veamos con el siguiente resultado cuál es la función de distribución de esta variable aleatoria a la que llamaremos ξ_κ .

Proposición 8.1. *Sea $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias $\mathbf{U}[0, 1]$. Consideraremos la siguiente sucesión definida a partir de ellas.*

$$\chi_0 := 0 \text{ and } \chi_n := \min\{1, \chi_{n-1} + Z_n\};$$

Consideremos también para cada $\kappa \in [0, 1]$ la siguiente variable aleatoria

$$\xi_\kappa := \begin{cases} \chi_n, & \text{if } \chi_{n-1} < \kappa < \chi_n < 1; \\ 0, & \text{if } \chi_{n-1} < \kappa \wedge \chi_n = 1 \end{cases}$$

Entonces la función de distribución de ξ_κ es

$$F_\kappa(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < 0; \\ 1 + e^\kappa (-1 + \kappa), & \text{if } 0 \leq x \leq \kappa; \\ 1 + e^\kappa (-1 + x), & \text{if } \kappa < x \leq 1; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dicho de otro modo, se distribuye como el producto de dos variables aleatorias: Bernoulli de parámetro $e^\kappa (1 - \kappa)$ y uniforme $[\kappa, 1]$

$$\xi_\kappa \sim Be(e^\kappa (1 - \kappa)) \cdot \mathbf{U}[\kappa, 1]$$

En lo sucesivo, utilizaremos la notación siguiente

$$\mathfrak{P}(x) := 1 + e^x (-1 + x) = P(\xi_x = 0)$$

entendiendo que representa la probabilidad de que un jugador, utilizando como umbral x , obtenga puntuación 0.

JUEGO I: JUEGO SECUENCIAL. Los n jugadores juegan secuencialmente y cada uno conoce el resultado de los anteriores. El vencedor recibe un pago unitario, da igual si el pago lo realiza un agente externo o los jugadores perdedores. Se trata de encontrar la estrategia óptima para cada jugador; es decir la estrategia umbral para cada uno de ellos que maximiza su esperanza de ganancia o, lo que es lo mismo, su probabilidad de victoria. En este juego, siempre hay un ganador, nunca empate a 0: si al llegar al último jugador, todos los anteriores tienen puntuación nula, el último vence con probabilidad 1 sin más que utilizar como umbral el cero.

Proposición 8.2. Sea n el número de jugadores y la sucesión de números reales θ_j , única raíz en $[0, 1]$ de la ecuación

$$\mathfrak{P}(x)^{j-1} = \int_x^1 \mathfrak{P}(t)^{j-1} dt, \quad j = 1, \dots, n$$

$$(1 - e^x + e^x x)^{-1+j} = \int_x^1 (1 - e^t + e^t t)^{-1+j} dt$$

se cumple

1) $0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n$

2) Si restan m jugadores por jugar y la puntuación máxima obtenida por los anteriores es M , la estrategia óptima del poseedor del turno es considerar como umbral $\max\{\theta_m, M\}$.

3) La probabilidad de victoria del primer jugador, P_n , es

$$\frac{(e^{\theta_n} - e^{\theta_n} \theta_n) \int_{\theta_n}^1 (1 - e^t + e^t t)^{n-1} dt}{1 - \theta_n}$$

En la siguiente tabla mostramos el umbral óptimo, θ_n , del primer jugador y su probabilidad de éxito, P_n , en el caso de n jugadores en la versión secuencial del Showcase Showdown con información.

n	θ_n	P_n
2	0.570557	0.424986
3	0.687916	0.285916
4	0.748671	0.217606
5	0.787111	0.176353
6	0.814059	0.148555
7	0.834191	0.128483
8	0.8499	0.113276
9	0.862558	0.101342
10	0.873008	0.0917164

Tabla 2: Umbral óptimo y probabilidad de éxito del primer jugador.

JUEGO II.1.: SIN INFORMACIÓN, CON PAGO EXTERNO. Los jugadores juegan simultáneamente o, dicho de otro modo, juegan sin conocer el resultado de los demás jugadores. Si todos los jugadores obtienen puntuación nula, todos reciben pago nulo. Si hay un ganador, recibe un pago unitario de un agente externo.

Proposición 8.3. Para el juego II.1 con n jugadores, existe un equilibrio de Nash con umbrales idénticos para todos los jugadores, dichos umbrales son iguales a la única raíz $\alpha_n \in [0, 1]$ de la ecuación

$$n(1 + e^x(-1 + x))^{-1+n} = - \left(\frac{-1 + (1 + e^x(-1 + x))^n}{e^x} \right)$$

y la probabilidad de ganar de cada jugador con estas estrategias es

$$p_n := n^{-1}(1 - (1 - e^{\alpha_n} + e^{\alpha_n} \alpha_n)^n)$$

En la siguiente tabla mostramos los umbrales, α_n , que constituyen un equilibrio de Nash con n jugadores, y la probabilidad de éxito, P_n , de cada jugador utilizando este umbral.

n	α_n	P_n
2	0.58865	0.466477
3	0.698942	0.312886
4	0.756234	0.236649
5	0.792694	0.190646
6	0.818387	0.159756
7	0.837665	0.137544
8	0.852764	0.120788
9	0.864966	0.107689
10	0.875068	0.0971638

Tabla 3: Umbrales de Nash y probabilidad de éxito de cada jugador en el juego II.1.

JUEGO II.2.: SIN INFORMACIÓN, JUEGO DE SUMA CERO. Los jugadores, al igual que en el juego anterior, juegan sin conocer el resultado de los demás jugadores. Si todos los jugadores obtienen puntuación nula, todos reciben pago nulo. Si hay un ganador, recibe un pago unitario de los demás jugadores (alícuotamente): $1/(n - 1)$ de cada uno de los restantes jugadores.

Proposición 8.4. Para el juego II.2, existe un equilibrio de Nash con umbrales idénticos para todos los jugadores, dicho umbral es la única raíz, $\alpha_n \in [0, 1]$, de la ecuación

$$n(e^x(x - 1) + 1)^{n-1} + \frac{e^{-x}((x - 1)((e^x(x - 1) + 1)^n - 1) + x(e^x(x - 1))^n)}{x - 1} = x$$

La probabilidad de empate es $\mathfrak{P}(\alpha_n)^n$ y la probabilidad de victoria de cada jugador es $\frac{1 - \mathfrak{P}(\alpha_n)^n}{n}$. La esperanza de ganancia de cada jugador con dichas estrategias es cero.

En la siguiente tabla mostramos el umbral de equilibrio α_n y la probabilidad de éxito para cada jugador, P_n , en esta variante. El equilibrio de Nash encontrado es el único

n	α_n	P_n
2	0.659046	0.441875
3	0.730542	0.304832
4	0.774447	0.232996
5	0.80461	0.188673
6	0.826815	0.158567
7	0.843952	0.136771
8	0.85764	0.120255
9	0.868862	0.107307
10	0.878253	0.09688

Tabla 4: Umbrales de Nash y probabilidad de éxito de cada jugador en el juego II.2.

que puede existir con estrategias idénticas para todos los jugadores; sin embargo, solo

cuando $n = 2$, estamos en condiciones de afirmar que esta estrategia es óptima (minimax). Asimismo, tampoco podemos descartar que existan otros equilibrios de Nash con estrategias no simétricas, ni que existan coaliciones de los rivales que nos proporcionen esperanza de payoff negativa.

Obsérvese que, al no ser externo el pagador, no es maximizar la probabilidad de éxito lo que se persigue sino lograr una probabilidad de éxito mayor que la de los competidores. De hecho, si el equilibrio de Nash del juego 1 fuera utilizado en este juego 2 todos tendrían una probabilidad de éxito mayor, sin embargo en este juego 2 éste no es equilibrio de Nash pues los jugadores estarán interesados en abandonarlo para conseguir mayor probabilidad de éxito que el resto, no importa que la probabilidad de éxito propia disminuya. Si en lugar de considerar que los perdedores pagan al ganador consideramos un pagador externo y que, en caso de empate, se repite el juego hasta que haya un vencedor, se llega a idéntico equilibrio de Nash y esperanza de ganancia para cada jugador de $1/n$. Es realmente digno de resaltar que sea diferente la estrategia plausible cuando en caso de empate no hay premio y, cuando en caso de empate, se repite el juego.

JUEGO II.3: SIN INFORMACIÓN, ASIMÉTRICO. Consideramos el juego asimétrico sin información con n jugadores, uno de los cuales juega con la ventaja de que si todos empatan (puntuación cero) él es el vencedor. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que el jugador que juega con ventaja es el n -ésimo.

Proposición 8.5. *Para el juego II.3 existe un equilibrio de Nash con umbrales idénticos, α_n , para los $n - 1$ primeros jugadores y β_n para el último (jugador con ventaja), con $\beta_n > \alpha_n$, que son la única solución para (x, K) del sistema de dos ecuaciones siguiente*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P}(x)^{n-2} = \frac{e^K (-1 + (1 + e^x (-1 + K))^n) + e^x n}{e^x (1 + e^K (-1 + K)) n (1 + e^x (-2 + n + x))} \\ \mathfrak{P}(x)^{n-1} = \frac{-1 + (1 + e^x (-1 + K))^n + e^x (1 + e^x (-1 + K))^{-1+n} n}{e^x (1 + e^K (-1 + K)) n} \end{array} \right.$$

La probabilidad de ganar del jugador con ventaja es

$$\frac{(-1 + (1 + e^{\alpha_n} (-1 + \beta_n))^n) (e^{\beta_n} - e^{\beta_n} \beta_n)}{e^{\alpha_n} n (-1 + \beta_n)} + (1 + e^{\alpha_n} (-1 + \alpha_n))^{-1+n} (1 + e^{\beta_n} (-1 + \beta_n))$$

En la tabla siguiente se muestran los umbrales de equilibrio, α_n , para los $n - 1$ primeros jugadores, β_n para el último (jugador con ventaja) y la probabilidad de éxito a la que dan lugar, P_n , para el jugador con ventaja.

n	α_n	β_n	P_n
2	0.534037	0.600826	0.535925
3	0.678697	0.725707	0.373761
4	0.744887	0.783183	0.289171
5	0.785306	0.817883	0.236529
6	0.813154	0.84159	0.200416
7	0.833748	0.859025	0.174029
8	0.849714	0.87249	0.153871
9	0.86252	0.883263	0.137952
10	0.873061	0.892114	0.125053

Tabla 5: Umbrales de Nash y probabilidad de éxito del último jugador, en el juego II.3.

8.2.2. JUEGO DE LA PATATA CALIENTE CON SUMAS DE VARIABLES ALEATORIAS.

Consideraremos el juego por turnos entre dos jugadores, basado en la acumulación de sumas de variables aleatorias, con la posibilidad de ceder o mantener el turno tras cada experimento, de tal modo que el poseedor del turno en el momento de exceder una cantidad prefijada (tope) es el perdedor. Se planea la cuestión de cuál es la estrategia de los jugadores en la decisión de mantener o ceder el turno y cuál es la probabilidad de ganar en cada situación. No hemos encontrado antecedente alguno de esta línea de investigación.

En términos más formales tendremos lo siguiente. Sea una sucesión X_i de variables aleatorias idénticamente distribuidas y dos números reales m (inicio) y \mathfrak{M} (tope) con $m < \mathfrak{M}$. Se considera la sucesión

$$S_0 = m; S_n := S_{n-1} + X_n.$$

El juego consta de una sucesión de etapas que se corresponden con la observación de la variable S_n . Dos jugadores, A y B, juegan por turnos empezando por A. El jugador en posesión del turno en la etapa n -sima, si $S_n > \mathfrak{M}$, pierde; mientras que si $S_n \leq \mathfrak{M}$, tiene la potestad de elegir si mantiene su turno o si pasa el turno a su rival para la observación de la variable S_{n+1} .

En general, si las variables son continuas con función de densidad $\delta(t)$, tenemos la siguiente ecuación integral donde $f(x)$ representa la probabilidad de ganar el poseedor del turno a partir de una acumulación de sumas de valor x en el supuesto de que a partir de ese valor siempre se cederá el turno al rival

$$f(x) = \int_0^{\mathfrak{M}-x} (1 - f(x+t))\delta(t) dt$$

o, equivalentemente,

$$f(x) = \int_x^{\mathfrak{M}} (1 - f(t))\delta(t-x) dt$$

Denotaremos por $\bar{\Psi}(x)$ a la solución de dicha ecuación, la cual es decreciente para todo $x < \mathfrak{M}$.

Proposición 8.6. Si $\bar{\Psi}(x) < 1/2$ para todo $x < \mathfrak{M}$ la estrategia óptima será la de ceder el turno al rival en todas las ocasiones. Si existe $\vartheta < \mathfrak{M}$ tal que $\bar{\Psi}(\vartheta) = 1/2$ entonces la estrategia óptima consistirá en mantener el turno si el valor acumulado es menor que ϑ y cederlo al rival en caso contrario.

Llamaremos $\Psi(x)$ a la probabilidad de ganar del poseedor del turno (bien porque lo recibe o bien porque decide mantenerlo) con valor acumulado x ; o, si se prefiere, teniendo en cuenta que se trata de un juego sin memoria (no importa la historia hasta llegar a la acumulación x), $\Psi(x)$ representa la probabilidad de ganar del primer jugador en el juego con inicio $m = x$ y tope \mathfrak{M} .

Proposición 8.7. Sea ϑ como en la proposición anterior. Si $x \in [\vartheta, \mathfrak{M}]$, entonces $\bar{\Psi}(x) = \Psi(x)$. Si $x < \vartheta$, entonces $\Psi(x)$ satisface la siguiente ecuación integral

$$\Psi(x) = \int_x^{\vartheta} \Psi(x+t)\delta(t)dt + \int_{\vartheta}^{\mathfrak{M}} \bar{\Psi}(x+t)\delta(t)dt$$

■ **VARIABLES ALEATORIAS EXPONENCIALES.** En el caso de que las variables aleatorias sean exponenciales de media λ , sean cualesquiera m y \mathfrak{M} , la estrategia óptima consiste en ceder en todos los casos el turno al rival.

La ecuación integral que satisface $\bar{\Psi}$ es

$$f(x) = \int_x^{\mathfrak{M}} \lambda(1-f(t))e^{-\lambda(t-x)} dt$$

donde, por derivación, obtenemos

$$f'(x) = \int_x^{\mathfrak{M}} \lambda^2(1-f(t))e^{-\lambda(t-x)} dt - \lambda(1-f(x))$$

lo que permite considerar el problema de valor inicial

$$f'(x) - \lambda f(x) = -\lambda(1-f(x)); f(\mathfrak{M}) = 0$$

cuya solución es

$$\bar{\Psi}(x) = \frac{1}{2}e^{-2\lambda\mathfrak{M}} (e^{2\lambda\mathfrak{M}} - e^{2\lambda x})$$

Como quiera que $\bar{\Psi}(x) < 1/2$ para todo $x < \mathfrak{M}$, $\bar{\Psi}(x) = \Psi(x)$ para todo x , de modo que la probabilidad de victoria del poseedor del turno es siempre inferior a $1/2$ (y por tanto a la del rival) y en el límite, cuando $x \rightarrow -\infty$, es $1/2$.

■ **VARIABLES ALEATORIAS UNIFORMES** $[0, 1]$. En el caso de variables aleatorias $U[0, 1]$ la cuestión resulta mucho más compleja y la estrategia óptima viene dada por los siguiente resultados.

Proposición 8.8. Si las variables son $\mathbf{U}[0, 1]$ y tope $\mathfrak{M} = 1$, entonces, para $x \in [0, 1]$

$$\bar{\Psi}(x) = T_1(x) := \frac{e - e^x}{e}$$

Proposición 8.9. Si las variables son $\mathbf{U}[0, 1]$ y $\mathfrak{M} = 1$, entonces, para el jugador en posesión del turno con valor acumulado x , la estrategia óptima consiste en pasar el turno al rival si $x > 1 - \log(2)$ y mantenerlo si $x < 1 - \log(2)$. Para $x = 1 - \log(2)$ es indiferente pasar el turno o mantenerlo y la probabilidad de ganar es $1/2$ en ambos casos.

Proposición 8.10. Si las variables son $\mathbf{U}[0, 1]$ y tope $\mathfrak{M} = 1$ entonces para $x \in [0, 1 - \log(2)]$

$$\Psi(x) = T_2(x) := \frac{e^{1-x}}{4}$$

que es la solución de la ecuación integral

$$f(x) = \int_x^{1-\log(2)} f(t) dt + \int_{1-\log(2)}^1 (1 - T_1(t)) dt$$

Proposición 8.11. Si las variables son $\mathbf{U}[0, 1]$ y tope $\mathfrak{M} = 1$ entonces para $x \in [-\log(2), 0]$

$$\Psi(x) = T_3(x) := \frac{1}{4}e^{-x} (2e^{2x} - 2 + e)$$

que es la solución de la ecuación integral

$$f(x) = \int_x^0 f(t) dt + \int_{1-\log(2)}^{1+x} (1 - T_1(t)) dt + \int_0^{1-\log(2)} T_2(t) dt$$

Consideraremos ahora

$$u_n := \begin{cases} \frac{3-n}{2}, & \text{si } n \text{ is impar;} \\ 2 - \frac{n}{2} - \log(2), & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

La construcción de $\Psi(x)$ para $x \in [u_{n+1}, u_n]$ resulta de resolver la siguiente ecuación integral

$$T_n(x) = \int_x^{u_n} T_n(t) dt + \int_{u_{n-1}}^{1+x} (1 - T_{n-2}(t)) dt + \int_{u_n}^{u_{n-1}} T_{n-1}(t) dt$$

donde derivando tenemos la siguiente ecuación diferencial para T_n

$$T'_n(x) = -T_n(x) + T_{n-1}(1+x); y(u_n) = T_{n-1}(u_n)$$

En definitiva, (ver figura 7),

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1 - e^{x-1} & 1 - \log(2) \leq x \leq 1 \\ \frac{e^{1-x}}{4} & 0 < x < 1 - \log(2) \\ \frac{1}{4}e^{-x} (2e^{2x} - 2 + e) & -\log(2) < x < 0 \\ T_n(x) \ (n > 3) & u_{n+1} < x < u_n \end{cases}$$

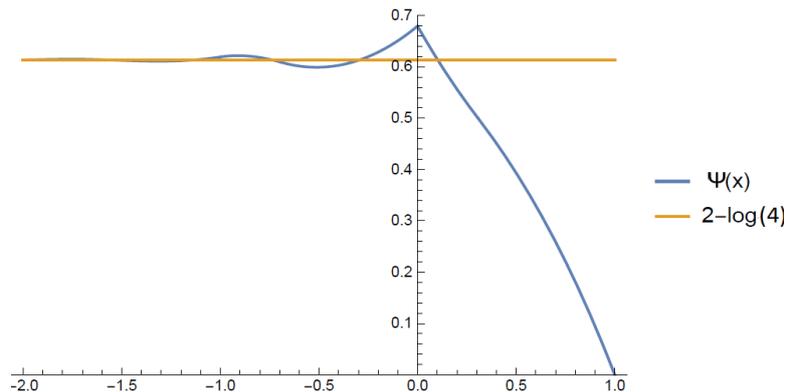


Figura 7

Para la determinación del límite de la probabilidad de éxito del primer jugador, cuando $m \rightarrow -\infty$, se requiere una argumentación muy diferente al caso de la exponencial.

Consideremos $S_0 = m$ y $S_n := S_{n-1} + X_n$ y sea $\zeta_m := \min\{S_n > 0\} \in [0, 1]$. La variable aleatoria ζ_m representa el primer valor acumulado de las sumas de las variables que excede de 0.

Sea $F_m(x) := P(\zeta_m \leq x)$ la función de distribución de ζ_m .

Proposición 8.12. Si $m \in [-1, 0]$ entonces

$$F_m(x) = \begin{cases} e^{-mx} & 0 \leq x \leq m + 1 \\ e^{-m-1} (e^{m+1} + ex - e^x) & m + 1 < x < 1 \end{cases}$$

Se trata de calcular la función de distribución límite $F_m(x)$ cuando $m \rightarrow -\infty$ y para ello tenemos la siguiente conjetura.

Conjetura 8.1.

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} F_m(x) = F(x) := 1 - (1 - x)^2$$

Una vez probado este resultado tendremos el siguiente.

Conjetura 8.2. La probabilidad de éxito del primer jugador cuando el inicio $m \rightarrow -\infty$ o, equivalentemente, el tope $\mathfrak{M} \rightarrow \infty$ es (ver figura 7)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x) = 2 - \log(4) = 0.61370563888\dots$$

A esto se se llega integrando la probabilidad de éxito del primer jugador al rebasar el 0 tras las sumas acumuladas teniendo en cuenta la distribución límite $F(x)$ conjeturada anteriormente.

$$\int_{1-\log(2)}^1 (1 - T_1(x))F'(x) dx + \int_0^{1-\log(2)} T_2(x)F'(x) dx = 2 - \log(4) = 0.61370563888\dots$$

■ **VARIABLES ALEATORIAS NORMALES ESTÁNDAR DOBLADAS.** Consideraremos variables normales (0,1) dobladas: $X_i = |y_i|$ donde X_i es normal (0,1), con tope $\mathfrak{M} = 0$. La función de densidad es

$$\delta(t) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

y ecuación integral a considerar para obtener $\bar{\Psi}(x)$ es

$$f(x) = \int_x^0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 - f(t)) e^{-\frac{1}{2}(t-x)^2} dt$$

En este caso, por derivación no se obtiene, como en casos anteriores, una ecuación diferencial; sin embargo, es posible por esta vía el cálculo de las sucesivas derivadas de la solución en $x = 0$ que permita una aproximación de la solución mediante su polinomio de Taylor:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ f''(0) &= -\frac{2}{\pi} \\ f^{(3)}(0) &= \frac{\sqrt{2}(\pi-2)}{\pi^{3/2}} \\ f^{(4)}(0) &= \frac{4(\pi-1)}{\pi^2} \\ f^{(5)}(0) &= \frac{\sqrt{2}(-4-3(\pi-2)\pi)}{\pi^{5/2}} \\ f^{(6)}(0) &= -\frac{2(4+\pi(7\pi-8))}{\pi^3} \\ f^{(7)}(0) &= \frac{\sqrt{2}(\pi(20+3\pi(5\pi-8))-8)}{\pi^{7/2}} \\ f^{(8)}(0) &= \frac{8(3\pi(2+3(\pi-1)\pi)-2)}{\pi^4} \\ f^{(9)}(0) &= \frac{\sqrt{2}(\pi(56+\pi((128-105\pi)\pi-100))-16)}{\pi^{9/2}} \\ f^{(10)}(0) &= \frac{2\pi(64+\pi((200-249\pi)\pi-132))-32}{\pi^5} \\ f^{(11)}(0) &= \frac{\sqrt{2}(\pi(144+\pi(\pi(580+63\pi(15\pi-14))-336))-32)}{\pi^{11/2}} \\ f^{(12)}(0) &= \frac{4(\pi(80+\pi(\pi(400+\pi(1095\pi-691))-208))-16)}{\pi^6} \\ f^{(13)}(0) &= \frac{\sqrt{2}(\pi(352+\pi(\pi(2128+\pi(27(282-385\pi)\pi-4040))-1008))-64}{\pi^{13/2}} \\ f^{(14)}(0) &= -\frac{2(64+\pi(\pi(1200+\pi(15\pi(376+\pi(1569\pi-784))-2752))-384)}{\pi^7} \\ f^{(15)}(0) &= \frac{\sqrt{2}(\pi(832+\pi(\pi(6960+\pi(\pi(34024+9\pi(15015\pi-8896))-15232))-2816))-128}{\pi^{15/2}} \\ f^{(16)}(0) &= \frac{16(\pi(112+\pi(\pi(1080+\pi(3\pi(1966+\pi(12495\pi-5051))-2506))-408))-16}{\pi^8} \end{aligned}$$

Proposición 8.13. Si las variables aleatorias son normales estándar dobladas y tope $\mathfrak{M} = 0$, entonces, para el jugador en posesión del turno, con valor acumulado $x < 0$, la estrategia óptima consiste en pasar el turno al rival si $x \geq \alpha := -1.203331\dots$ (ver figura 8) y mantenerlo si $x \leq \alpha$.

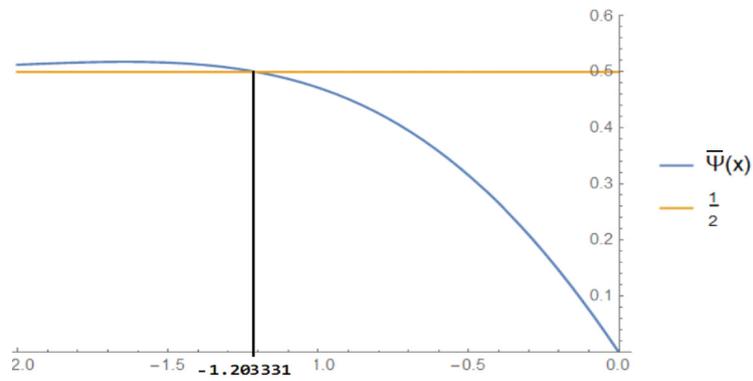


Figura 8

9. LÍNEA 6: CUATERNIOS DE HAMILTON GENERALIZADOS.

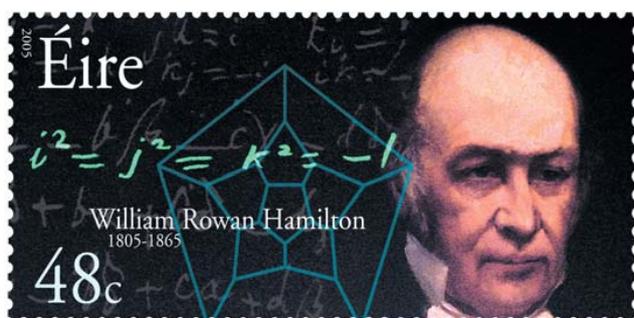
9.1. INTRODUCCIÓN.

El origen de los cuaterniones se remonta a 1843, cuando William Rowan Hamilton consideró un espacio vectorial de dimensión 4 sobre \mathbb{R} con base $\{1, i, j, k\}$

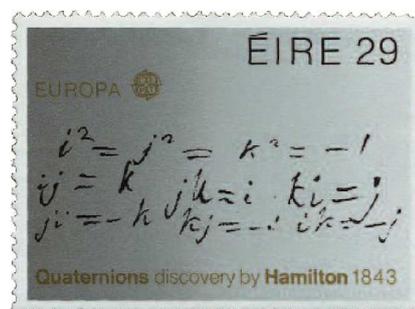
$$\mathbb{H} := \{x_0 + x_1i + x_2j + x_3k : x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

y definió sobre él un producto asociativo dado por las reglas, ahora clásicas,

$$i^2 = j^2 = -1 \text{ y } ij = -ji = k.$$



Sello irlandés de 2005 conmemorativo del 200 aniversario del nacimiento de Hamilton (1805-1865).



Sello irlandés de 1983 conmemorativo del descubrimiento de los cuaternios.

Esta construcción de Hamilton admite una extensión muy natural como la siguiente. Sea R un anillo conmutativo con identidad y $H(R)$ el módulo libre de R del rango 4 con base $\{1, i, j, k\}$. Es decir,

$$H(R) := \{x_0 + x_1i + x_2j + x_3k : x_0, x_1, x_2, x_3 \in R\}.$$

Ahora, sean $a, b \in R$ y consideremos una multiplicación asociativa en $H(R)$ de acuerdo con las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} i^2 &= a, \\ j^2 &= b, \\ ij &= -ji = k. \end{aligned}$$

Así, obtenemos un anillo unitario (anillo de cuaternios de Hamilton generalizados sobre R) que se denotará por $\left(\frac{a,b}{R}\right)$.

Si tanto a como b son unidades y el anillo subyacente R es un cuerpo \mathbb{F} de característica diferente de dos, la estructura del álgebra correspondiente es bien conocida. De hecho, dicha álgebra es o bien un anillo de división o bien isomorfa al anillo de matrices $\mathbb{M}_2(\mathbb{F})$ [140].

La estructura de algebra cuaterniónica sobre anillos conmutativos ha sido considerada por Kanzaki [125], Hahn [120], Knus [126], Gross and Lucianovic [117], Tuganbaev [163] y, más recientemente, por Voight [167, 168].

9.2. TRABAJOS PREVIOS.

En esta línea he desarrollado dos trabajos, junto con A.M. Oller-Marcén y C. Miguel, con los que hemos caracterizado las clases de isomorfía de los anillos de cuaternios de Hamilton generalizados sobre $R = \mathbb{Z}_n$, con n impar; y, para cualquier n , las clases en el caso de a y b inversibles.

9.2.1. ESTRUCTURA DEL ANILLO DE CUATERNIOS $\left(\frac{a,b}{\mathbb{Z}_n}\right)$ CON a, b UNIDADES.

En el trabajo [45] estudiamos la estructura $\left(\frac{a,b}{\mathbb{Z}_n}\right)$ con a, b coprimos con n . Dado cualquier anillo conmutativo R , se consideran los dos siguientes anillos de cuaternios sobre R :

$$\mathbb{H}(R) := \left(\frac{-1, -1}{R}\right) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha - \beta i & -\gamma + \delta i \\ \gamma + \delta i & \alpha + \beta i \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R; i^2 = -1 \right\},$$

$$\mathbb{L}(R) := \left(\frac{1, 1}{R}\right) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha - \beta i & \gamma + \delta i \\ \gamma - \delta i & \alpha + \beta i \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R; i^2 = -1 \right\}.$$

En el caso de $R = \mathbb{Z}_n$, con n impar, se tiene lo siguiente.

Proposición 9.1. *Sea n un entero impar, entonces,*

$$\mathbb{H}(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{L}(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_n).$$

En el caso de que n sea potencia de 2 tenemos lo siguiente.

Teorema 9.1. *Si a, b son enteros impares,*

$$\left(\frac{a,b}{\mathbb{Z}_{2^s}}\right) \cong \begin{cases} \mathbb{H}(\mathbb{Z}_{2^s}), & \text{si } a \equiv b \equiv -1 \pmod{4}; \\ \mathbb{L}(\mathbb{Z}_{2^s}), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y, en definitiva,

Teorema 9.2. *Sea n un entero y a, b enteros tales que $\gcd(a, n) = \gcd(b, n) = 1$. Entonces se cumple lo siguiente:*

i) *Si n es impar entonces*

$$\left(\frac{a,b}{\mathbb{Z}_n}\right) \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_n).$$

ii) *Si $n = 2^s m$ con $s > 0$ y m impar, entonces*

$$\left(\frac{a,b}{\mathbb{Z}_n}\right) \cong \begin{cases} \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_m) \times \mathbb{H}(\mathbb{Z}_{2^s}), & \text{si } s = 1 \text{ ó } a \equiv b \equiv -1 \pmod{4}; \\ \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_m) \times \mathbb{L}(\mathbb{Z}_{2^s}), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

9.2.2. CUATERNIOS DE HAMILTON GENERALIZADOS SOBRE \mathbb{Z}_n CON n IMPAR.

En [63], determinamos el número de clases de isomorfía de los anillos de cuaternios de Hamilton generalizados $\left(\frac{a,b}{\mathbb{Z}_n}\right)$ para a, b elementos cualesquiera de \mathbb{Z}_n . Los resultados centrales conducentes a ello son los siguientes:

Proposición 9.2. *Sea p^k una potencia de primo impar. Sea u un no-residuo cuadrático módulo p con $p \nmid u$. Consideremos enteros a y b coprimos con p y sea $0 < r$. Entonces,*

$$\left(\frac{ap^r, bp^r}{\mathbb{Z}_{p^k}}\right) \cong \begin{cases} \left(\frac{up^r, p^r}{\mathbb{Z}_{p^k}}\right), & \text{if } ab \text{ no es residuo cuadrático módulo } p; \\ \left(\frac{p^r, p^r}{\mathbb{Z}_{p^k}}\right), & \text{if } ab \text{ es residuo cuadrático módulo } p. \end{cases}$$

Proposición 9.3. *Sea u un no-residuo cuadrático modulo p con $p \nmid u$. Consideremos dos enteros a y b coprimos con p y sean $0 < s < r$. Entonces,*

$$\left(\frac{ap^s, bp^r}{\mathbb{Z}_{p^k}}\right) \cong \begin{cases} \left(\frac{up^s, p^r}{\mathbb{Z}_{p^k}}\right), & \text{si solo } b \text{ es residuo cuadrático módulo } p; \\ \left(\frac{p^s, up^r}{\mathbb{Z}_{p^k}}\right), & \text{si solo } a \text{ es residuo cuadrático módulo } p. \\ \left(\frac{p^s, p^r}{\mathbb{Z}_{p^k}}\right), & \text{si } a \text{ y } b \text{ son ambos residuos cuadráticos módulo } p. \\ \left(\frac{up^s, up^r}{\mathbb{Z}_{p^k}}\right), & \text{si } a \text{ y } b \text{ no son residuos cuadráticos módulo } p. \end{cases}$$

Proposición 9.4. *Sea p un número primo y sean a, b y c coprimos con p . Sea también, $0 \leq s \leq r < k$. Entonces, los anillos R_1, R_2 y R_3 definidos por*

$$R_1 = \left(\frac{ap^s, bp^r}{\mathbb{Z}_{p^k}}\right), \quad R_2 = \left(\frac{cp^s, 0}{\mathbb{Z}_{p^k}}\right), \quad R_3 = \left(\frac{0, 0}{\mathbb{Z}_{p^k}}\right)$$

son no isomorfos dos a dos.

Proposición 9.5. *Sea p un número primo y consideremos a, b, c y d coprimos con p . Sea también, $s_1 \leq s_2 \leq k$ and $s_3 \leq s_4 \leq k$ y asumamos $s_1 \neq s_3$ ó $s_2 \neq s_4$. Entonces*

$$\left(\frac{ap^{s_1}, bp^{s_2}}{\mathbb{Z}_{p^k}}\right) \not\cong \left(\frac{cp^{s_3}, dp^{s_4}}{\mathbb{Z}_{p^k}}\right)$$

Proposición 9.6. *Sea u no-residuo cuadrático módulo p con $p \nmid u$ y sea $0 < s < k$. Entonces,*

i) $\left(\frac{up^s, p^s}{\mathbb{Z}_{p^k}}\right) \not\cong \left(\frac{p^s, p^s}{\mathbb{Z}_{p^k}}\right).$

ii) $\left(\frac{up^s, 0}{\mathbb{Z}_{p^k}}\right) \not\cong \left(\frac{p^s, 0}{\mathbb{Z}_{p^k}}\right).$

Y, de todo lo anterior, se desprende el número de clases de isomorfía.

Teorema 9.3. *Sea p un primo impar y sea k un entero positivo. Entonces existen, salvo isomorfismos, exactamente $2k^2 + 2$ anillos de cuaternios de Hamilton generalizados sobre \mathbb{Z}_{p^k} .*

Cuando $n = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ es la factorización prima de n , el isomorfismo

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{r_k}}. \quad (9)$$

induce de forma natural el isomorfismo

$$\left(\frac{a, b}{\mathbb{Z}_n} \right) \cong \left(\frac{a, b}{\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}} \right) \oplus \dots \oplus \left(\frac{a, b}{\mathbb{Z}_{p_k^{r_k}}} \right). \quad (10)$$

Corolario 9.1. *Sea $n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ es un entero impar. Entonces, el número de anillos de cuaternios de Hamilton generalizados sobre \mathbb{Z}_n , salvo isomorfismos, es*

$$2^m \cdot \prod_{i=1}^m (k_i^2 + 1).$$

9.3. TRABAJOS EN PERSPECTIVA.

9.3.1. CUATERNIOS GENERALIZADOS SOBRE ANILLO LOCAL DE CARACTERÍSTICA IMPAR.

Pretendemos extender el trabajo realizado en [63] a todo anillo local de característica impar. El desarrollo será similar cambiando el papel que juega en [63] el concepto de residuo cuadrático módulo p por cuadrado en el cuerpo residual R/\mathfrak{m} , donde \mathfrak{m} es el ideal maximal de R . Así, tenemos un resultado como el siguiente

Teorema 9.4. *Sea R un anillo de característica impar, finito y local de maximal \mathfrak{m} . Sea $\psi : R \rightarrow R/\mathfrak{m}$ el epimorfismo canónico. Sea $u \in R$ una unidad tal que $\psi(u)$ es un cuadrado en R/\mathfrak{m} . Sean $s, t \in R$ unidades y sean $m, m_1, m_2 \in R$ divisores de cero no nulos con orden de nilpotencia distintos. Entonces se cumple*

- i) $\left(\frac{st}{R} \right) \cong \left(\frac{1}{R} \right)$.
- ii) $\left(\frac{stm}{R} \right) \cong \begin{cases} \left(\frac{um}{R} \right), & \text{if } \psi(s) \text{ is a quadratic nonresidue;} \\ \left(\frac{1m}{R} \right), & \text{if } \psi(s) \text{ is a quadratic residue.} \end{cases}$
- iii) $\left(\frac{sm, tm}{R} \right) \cong \begin{cases} \left(\frac{um, m}{R} \right), & \text{if } \psi(st) \text{ is a quadratic nonresidue;} \\ \left(\frac{m, m}{R} \right), & \text{if } \psi(st) \text{ is a quadratic residue.} \end{cases}$
- iv) $\left(\frac{sm_1, tm_2}{R} \right) \cong \begin{cases} \left(\frac{um_1, m_2}{R} \right), & \text{if only } \psi(t) \text{ is a quadratic residue;} \\ \left(\frac{m_1, um_2}{R} \right), & \text{if only } \psi(s) \text{ is a quadratic residue.} \\ \left(\frac{m_1, m_2}{R} \right), & \text{if both } \psi(s) \text{ and } \psi(t) \text{ are quadratic residues.} \\ \left(\frac{um_1, um_2}{R} \right), & \text{if both } \psi(s) \text{ and } \psi(t) \text{ are quadratic nonresidues.} \end{cases}$

Y tenemos un resultado similar al Teorema 9.3 para el número de anillos de cuaternios de Hamilton generalizados salvo isomorfismos. En este caso este número depende exclusivamente del orden de nipotencia del maximal \mathfrak{m} .

Proposición 9.7. *El número de anillos de cuaternios de Hamilton generalizados, salvo isomorfismos, sobre un anillo local R de maximal \mathfrak{m} con orden de nilpotencia k es $2k^2 + 2$.*

En particular, si R es un cuerpo de característica impar, tenemos lo siguiente.

Proposición 9.8. *Sea \mathbb{F} un cuerpo de característica distinta de 2 y sea $a \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{F}^2$. Existen, salvo isomorfismos, exactamente 4 anillos de cuaternios de Hamilton generalizados sobre \mathbb{F} ; a saber:*

$$\left(\frac{1,1}{\mathbb{F}}\right), \left(\frac{a,0}{\mathbb{F}}\right), \left(\frac{1,0}{\mathbb{F}}\right) \text{ y } \left(\frac{0,0}{\mathbb{F}}\right).$$

9.3.2. CUATERNIOS DE HAMILTON GENERALIZADOS SOBRE $R = \mathbb{Z}_{2^s}$.

Pretendemos ampliar el estudio realizado en [63], para $R = \mathbb{Z}_n$ con n impar, a cualquier n . Para ello es necesario estudiar el caso de $n = 2^s$. En particular, nos preguntamos cuántos anillos de cuaternios de Hamilton generalizados sobre $R = \mathbb{Z}_{2^s}$ existen salvo isomorfismos. Se trata por tanto de encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que tengamos el siguiente isomorfismo

$$\left(\frac{2^s a, 2^t b}{\mathbb{Z}_{2^k}}\right) \cong \left(\frac{2^{s'} a', 2^{t'} b'}{\mathbb{Z}_{2^k}}\right)$$

En este caso el problema resulta más complejo debido a que existe un mayor número de clases de isomorfía que en el caso de potencias de primos impares. Tenemos algunos resultados como el siguiente:

Proposición 9.9. *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ enteros impares y sea $k > 2$. Si se da alguna de las siguientes condiciones:*

- i) $0 \leq s \leq r < k - 2$, $a \equiv a' \pmod{8}$ y $b \equiv b' \pmod{8}$.
- ii) $0 \leq s \leq r = k - 2$, $a \equiv a' \pmod{8}$ y $b \equiv b' \pmod{4}$.
- iii) $0 \leq s = r = k - 2$, $a \equiv a' \pmod{4}$ y $b \equiv b' \pmod{4}$.
- iv) $0 \leq s \leq r = k - 1$ and $a \equiv a' \pmod{8}$;
- v) $0 \leq s = r = k - 1$;

entonces,

$$\left(\frac{a2^s, b2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}}\right) \cong \left(\frac{a'2^s, b'2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}}\right)$$

Este resultado debe ser refinado pues algunos casos del i) al v) también presentan isomorfismo entre ellos y, asimismo, deben ser establecidos todos los casos no isomorfos. En ese sentido, tenemos otros resultados como los siguientes:

Proposición 9.10. *Si $k > 2$ y $2 < r < k - 2$ entonces todo anillo de cuaternios de Hamilton generalizados $\left(\frac{a2^r, b2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}}\right)$ con a y b enteros impares es isomorfo a uno de los siguientes.*

- 1) $R_1 = \left(\frac{2^r, 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right) \cong \left(\frac{5 \cdot 2^r, 5 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right).$
- 2) $R_2 = \left(\frac{3 \cdot 2^r, 3 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right) \cong \left(\frac{7 \cdot 2^r, 7 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right).$
- 3) $R_3 = \left(\frac{2^r, 3 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right) \cong \left(\frac{5 \cdot 2^r, 7 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right).$
- 4) $R_4 = \left(\frac{2^r, 7 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right) \cong \left(\frac{5 \cdot 2^r, 3 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right).$
- 5) $R_5 = \left(\frac{3 \cdot 2^r, 7 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right).$
- 6) $R_6 = \left(\frac{2^r, 5 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right).$

Proposición 9.11. Si $k > 2$ y $2 < r = k - 2$, entonces todo anillo de cuaternios de Hamilton generalizados $\left(\frac{a2^r, b2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right)$ con a y b enteros impares es isomorfo a uno de los siguientes.

- 1) $R_1 = \left(\frac{2^r, 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right) \cong \left(\frac{2^r, 5 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right) \cong \left(\frac{5 \cdot 2^r, 5 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right).$
- 2) $R_2 = \left(\frac{3 \cdot 2^r, 3 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right) \cong \left(\frac{3 \cdot 2^r, 7 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right) \cong \left(\frac{7 \cdot 2^r, 7 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right).$
- 3) $R_3 = \left(\frac{2^r, 3 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right) \cong \left(\frac{2^r, 7 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right) \cong \left(\frac{3 \cdot 2^r, 5 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right) \cong \left(\frac{5 \cdot 2^r, 7 \cdot 2^r}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right).$

Proposición 9.12. Sea $k \in \{2, 3\}$. Entonces,

$$\left(\frac{2, 2}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right) \cong \left(\frac{2a, 2b}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right)$$

para cualesquiera enteros impares a y b .

Proposición 9.13. Sea $k > 3$. Entonces, para cada anillo de cuaternios de Hamilton generalizado $\left(\frac{2a, 2b}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right)$ con a y b enteros impares, se cumple

$$\left(\frac{2a, 2b}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right) \cong \begin{cases} R_1 = \left(\frac{2, 2}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right), & \text{if } a + b \equiv 0, 2 \pmod{8}; \\ R_2 = \left(\frac{-2, -2}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right), & \text{if } a + b \equiv 4, 6 \pmod{8}. \end{cases}$$

Proposición 9.14. Todos los anillos de cuaternios de Hamilton generalizados sobre \mathbb{Z}_2 son isomorfos.

Proposición 9.15. *Los anillos de cuaternios de Hamilton generalizados sobre \mathbb{Z}_4 , salvo isomorfismos, son 7:*

- 1) $\left(\frac{0,0}{\mathbb{Z}_4}\right)$.
- 2) $\left(\frac{0,1}{\mathbb{Z}_4}\right) \cong \left(\frac{1,0}{\mathbb{Z}_4}\right)$.
- 3) $\left(\frac{0,2}{\mathbb{Z}_4}\right) \cong \left(\frac{2,0}{\mathbb{Z}_4}\right) \cong \left(\frac{2,2}{\mathbb{Z}_4}\right)$.
- 4) $\left(\frac{0,3}{\mathbb{Z}_4}\right) \cong \left(\frac{3,0}{\mathbb{Z}_4}\right)$.
- 5) $\left(\frac{1,1}{\mathbb{Z}_4}\right) \cong \left(\frac{1,3}{\mathbb{Z}_4}\right) \cong \left(\frac{3,1}{\mathbb{Z}_4}\right)$.
- 6) $\left(\frac{1,2}{\mathbb{Z}_4}\right) \cong \left(\frac{2,1}{\mathbb{Z}_4}\right) \cong \left(\frac{2,3}{\mathbb{Z}_4}\right) \cong \left(\frac{3,2}{\mathbb{Z}_4}\right)$.
- 7) $\left(\frac{3,3}{\mathbb{Z}_4}\right)$.

Proposición 9.16. *Los anillos de cuaternios de Hamilton generalizados sobre \mathbb{Z}_8 , salvo isomorfismos, son 16:*

- 1) $\left(\frac{0,0}{\mathbb{Z}_8}\right)$.
- 2) $\left(\frac{0,1}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{1,0}{\mathbb{Z}_8}\right)$.
- 3) $\left(\frac{0,2}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{2,0}{\mathbb{Z}_8}\right)$.
- 4) $\left(\frac{0,3}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{3,0}{\mathbb{Z}_8}\right)$.
- 5) $\left(\frac{0,4}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{4,0}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{4,4}{\mathbb{Z}_8}\right)$.
- 6) $\left(\frac{0,5}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{5,0}{\mathbb{Z}_8}\right)$.
- 7) $\left(\frac{0,6}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{6,0}{\mathbb{Z}_8}\right)$.
- 8) $\left(\frac{0,7}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{7,0}{\mathbb{Z}_8}\right)$.
- 9) $\left(\frac{1,1}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{1,3}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{1,5}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{1,7}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{3,1}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{3,5}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{5,1}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{5,3}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{5,5}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{5,7}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{7,1}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{7,5}{\mathbb{Z}_8}\right)$.
- 10) $\left(\frac{1,2}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{1,6}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{2,1}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{2,7}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{3,6}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{6,1}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{6,3}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{7,2}{\mathbb{Z}_8}\right)$.
- 11) $\left(\frac{1,4}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{4,4}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{4,5}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{5,4}{\mathbb{Z}_8}\right)$.
- 12) $\left(\frac{2,2}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{2,6}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{6,2}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{6,6}{\mathbb{Z}_8}\right)$.
- 13) $\left(\frac{2,3}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{2,5}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{3,2}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{5,2}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{5,6}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{6,5}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{6,7}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{7,6}{\mathbb{Z}_8}\right)$.
- 14) $\left(\frac{2,4}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{4,2}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{4,6}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{6,4}{\mathbb{Z}_8}\right)$.
- 15) $\left(\frac{3,3}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{3,7}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{7,3}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{7,7}{\mathbb{Z}_8}\right)$.
- 16) $\left(\frac{3,4}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{4,3}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{4,7}{\mathbb{Z}_8}\right) \cong \left(\frac{7,4}{\mathbb{Z}_8}\right)$.

Proposición 9.17. *El número de cuaternios generalizados de la forma*

$$\left(\frac{2^r u, 2^r v}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right),$$

cuando $k > 3$ y u, v son impares, es, salvo isomorfismos,

- 2, Si $r = 0$

$$\left(\frac{1, 1}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right); \left(\frac{-1, -1}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right)$$

- 2, Si $r = 1$

$$\left(\frac{2, 2}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right); \left(\frac{-2, -2}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right)$$

- 3, Si $r = 2$

$$\left(\frac{4, 4}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right); \left(\frac{-4, -4}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right); \left(\frac{-4, 4}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right)$$

- 3, Si $2 < r = k - 2$

$$\left(\frac{2^{k-2}, 2^{k-2}}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right); \left(\frac{-2^{k-2}, -2^{k-2}}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right); \left(\frac{-2^{k-2}, 2^{k-2}}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right)$$

- 1, Si $2 < r = k - 1$

Proposición 9.18. *Si $s = 0$ y $r = k > 3$, entonces 4 es el número de cuaternios de Hamilton generalizados salvo isomorfismo; a saber:*

$$\left(\frac{1, 0}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right); \left(\frac{3, 0}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right); \left(\frac{5, 0}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right); \left(\frac{7, 0}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right)$$

Proposición 9.19. *Si $s = 0$ y $r = k - 1 > 2$, entonces 4 es el número de cuaternios de Hamilton generalizados salvo isomorfismo; a saber:*

$$\left(\frac{1, 2^{k-1}}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right); \left(\frac{3, 2^{k-1}}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right); \left(\frac{5, 2^{k-1}}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right); \left(\frac{7, 2^{k-1}}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right)$$

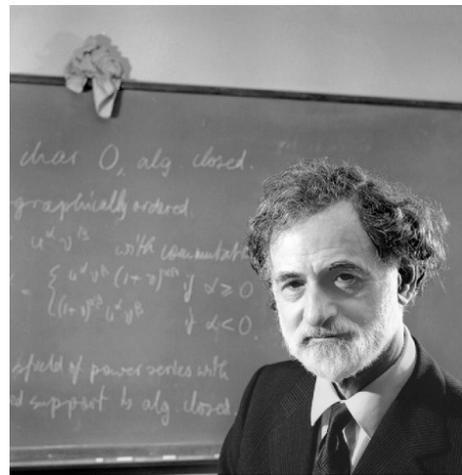
Faltan las pruebas de algunos resultados, los cuales hemos conjeturado a partir de cálculos de invariantes ante isomorfismo como son el número de involuciones, número de elementos de cuadrado nulo, etc. que sugieren o descartan isomorfismos. Una vez completado el estudio, tendremos resuelto de problema de cuántos anillos de cuaternios de Hamilton generalizados existen, salvo isomorfismo, sobre \mathbb{Z}_n .

9.3.3. ANILLOS REVERSIBLES NO SIMÉTRICOS DE 256 ELEMENTOS

Una de las áreas de mayor interés y actividad de la teoría de anillos en las últimas décadas es la relacionada con la conmutatividad de los divisores de cero. La simetría de un anillo fue definida por Lambek en [130]: Un anillo R se denomina simétrico si $abc = 0 \Rightarrow acb = 0$, para todo $a, b, c \in R$. En [93], Cohn introduce el concepto de anillo reversible: un anillo se dice reversible si $xy = 0 \Leftrightarrow yx = 0$. En la literatura, se ha afirmado erróneamente en ocasiones (incluso probado) que reversibilidad y simetría son conceptos equivalentes. En los anillos con unidad, efectivamente, simétrico \Rightarrow reversible. Sin embargo, en anillos sin identidad, simétrico $\not\Rightarrow$ reversible, como se ilustra en un ejemplo de anillo de cuatro elementos sin identidad en [88].



Joachim Lambek (1922-2014).



Paul Moritz Cohn (1924-2006).

En el caso de anillos con unidad, el primer ejemplo de anillo reversible no simétrico más pequeño conocido (hasta entonces) se presentó en [131], a saber: el anillo de grupo $\mathbb{F}_2 Q_8$, donde $Q_8 := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ representa el grupo de cuaterniones. En [119] se demostró que $\mathbb{F}_2 Q_8$ era reversible no simétrico minimal dentro de las álgebras de grupo sobre un cuerpo. Posteriormente en [128] se probó que el mencionado ejemplo también es minimal dentro de la familia de anillos de grupo. Por último, muy recientemente, Steve Szabo en [159], ha probado que no existen anillos unitarios reversibles no simétricos de menos de 256 elementos, aportando además un ejemplo minimal que no es *duo*⁹, a saber:

$$\frac{\mathbb{F}_2 \langle u, v \rangle}{\langle u^3, v^3, u^2 + v^2 + vu, vu^2 + uvu + uvv, u^2vu \rangle}$$

En esta línea hemos iniciado recientemente una colaboración con Steve Szabo (Eastern Kentucky University) que es quien ha establecido que 256 es el cardinal minimal para los anillos reversibles no simétricos. Se pretende explorar los anillos de cuaterniones de Hamilton sobre \mathbb{Z}_4 así como otros anillos de característica 4, donde aparecen nuevos ejemplos de anillos minimales reversibles no simétricos.

⁹Se dice que un anillo es *duo* si todo ideal a un lado es bilátero



Steve Szabo.

Así tenemos el siguiente resultado.

Proposición 9.20. *El único anillo de cuaternios de Hamilton generalizados sobre \mathbb{Z}_{2^k} reversible y no simétrico es:*

$$\left(\frac{-1, -1}{\mathbb{Z}_{2^k}} \right) \cong \mathbb{H}(\mathbb{Z}_{2^k}) = \frac{\mathbb{Z}_{2^k} \langle x, y \rangle}{\langle x^2 + 1, y^2 + 1, xy + yx \rangle}$$

Esto proporciona, cuando $k = 2$, un nuevo ejemplo de anillo con unidad reversible no simétrico minimal (256 elementos), que además tiene la peculiaridad de ser de característica 4, a diferencia de los dos conocidos hasta ahora que son de característica 2.

Asimismo, una familia más general que la de los cuaternios de Hamilton generalizados como la siguiente

$$\mathbb{Z}_4(a, b; \alpha, \beta, \gamma, \delta) := \frac{\mathbb{Z}_4 \langle x, y \rangle}{\langle x^2 - a, y^2 - b^2, yx - \alpha - \beta x - \gamma y - \delta xy \rangle'}$$

parece que puede resultar interesante de cara a encontrar más ejemplos de anillos reversibles no simétricos minimales de característica 4.

Proposición 9.21. *Given $a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_4$, let us assume that $\mathbb{Z}_4(a, b; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ is of order 256. Then, we have a ring isomorphism*

$$\mathbb{Z}_4(a, b; \alpha, \beta, \gamma, \delta) \cong \{x_0 I_4 + x_1 X + x_2 Y + x_3 XY : x_i \in \mathbb{Z}_4\},$$

where the matrices X and Y are given by:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & b & b\gamma \\ 0 & \beta & 0 & b\delta \\ 1 & \gamma & 0 & \alpha \\ 0 & \delta & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

and they satisfy that $Y^2 = bI_4$ and $YX = \alpha I_4 + \beta X + \gamma Y + \delta XY$.

En este escenario podemos realizar una inspección directa que muestra que, de las 4096 posibilidades para $(a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \in (\mathbb{Z}_4)^6$, solo 320 dan lugar a anillos con 256 elementos. En la Tabla 6 proporcionamos todas esas combinaciones posibles para $(a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Como vemos, hay 18 combinaciones de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ que son válidas para cada $a, b \in \mathbb{Z}_4$, mientras que para cada $(a, b) \in \{(0, 0), (1, 1), (1, 0), (0, 1)\}$ obtenemos 8 casos adicionales.

$\forall a, b$																			
α	β	γ	δ																
0	0	0	1																
0	0	0	3																
0	0	2	1																
0	0	2	3																
				$a = b = 0$				$a = b = 1$				$a = 0, b = 1$				$a = 1, b = 0$			
α	β	γ	δ	α	β	γ	δ	α	β	γ	δ	α	β	γ	δ				
0	2	0	1	0	0	0	0	1	1	1	2	0	1	0	0				
0	2	0	3	0	0	0	2	1	1	3	0	0	1	0	2				
0	2	2	1	0	0	2	0	1	3	1	0	0	3	0	0				
0	2	2	3	0	0	2	2	1	3	3	2	0	3	0	2				
1	0	0	3	0	2	0	0	3	1	1	0	2	1	2	0				
2	0	0	1	0	2	0	2	3	1	3	2	2	1	2	2				
2	0	0	3	0	2	2	0	3	3	1	2	2	3	2	0				
2	0	2	1	0	2	2	2	3	3	3	0	2	3	2	2				
2	0	2	3	0	2	2	2	3	3	3	0	2	3	2	2				
2	2	0	1																
2	2	0	3																
2	2	2	1																
2	2	2	3																
3	0	0	3																

Tabla 6: Valores de $(a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ que dan lugar a un anillo de 256 elementos.

De estos 320 anillos hay exactamente 97 no isomorfos, de los cuales 10 son anillos reversibles no simétricos.

Algunos problemas abiertos que pretendemos abordar son los siguientes:

- Encontrar todos los anillos reversibles no simétricos de característica 4, con 256 elementos.
- Encontrar todos los anillos reversibles no simétricos de característica 8 o 16, con 256 elementos, o probar que no existen.
- Para $K = 3$ y $K > 4$, encontrar el anillo reversible no simétrico minimal de característica K .

10. LÍNEA 7: GRAFOS CON VÉRTICES EN UN ANILLO.

10.1. INTRODUCCIÓN

La idea de estudiar la relación entre las propiedades de un anillo R y las propiedades de grafos definidos sobre él es bastante reciente. El primer trabajo en esta disciplina se realizó en 1988 y se debe a Beck (ver [87]). En dicho trabajo, Beck considera el grafo cuyos vértices son los elementos de un anillo conmutativo y dos vértice distintos x e y son adyacentes si y solo si $xy = 0$.

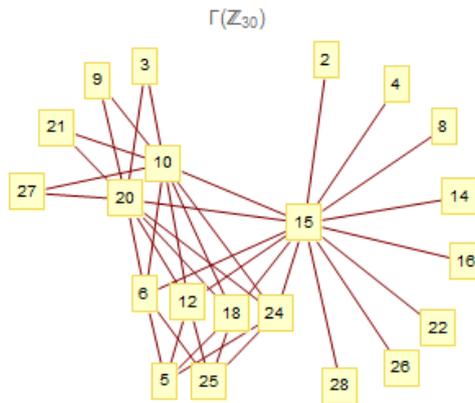


Figura 9: Grafo de divisores de cero con $R = \mathbb{Z}_{30}$.

Más tarde, Anderson y Livingston [81] modificaron ligeramente esta idea, considerando como vértices del grafo solo los divisores de cero no nulos de R , $Z(R)^*$, y la misma condición de adyacencia. Por otra parte, Redmond, en [147] y [146], extiende esta noción de *zero-divisor graph* a anillos, no necesariamente conmutativos, del modo siguiente:

Definición 10.1. Sea R un anillo. Definimos el grafo dirigido $\Gamma(R)$, con conjunto de vértices $Z(R)^*$, donde $x \rightarrow y$ es una arista entre elementos distintos x e y si y solo si $xy = 0$.

Definición 10.2. Sea R un anillo. Definimos el grafo no dirigido $\bar{\Gamma}(R)$, con conjunto de vértices $Z(R)^*$, donde vertices distintos x e y son adyacentes si y solo si

$$xy = 0 \vee yx = 0.$$

Definición 10.3. Sea R un anillo. Definimos el grafo no dirigido $\Gamma_0(R)$, con conjunto de vértices $Z(R)^*$, donde vertices distintos x e y son adyacentes si y solo si

$$xy = 0 \wedge yx = 0.$$

Obviamente, si R es commutative, entonces $\bar{\Gamma}(R) = \Gamma_0(R)$; y, más generalmente, $\bar{\Gamma}(R) = \Gamma_0(R)$ si y solamente si R es un anillo reversible ($xy = 0 \Leftrightarrow yx = 0$, véase [93]).

Una propiedad destacable de $\bar{\Gamma}(R)$, para todo anillo R , es su conexión (véase teorema 10 en [147]).

Teorema 10.1. *Sea R un anillo. Entonces $\bar{\Gamma}(R)$ es un grafo conexo y*

$$\text{diam}(\bar{\Gamma}(R)) \leq 3.$$

Varias propiedades de los grafos $\bar{\Gamma}(R)$ y $\Gamma(R)$ (*Zero-Divisor Graphs*) con diferentes clases de anillos han sido estudiadas en [73, 74, 146]. Sin embargo, ningún trabajo se ha publicado hasta ahora para el grafo $\Gamma_0(R)$, si exceptuamos [146], en donde se limitan a definirlo y mostrar algún ejemplo.

También se ha estudiado con gran profusión el denominado *Commuting Graph* que denotamos aquí por $\hat{\Gamma}(R)$, introducido en [74], considerando como vértices los elementos no centrales de un anillo y la relación de adyacencia dada por: x, y son adyacentes si $xy = yx$. Estos grafos han sido ampliamente estudiados en los últimos años por varios autores [75, 76, 77, 78, 82, 102, 135, 139]. Un resultado central en este contexto es el siguiente (ver [76]):

Proposición 10.1. *Sea \mathbb{F} un cuerpo. Si $\hat{\Gamma}(\mathbb{M}_n(\mathbb{F}))$ es conexo, entonces*

$$4 \leq \text{diam}(\hat{\Gamma}(\mathbb{M}_n(\mathbb{F}))) \leq 6$$

También se ha conjeturado que

$$4 \leq \text{diam}(\hat{\Gamma}(\mathbb{M}_n(\mathbb{F}))) \leq 5$$

Recientemente, C. Miguel, en [134], ha verificado esta conjetura para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, probando el resultado siguiente.

Teorema 10.2. *Sea $n \geq 3$ un entero positivo. Entonces, $\text{diam}(\hat{\Gamma}(\mathbb{M}_n(\mathbb{R}))) = 4$, para $n \neq 4$, y $4 \leq \text{diam}(\hat{\Gamma}(\mathbb{M}_4(\mathbb{R}))) \leq 5$.*

Además de los grafos anteriores, se han estudiado otros conjuntos de vértices y relaciones de adyacencia. Anderson y Badawi, en [80], introducen el denominado *Total Graph* de R , como un grafo simple con todos los elementos de R como vértices y considerando dos vértices distintos x e y adyacentes si y solo si su suma es un divisor de cero. Recientemente, en [83], los autores consideraron el grafo unitario de R (*Unit Graph*), como el gráfico simple con todos los elementos de R como vértices, siendo dos vértices distintos x e y adyacentes si y solo si $x + y \in U(R)$.

10.2. TRABAJOS PREVIOS

10.2.1. COMMUTING GRAPH: $\hat{\Gamma}(R)$.

El Teorema 10.2 dejó todavía abierta la cuestión de si $\text{diam}(\hat{\Gamma}(\mathbb{M}_4(\mathbb{R})))$ era 4 ó 5. Precisamente esta cuestión quedó resuelta en el trabajo que realicé con Oller-Marcén y Carmen Tasis en [56], donde se probó lo siguiente:

Teorema 10.3. *El diámetro de $\hat{\Gamma}(\mathbb{M}_4(\mathbb{R}))$ es igual a 4.*

10.2.2. ZERO-DIVISOR GRAPH: $\bar{\Gamma}(R)$.

En [53], hemos estudiado (junto con Oller-Marcén y C. Miguel) el grafo $\bar{\Gamma}(R)$ en el caso de $R = \mathbb{Z}_n[i, j, k]$ (enteros de Lipschitz módulo n). En este trabajo hemos establecido el número de vértices de dicho grafo y resultados relativos a su diámetro, cintura (girth), así como el número de dominación.

Teorema 10.4. *Sea $n = 2^t p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ la descomposición prima de n . Entonces, el número de vértices en el grafo $\bar{\Gamma}(\mathbb{Z}_n[i, j, k])$ es:*

$$|V(\bar{\Gamma}(\mathbb{Z}_n[i, j, k]))| = \begin{cases} n^4 - \prod_{i=1}^k (p_i^{4\alpha_i} - p_i^{4\alpha_i-1} - p_i^{4\alpha_i-2} + p_i^{4\alpha_i-3}) - 1, & \text{if } t = 0; \\ n^4 - 2^{4t-1} \prod_{i=1}^k (p_i^{4\alpha_i} - p_i^{4\alpha_i-1} - p_i^{4\alpha_i-2} + p_i^{4\alpha_i-3}) - 1, & \text{if } t > 0. \end{cases}$$

Teorema 10.5. *Sea n un entero. Entonces*

$$\text{diam}(\bar{\Gamma}(\mathbb{Z}_n[i, j, k])) = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ es potencia de primo;} \\ 3, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema 10.6. *Para todo entero n , $\text{girth}(\bar{\Gamma}(\mathbb{Z}_n[i, j, k])) = 3$.*

Teorema 10.7. *El número de dominación (domination number) del grafo $\bar{\Gamma}(\mathbb{Z}_p[i, j, k])$, donde p es un primo impar, es $p + 1$.*

Como consecuencia del resultado anterior, podemos calcular fácilmente el número de dominación de $\bar{\Gamma}(\mathbb{Z}_n[i, j, k])$ cuando n es impar libre de cuadrados

Teorema 10.8. *Sea $n = p_1 \cdots p_k$ con p_i primos para todo i . Entonces el número de dominación (domination number) del grafo $\bar{\Gamma}(\mathbb{Z}_n[i, j, k])$ es $k + p_1 + \dots + p_k$.*

Y de forma similar se establec el resultado siguiente

Teorema 10.9. *Let $n = 2^s p_1 \cdots p_k$ with p_i is prime for every i and $s > 0$. Then, the domination number of the zero divisor graph $\bar{\Gamma}(\mathbb{Z}_n[i, j, k])$ is $1 + k + p_1 + \dots + p_k$.*

Quedaron pendientes dos cuestiones que siguen siendo problemas abiertos:

1. Para un número primo impar p y un entero positivo t , ¿cuál es el número de dominación de $\bar{\Gamma}(\mathbb{Z}_{p^t}[i, j, k])$?
2. Sea t un entero positivo y \mathbb{F}_q el cuerpo finito con $q = p^t$ elementos. Para un entero positivo $n > 2$, ¿Cuál es el número de dominación del grafo $\bar{\Gamma}(M_n(\mathbb{F}_q))$?

10.3. TRABAJOS EN PERSPECTIVA.

10.3.1. EL GRAFO DE ANTICONMUTACIÓN: x E y ADYACENTES SI $xy + yx = 0$.

En esta línea pretendemos estudiar el grafo, que podríamos denominar de *anticonmutación*, y que, hasta donde conocemos, no ha sido estudiado, definido sobre los elementos no nulos de un anillo de la siguiente forma.

Definición 10.4. Sea R un anillo. Definimos el grafo no-dirigido $\tilde{\Gamma}(R)$ con conjunto de vértices R^* y relación de adyacencia:

$$x \leftrightarrow y \Leftrightarrow xy + yx = 0$$

Cuando el anillo R es conmutativo y de característica impar, la parte no aislada del grafo en cuestión coincide con $\Gamma_0(R)$; mientras que, si R es conmutativo y de característica es 2, se trata del grafo completo. Sin embargo, parece resultar interesante cuando R no es conmutativo, en especial cuando R es el anillo de matrices cuadradas sobre un cuerpo. Algunos de los primeros resultados que se obtienen son los siguientes:

Proposición 10.2. Sea R un anillo descomponible. Entonces $\tilde{\Gamma}(R)$ es conexo si y solo si no tiene vértices aislados; además, ignorando los vértices aislados, es conexo con diámetro a lo sumo 4.

Proposición 10.3. Si \mathbb{F} es un cuerpo de característica distinta de 2, entonces en $\tilde{\Gamma}(\mathbb{M}_2(\mathbb{F}))$ una matriz no nula $M \in \mathbb{M}_2(\mathbb{F})$ es vértice aislado si y solo si M es inversible y $\text{Tr}(M) \neq 0$.

Proposición 10.4. Si \mathbb{F} es un cuerpo de característica 2, entonces $\tilde{\Gamma}(\mathbb{M}_2(\mathbb{F}))$ es conexo de diámetro 2. Si $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ es un cuerpo finito, entonces $\tilde{\Gamma}(\mathbb{M}_2(\mathbb{F}))$ tiene $1 + q + q^2$ cliques de tamaño $q^2 - q$ y $q - 1$ vértices que son adyacentes a todos los demás.

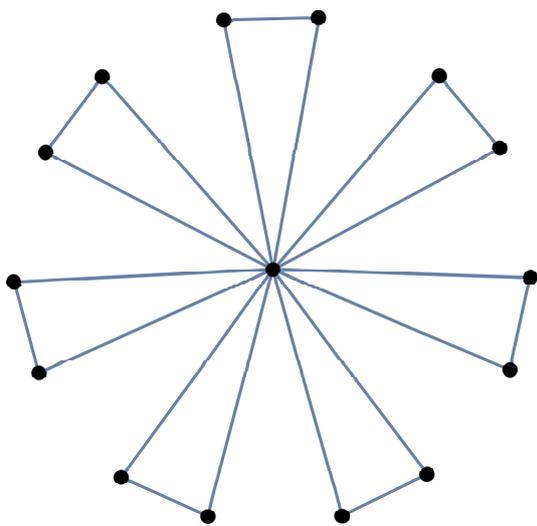


Figura 10: $\tilde{\Gamma}(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_2))$.

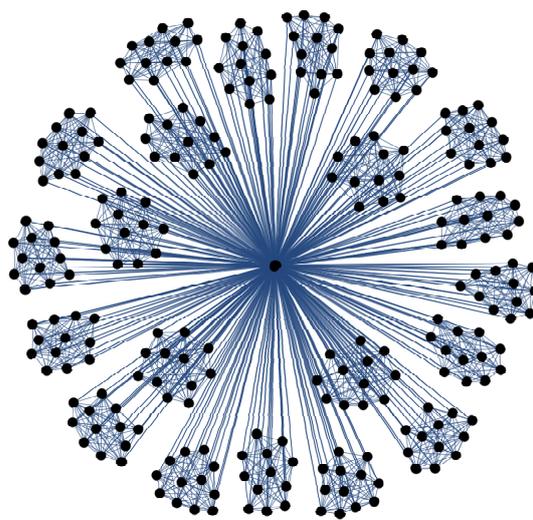


Figura 11: $\tilde{\Gamma}(\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_4))$.

Proposición 10.5. En $\tilde{\Gamma}(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_n))$ una matriz M es vértice aislado si y solo si se cumplen las dos siguientes condiciones

- i) n es impar.
- ii) $\gcd(n, \text{Tr}(M) \cdot \det(M)) > 1$.

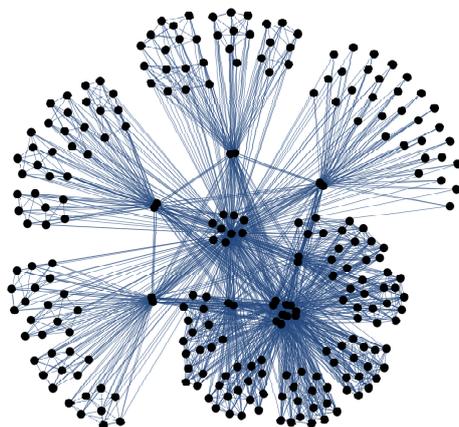


Figura 12: $\tilde{\Gamma}(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_4))$.

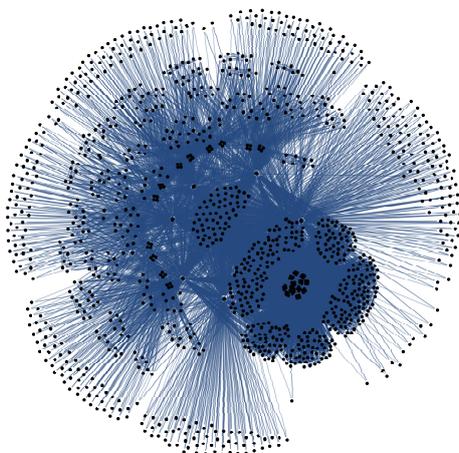


Figura 13: $\tilde{\Gamma}(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_6))$.

Proposición 10.6. Si p es un primo impar la parte no aislada del grafo $\tilde{\Gamma}(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_p))$ tiene siempre $\frac{1}{2}p(p+1)$ componentes conexas que son completos bipartitos $K_{2p-2, 2p-2}$ y otra componente conexas de diámetro 2. Su número total de vértices no aislados es:

$$p(2p^2 - 1) - 1$$

Proposición 10.7. Si p es un primo impar y $s > 1$ la parte no aislada del grafo $\tilde{\Gamma}(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_{p^s}))$ es siempre conexas con diámetro 3 y su número de vértices es:

$$p^{4s-3}(2p^2 - 1) - 1$$

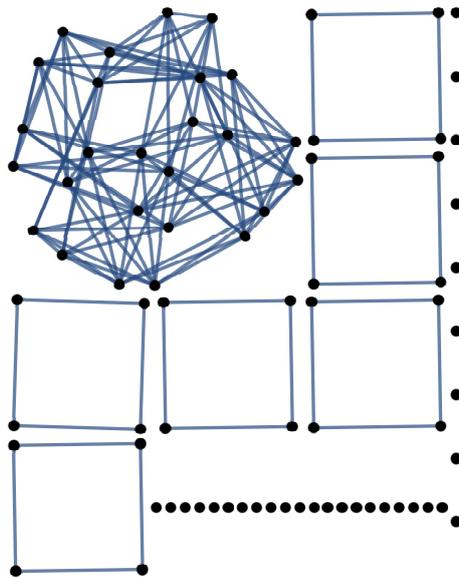


Figura 14: $\tilde{\Gamma}(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_3))$.

Proposición 10.8. En $\tilde{\Gamma}(\mathbb{M}_d(\mathbb{F}))$ una matriz M es vértice aislado si y solo si es inversible y no tiene dos valores propios en la clausura algebraica de \mathbb{F} que sumen cero. Además, si $d > 2$, el conjunto de vértices no aislados de $\tilde{\Gamma}(\mathbb{M}_d(\mathbb{F}))$ es un subgrafo conexo de diámetro 4. En particular, si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, una matriz es vértice aislado si y solo si ninguno de sus valores propios es imaginario puro.

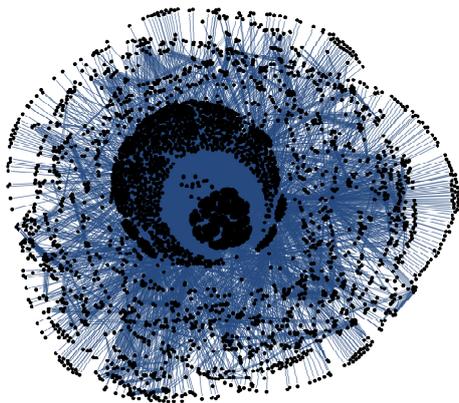


Figura 15: Parte no aislada de $\tilde{\Gamma}(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_9))$.

10.3.2. EL GRAFO $\Gamma_0(R)$: x E y ADYACENTES SI $xy = yx = 0$.

El grafo $\Gamma_0(R)$ no ha recibido apenas atención, seguramente por la escasez de aristas y la existencia de diferentes ejemplos de grafos no conexos que sugiere que estos grafos no resultan, en general, muy interesante. Por ejemplo, en el caso de $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix}$, $\Gamma_0(R)$ no es conexo con tan solo dos aristas (ver figura 26), mientras que $\bar{\Gamma}_0(R)$ es conexo con 8 aristas (ver figura 17).

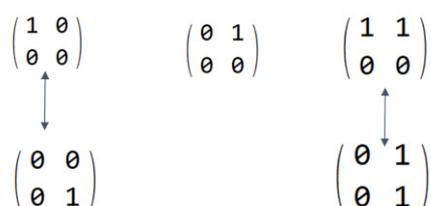


Figura 16: $\Gamma_0(R)$ no conexo con 2 aristas.

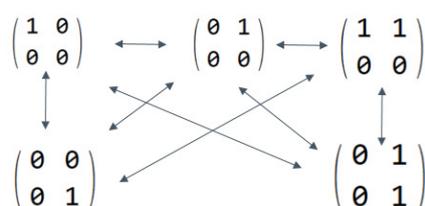


Figura 17: $\bar{\Gamma}_0(R)$ conexo con 8 aristas.

Sin embargo, son muchas las familias de anillos para los que $\Gamma_0(R)$ es conexo, como es el caso de los anillos de matrices cuadradas de dimensión mayor que 2 sobre anillos unitarios finitos.



Pascual Jara Martínez.

En colaboración con Pascual Jara Martínez (Universidad de Granada), estamos estudiando el grafo $\Gamma_0(R)$, poniendo el foco en el caso de que R sea el anillo de matrices

cuadradas sobre un anillo conmutativo. Algunos de los resultados que se obtienen son los siguientes.

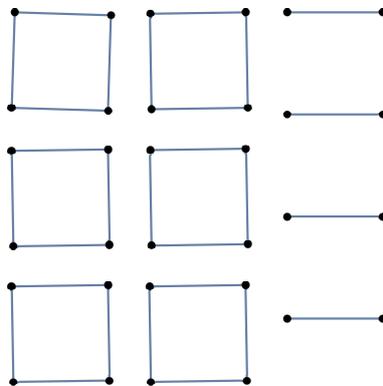


Figura 18: $\Gamma_0(M_2(\mathbb{Z}_3))$.

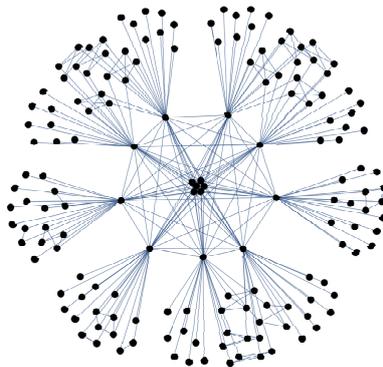


Figura 19: $\Gamma_0(M_2(\mathbb{Z}_4))$.

Proposición 10.9. *Sea R un anillo descomponible. Entonces $\Gamma_0(R)$ es conexo si y solo si no tiene vértices aislados; además, ignorando los vértices aislados, es conexo con diámetro a lo sumo 4.*

Teorema 10.10. *Si \mathbb{F} es un cuerpo o dominio de integridad y $d > 2$, entonces $\Gamma_0(\mathbb{M}_d(\mathbb{F}))$ es conexo; además, para toda $M \in \mathbb{M}_d(\mathbb{F})$ se cumple:*

$$\text{excentricidad}(M) = \begin{cases} 4, & \text{si } \text{rango}(M) = d - 1 ; \\ 3, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{diam}(\Gamma_0(\mathbb{M}_d(\mathbb{F})) &= 4; \\ \text{rad}(\Gamma_0(\mathbb{M}_d(\mathbb{F})) &= 3; \\ \text{girth}(\Gamma_0(\mathbb{M}_d(\mathbb{F})) &= 3. \end{aligned}$$

Teorema 10.11. *Si \mathbb{F} es un cuerpo o dominio de integridad entonces $\Gamma_0(\mathbb{M}_2(\mathbb{F}))$ no es conexo; además, sus componentes conexas son grafos bipartitos completos y grafos completos (cliques). Si \mathbb{F} es cuerpo finito de tamaño q , $\Gamma_0(\mathbb{M}_2(\mathbb{F}))$ tiene $1 + q$ componentes conexas de tamaño $q - 1$,*

que son grafos completos, y $\frac{q^2+q}{2}$ componentes conexas que son grafos bipartitos completos $(K_{q-1,q-1})$ de tamaño $2q - 2$.

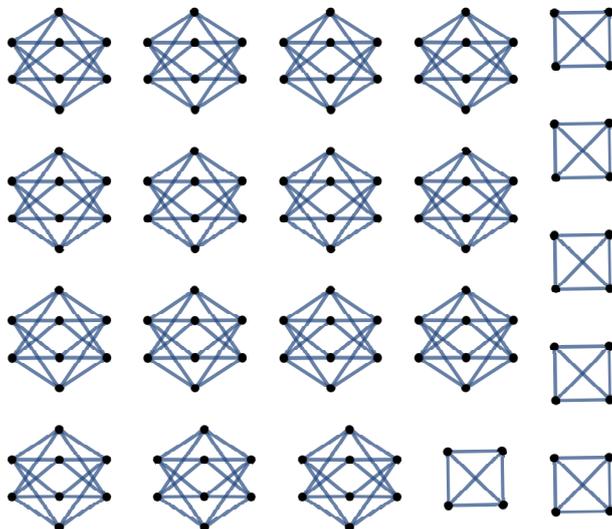


Figura 20: $\Gamma_0(M_2(\mathbb{Z}_5))$.

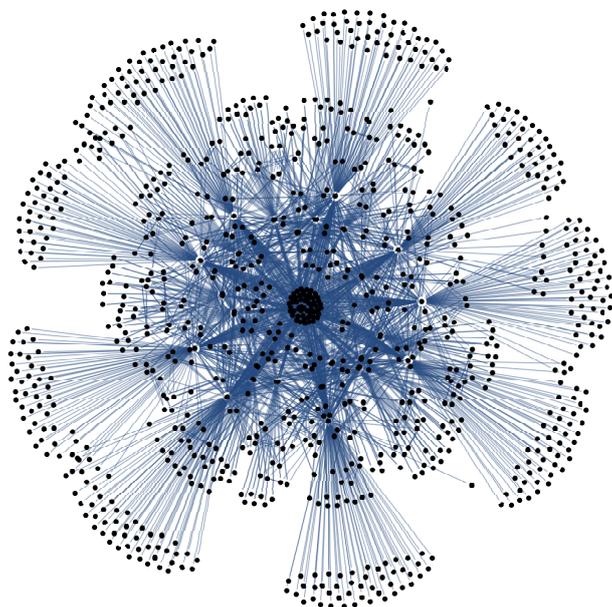


Figura 21: $\Gamma_0(M_2(\mathbb{Z}_6))$.

GRAFOS ASOCIADOS A LOS CUATERNIOS DE HAMILTON GENERALIZADOS SOBRE \mathbb{Z}_4 . A continuación tenemos los grafos Γ_0 asociados a los siete anillos de cuaternios de Hamilton generalizados sobre \mathbb{Z}_4 , todos ellos conexos. Los 5 primeros son reversibles y, en consecuencia, $\Gamma_0(R) = \bar{\Gamma}(R)$. En los 3 finales, no reversibles, se muestran ambos grafos, Γ_0 y $\bar{\Gamma}$.

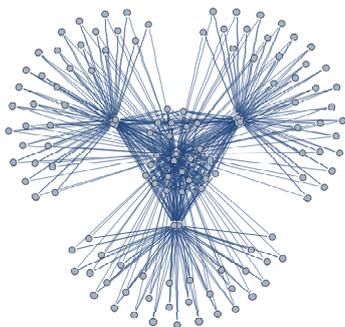


Figura 22: $\Gamma_0 \left(\left(\frac{-1, -1}{\mathbb{Z}_4} \right) \right)$.

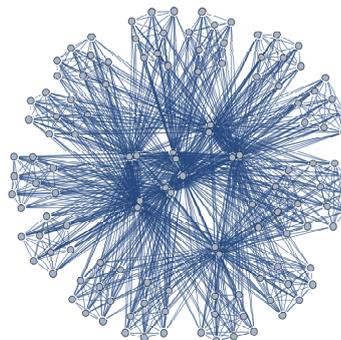


Figura 23: $\Gamma_0 \left(\left(\frac{0, 0}{\mathbb{Z}_4} \right) \right)$

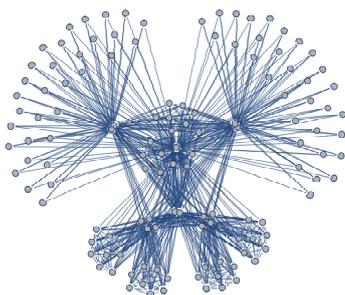


Figura 24: $\Gamma_0 \left(\left(\frac{0, 0}{\mathbb{Z}_4} \right) \right)$

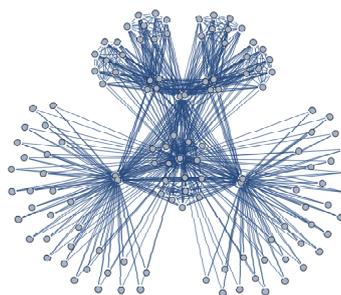


Figura 25: $\Gamma_0 \left(\left(\frac{0, -1}{\mathbb{Z}_4} \right) \right)$

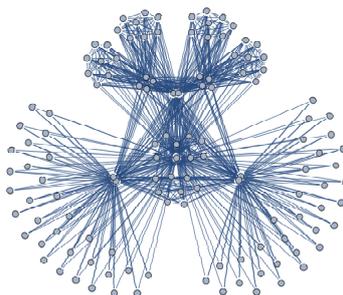


Figura 26: $\Gamma_0 \left(\left(\frac{2, 2}{\mathbb{Z}_4} \right) \right)$.

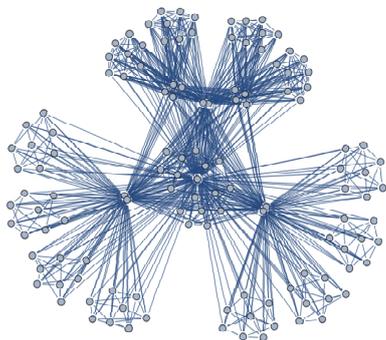


Figura 27: $\Gamma_0\left(\left(\frac{0,1}{\mathbb{Z}_4}\right)\right)$

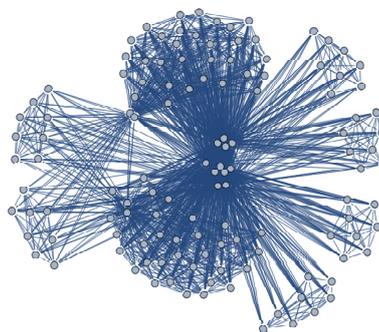


Figura 28: $\bar{\Gamma}\left(\left(\frac{0,1}{\mathbb{Z}_4}\right)\right)$

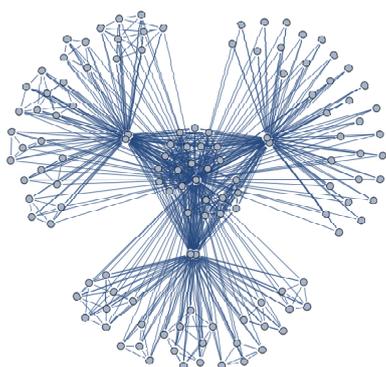


Figura 29: $\Gamma_0\left(\left(\frac{-1,1}{\mathbb{Z}_4}\right)\right)$

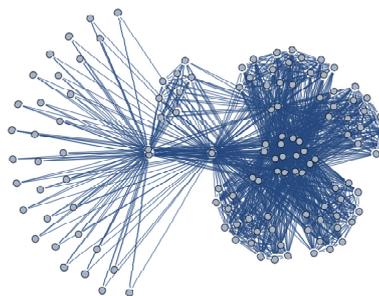


Figura 30: $\bar{\Gamma}\left(\left(\frac{-1,1}{\mathbb{Z}_4}\right)\right)$

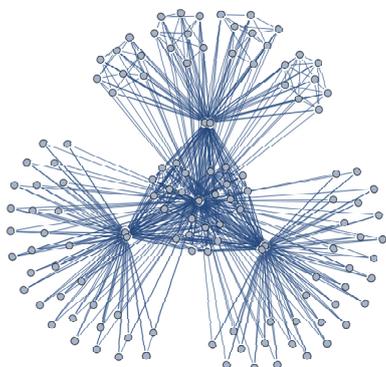


Figura 31: $\Gamma_0\left(\left(\frac{1,2}{\mathbb{Z}_4}\right)\right)$

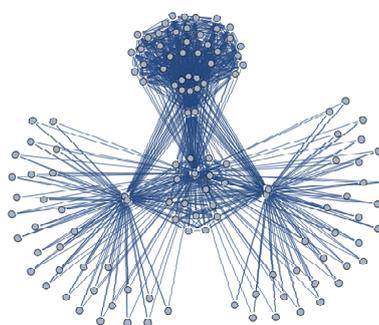
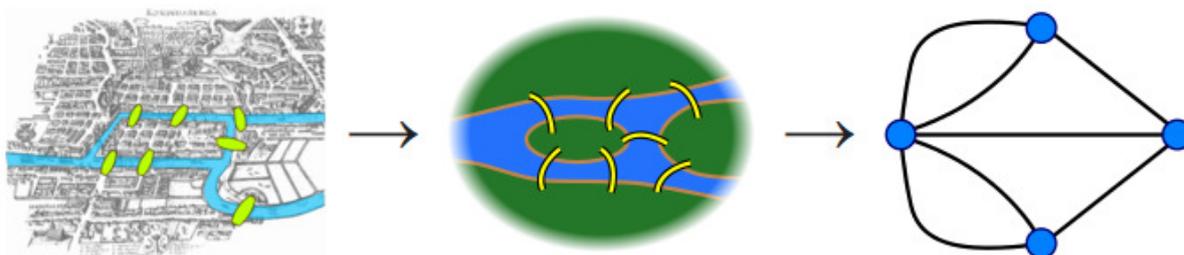


Figura 32: $\bar{\Gamma}\left(\left(\frac{1,2}{\mathbb{Z}_4}\right)\right)$

11. LÍNEA 8: GRAFOS DESTRUCTIBLES.

11.1. INTRODUCCIÓN

La solución negativa al famoso *Problema de los Puentes de Königsberg*, encontrada por Leonhard Euler en 1736, se interpreta como la imposibilidad de realizar un paseo atravesando cada uno de los 7 puentes una sola vez, volviendo al punto de partida. Ni siquiera permitiendo que el paseo comience y termine en diferentes puntos, el famoso problema tiene solución.



Puentes de Königsberg y su grafo asociado.



Sellos conmemorativos del 250 y 300 aniversario del nacimiento de Leonhard Paul Euler (1707-1783).

Los grafos eulerianos y los semieulerianos pueden ser interpretados como un conjunto de islas (vértices) unidas entre si por puentes (aristas) endebles (que no soportan más de un paso sobre ellos) dispuestos de tal modo que es posible realizar un paseo destruyéndolos todos. En el primer caso, el paseo debe comenzar y terminar en el mismo vértice y, en el segundo, pueden ser vértices distintos. Esta idea sugiere una generalización de lo anterior permitiendo destruir los puentes, no solo al atravesarlos, sino también volándolos desde una isla desde la que resulten accesibles. Es fácil darse cuenta de que en el mencionado problema, con esta posibilidad de voladura, sí es posible destruirlos todos y regresar al punto de partida. En esta idea se inspira la presente línea de investigación. En el marco de la Teoría de Grafos, pretendemos estudiar la propiedad de ser *destructibles* en el sentido de que existe un circuito/camino en el grafo de tal modo que todas las aristas sean accesibles desde algún punto del camino (se vuelan desde ese punto). Al igual que ocurre con los grafos eulerianos y semieulerianos,

aquí es posible la distinción de ser destructible utilizando un camino cerrado o no. En términos más formales, consideraremos las siguientes definiciones.

Definición 11.1. Sea G un grafo. Diremos que G es *circuito-destructible* si existe un circuito que es cobertura de vértices¹⁰ de G .

Definición 11.2. Sea G un grafo. Diremos que G es *camino-destructible* si existe un camino que es cobertura de vértices de G .

Inmediatamente se observan varios tipos de grafos destructibles en cada uno de los dos sentidos. Naturalmente, los eulerianos y los semieulerianos son respectivamente circuito-destructibles y camino-destructibles sin necesidad de hacer uso de la posibilidad de voladura de puentes. Los grafos hamiltonianos son también ejemplo de circuito-destructibles ya que un paseo hamiltoniano no repite aristas y todas las no utilizadas en el paseo son accesibles desde algún vértice. También son circuito-destructibles los grafos hipo-hamiltonianos ya que prescindiendo de cualquiera de sus vértices el grafo se torna hamiltoniano. Los grafos completos y los grafos completos bipartitos son otros ejemplos de grafos camino-destructibles. Los grafos estrella son un ejemplo extremo: el grafo se puede destruir con una voladura múltiple desde el centro sin necesidad de realizar ningún movimiento.

Todo lo anterior constituye la idea motivadora de esta línea de investigación que estoy desarrollando con Susana Clara López Masip (Universidad de Lleida).



Susana Clara López Masip.

11.2. TRABAJOS REALIZADOS.

En esta línea tan solo hemos presentado una ponencia introductoria en un congreso de teoría de grafos (*6th Gdansk Workshop on Graph Theory*, [115]) celebrado en julio de 2019 en la ciudad polaca de Gdansk. Estamos preparando una primera publicación que irá en la línea de lo que comentaré a continuación.

¹⁰Una cobertura de vértices (en inglés, *vertex cover*) o simplemente cobertura de un grafo, es un conjunto de vértices tales que cada arista del grafo es incidente a al menos un vértice del conjunto.

11.3. TRABAJOS EN PERSPECTIVA.

11.3.1. GRAFOS NO DESTRUCTIBLES MINIMALES.

Dada una familia de grafos que satisfacen cierta propiedad, resulta interesante el reto de encontrar los grafos destructibles minimales en el sentido de poseer el menor número de vértices o aristas. A continuación tenemos algunos resultados, problemas abiertos y conjeturas al respecto.

Proposición 11.1. *El grafo conexo minimal no camino-destructible es el grafo resultante de subdividir en dos cada arista del grafo estrella de tres aristas (Fig. 33).*

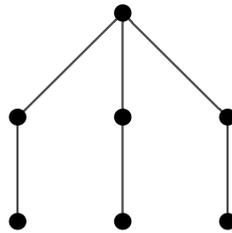


Figura 33: Grafo minimal conexo que no es camino-destructible.

El grafo minimal anterior es un grafo sin ciclos (árbol). Naturalmente ningún árbol puede ser circuito-destructible, el siguiente resultado establece la minimalidad dentro de la familia de grafos que no son árboles.

Proposición 11.2. *El grafo conexo minimal no circuito-destructible que no es un árbol, es el grafo triángulo identificando uno de sus vértices con un grafo camino de longitud 2 (Fig. 34).*



Figura 34: Grafo minimal conexo, no circuito-destructible, que no es árbol.

Notar que los grafos referidos en los resultados anteriores contienen aristas y vértices de corte. Los siguientes resultados establecen el grafo no camino-destructible minimal y el no circuito-destructible minimal sin aristas de corte (2-edge-connected) ni vértices de corte (2-vertex-connected).

Proposición 11.3. *El grafo conexo minimal no circuito-destructible libre de aristas (o vértices) de corte es el grafo de Figura 35. El grafo conexo minimal no camino-destructible libre de aristas de corte es el grafo de la Figura 36. La minimalidad puede entenderse atendiendo tanto al número de vértices como de arista.*

Ambos grafos tienen arista-conectividad y vértice-conectividad 2: prescindiendo de menos de dos vértices (o de aristas) el grafo resultante sigue siendo conexo. Esto da pie a las siguientes preguntas:

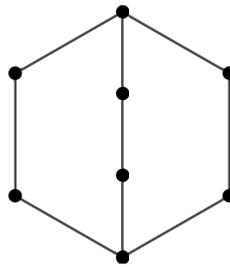


Figura 35: Grafo minimal conexo, no circuito-destructible, sin aristas de corte.

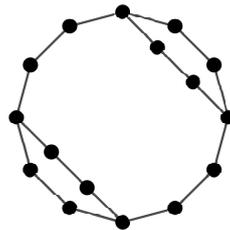


Figura 36: Grafo minimal conexo, no camino-destructible, sin aristas de corte.

Problema 11.1. *Cuál será el grafo minimal de vértice-conectividad 3 (o arista-conectividad 3) que no sea destructible.*

Y, naturalmente, tendremos idéntico problema para cualquier orden de conectividad.

Problema 11.2. *Cuál es el grafo minimal de vértice-conectividad k (o arista-conectividad k) que no es destructible.*

11.3.2. MINIMALIDAD EN GRAFOS CONEXOS CÚBICOS Y SIMÉTRICOS.

Otro interesante problema de minimalidad está relacionado con la familia de grafos conexos cúbicos y simétricos (connected cubic symmetric graph). Todos los que tienen menos de 2048 vértices son hamiltonianos a excepción del grafo de Petersen¹¹ (10 vértices) y el grafo de Coxeter¹² (28 vértices) (ver [96]). Tanto el grafo de Petersen (figura 37) como el grafo de Coxeter (figura 38) son circuito-destructibles, de modo que podemos afirmar que no se conoce (ni existe con menos de 2048 vértices) ningún grafo conexo cúbico y simétrico que no sea circuito-destructibles. De ahí que resulte interesante la siguiente cuestión.

¹¹Julius Peter Christian **Petersen** se interesó en diversas áreas de las matemáticas, tales como la geometría, análisis complejo, teoría de números y teoría de grafos. Su trabajo en teoría de grafos significó una contribución fundamental para la teoría de grafos moderna. En 1898, presentó un contraejemplo para una aclamada conjetura de Tait que hoy se conoce como grafo de Petersen.

¹²Harold Scott MacDonald **Coxeter** es considerado como un importante geómetra del siglo XX. Nació en Londres, trabajó la mayor parte de su vida en Canadá. Educado en la Universidad de Cambridge, trabajó desde 1936 durante cerca de 60 años en la Universidad de Toronto publicando doce libros y más de 200 textos académicos. Su trabajo principal fue en geometría, destacando en teoría de polítopos, geometría no euclídea, teoría de grupos y combinatoria. En 1997 recibió la medalla Sylvester de la Royal Society por sus aportaciones en geometría.

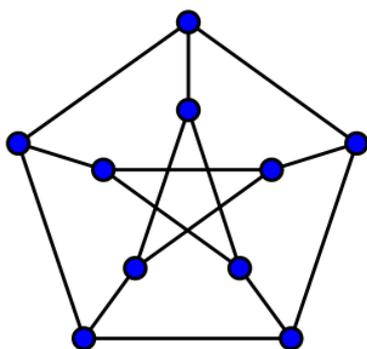


Figura 37: Grafo de Petersen.

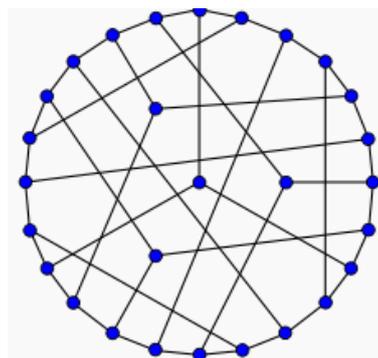
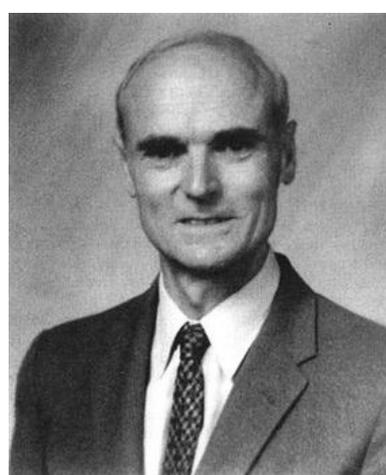


Figura 38: Grafo de Coxeter.



Julius Petersen (1839–1910).



Donald Coxeter (1907–2003).

Problema 11.3. *Cuál es el grafo minimal (si existe) conexo cúbico y simétrico que no es destructible.*

11.3.3. MINIMALIDAD EN GRAFOS VÉRTICE-TRANSITIVOS.

En la familia de los grafos vértice-transitivos (Vertex-Transitive Graph) solamente se conocen cinco conexos no hamiltonianos: el grafo completo de dos elementos, el grafo de Petersen, el grafo de Coxeter y los grafos de Petersen y de Coxeter en los que se sustituye cada vértice por un triángulo (figuras 39 y 40). Se ha conjeturado en [114] que estos 5 son los únicos. Los dos últimos no son circuito-destructibles e ignoramos si son camino-destructibles; y, de ahí, el siguiente problema.

Problema 11.4. *Cuál es el grafo minimal vértice-transitivo conexo que no es destructible.*

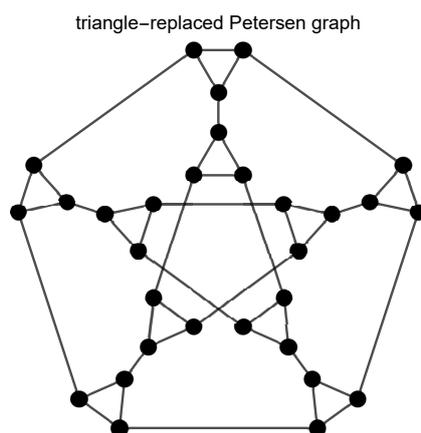


Figura 39: Grafo de Petersen al sustituir vértices por triángulos.

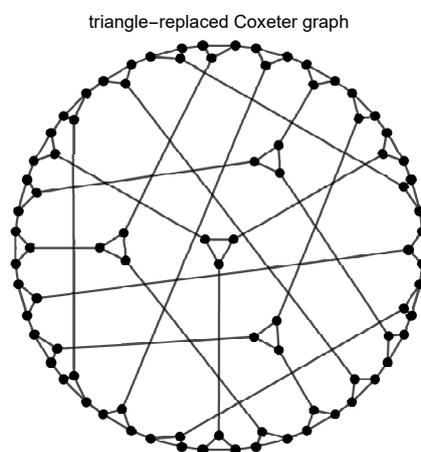


Figura 40: Grafo de Coxeter al sustituir vértices por triángulos.

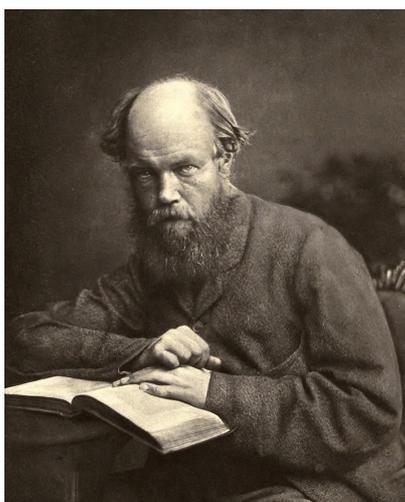
11.3.4. MINIMALIDAD EN GRAFOS CÚBICOS PLANOS 3-CONNECTADOS.

La conjetura de Tait (Tait's Hamiltonian Graph Conjecture) afirma que todo grafo cúbico plano 3-conectado es hamiltoniano. Fue propuesta en 1884 por P.G. Tait¹³ y refutada en 1946 por W.T. Tutte¹⁴, quien construyó un contraejemplo con 69 aristas y 46 vértices (Figura 41). El grafo de Barnette-Bosák-Lederberg (Figura 42) fue el primer contraejemplo minimal (38 vértices) encontrado de la conjetura de Tait, el cual fue descubierto por Lederberg (1965) y parece que también por D. Barnette y J. Bosák, de modo independiente, al mismo tiempo. Holton y McKay (1988) [122] presentaron posteriormente varios contraejemplos de 38 vértices.

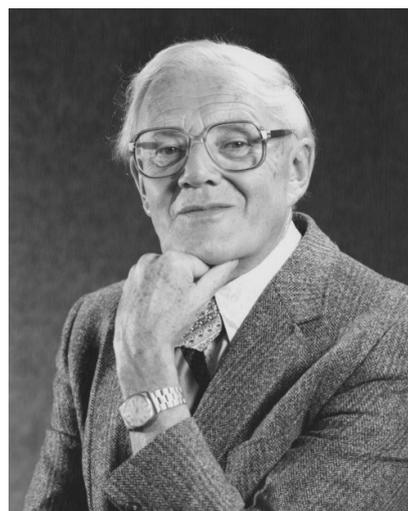
Los grafos de Barnette-Bosák-Lederberg y de Tutte son ambos circuito-destructibles, como se muestra en las figuras 43 y 44, así como otros varios de los contraejemplos de la conjetura de Tait (figura 45). Y, de ahí, el siguiente problema.

¹³Peter Guthrie **Tait** (1832-1901). Fue un físico matemático y pionero en termodinámica de origen escocés. Es muy ampliamente conocido por sus investigaciones en teoría de nudos y, en la teoría de grafos, principalmente por las conjeturas de Tait.

¹⁴William Thomas **Tutte** (1917-2002). Su investigación en el campo de la teoría de grafos resultó ser de notable importancia y de gran influencia en la teoría de grafos moderna.



Peter Guthrie Tait (1832-1901).



William Thomas Tutte (1917-2002).

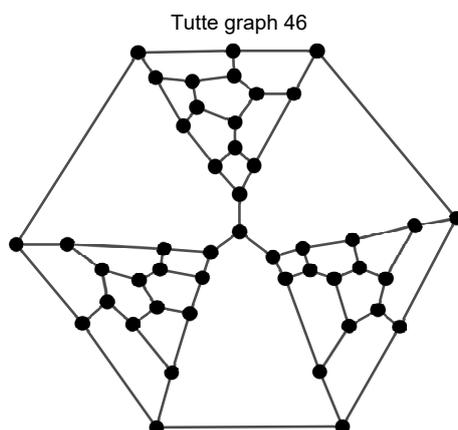


Figura 41: Grafo de Tutte, primer contraejemplo de la conjetura de Tait.

Problema 11.5. *Cuál es el grafo minimal 3-conectado plano cúbico que no es destructible.*

11.3.5. MINIMALIDAD EN GRAFOS 3-CONECTADOS, CÚBICOS Y BIPARTITOS.

Tutte (1971) conjeturó que todos los grafos 3-conectados, cúbicos y bipartitos (3-connected bicubic graphs) son Hamiltonianos (Conjetura de Tutte). El grafo de Horton de 96 vértices (figura 46) constituyó el primer contraejemplo de esta conjetura [116]. El grafo de Georges, figura 47, es un grafo de 50 vértices que constituye en la actualidad el contraejemplo más pequeño de la conjetura de Tutte (ver [111]). Ignoramos si este grafo es destructible en alguno de los dos sentidos y de ahí la siguiente pregunta.

Problema 11.6. *Cuál es el grafo minimal 3-conectado plano cúbico bipartito que no es destructible.*

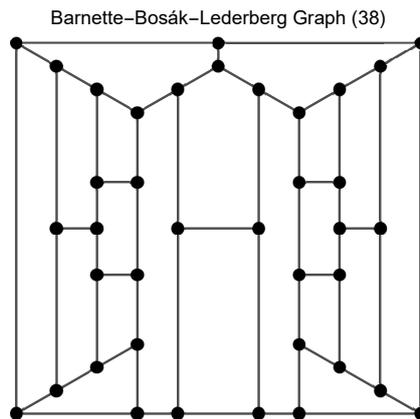


Figura 42: Contraejemplo minimal de la conjetura de Tait.

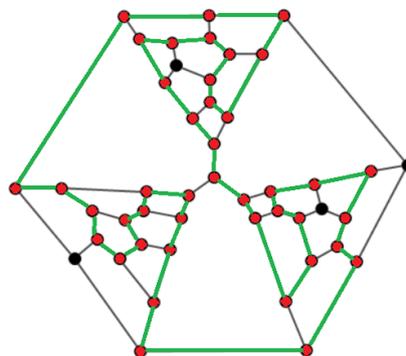


Figura 43: Circuito (vértices en rojo y aristas en verde) que es cobertura de vértices en el Grafo de Tutte.

11.3.6. COBERTURA DE VÉRTICES MINIMAL DE GRAFOS DESTRUCTIBLES.

Cuando un grafo es destructible, se plantea la cuestión de cuál es la longitud mínima de los circuitos/caminos cuya cobertura de vértices es G .

Definición 11.3. Denotaremos por $\beta_c(G)$ (res. $\beta_t(G)$) al tamaño mínimo de la cobertura de vértices de G que induce un circuito (resp. camino). Si G no es circuito-destructible (res. camino destructible) pondremos $\beta_c(G) = \infty$ (resp. $\beta_t(G) = \infty$).

Un ejemplo de grafo G con $\beta_c(G) = \infty$ se muestra en Fig. 35. Notar que $\beta_t(G) = 6$.

A continuación algunos sencillos resultados.

Proposición 11.4. Sea C_n y K_n el grafo ciclo y el grafo completo de orden $n > 3$, respectivamente. Entonces,

(i) $\beta_c(C_n) = n$,

(ii) $\beta_c(K_n) = n - 1$.

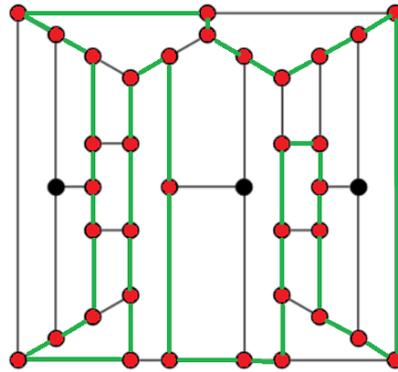


Figura 44: Circuito (vértices en rojo y aristas en verde) que es cobertura de vértices en el Grafo de Barnette-Bosák-Lederberg.

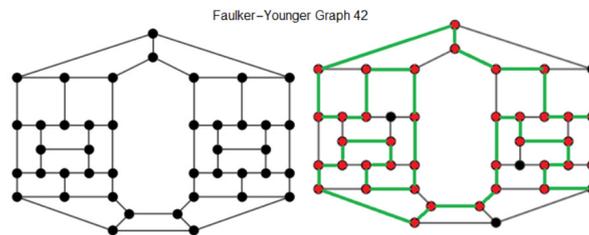


Figura 45: Circuito (vértices en rojo y aristas en verde) que es cobertura de vértices en el Grafo de Faulker-Younger de 42 vértices.

Proposición 11.5. Sea $K_{m,n}$ el grafo bipartito completo de orden $m + n$, con $m, n \geq 2$. Entonces

$$\beta_c(K_{m,n}) = 2 + \min\{m, n\}.$$

Proposición 11.6. Sea Q_k el grafo hypercubo k -dimensional. Si $k > 2$, entonces,

$$\beta_c(Q_k) \leq 2^k - 2^{k-2}.$$

Además, $\beta_c(Q_1) = \infty$ y $\beta_c(Q_2) = 4$.

GRAFOS DE PETERSEN GENERALIZADOS. Los grafos de Petersen generalizados, $P(n, k)$, son una familia de grafos cúbicos formados por la conexión de los vértices de un n -polígono regular con los vértices correspondientes de un n -polígono estrellado (véase en la figura 48 los casos con 16 vértices, $P(8, k)$). Estos grafos incluyen el grafo de Petersen y generalizan una de las formas de construirlo. La familia de los grafos de Petersen generalizados fue introducida en 1950 por H.S. Coxeter [97] y fueron así denominados en 1969 por Mark Watkins [169].

Alspach demostró en [79] que $P(n, k)$ es hamiltoniano si y solo si no es $P(n, 2) \cong P(n, n - 2) \cong P(n, (n - 1)/2) \cong P(n, (n + 1)/2)$, cuando $n \equiv 5 \pmod{6}$, ni $P(n, n/2)$, cuando $n = 0 \pmod{4}$ y $n \geq 8$. Un gráfico no hamiltoniano G se llama *hipo hamiltoniano* si $G - v$ es hamiltoniano para cualquier $v \in V(G)$; obviamente, cualquier grafo hipo-hamiltoniano es circuito-destructible. Bondy demostró en [89] que $P(n, 2)$ es hipo-hamiltoniano si y solo si $n \equiv 5 \pmod{6}$.

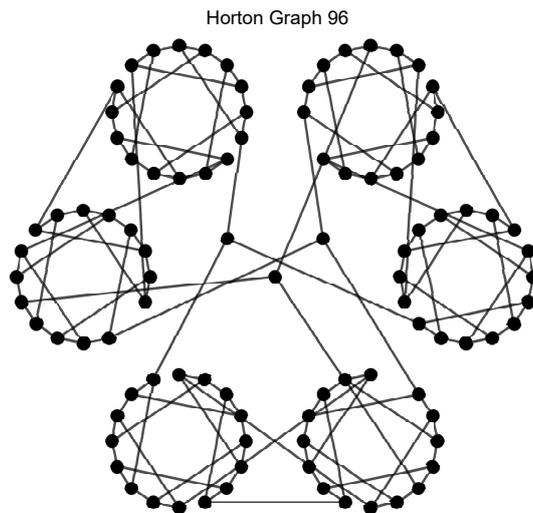


Figura 46: Primer Contraejemplo encontrado de la conjetura de Tutte.

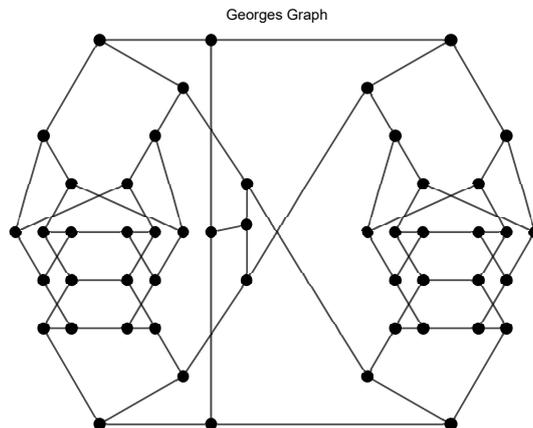


Figura 47: Contraejemplo minimal de la conjetura de Tutte.

Proposición 11.7. El grafo de Petersen generalizado $P(n, k)$, $n \geq 3$ y $1 \leq k \leq n - 1$, no es circuito-destructible si y solo si $n \equiv 0 \pmod{4}$, $k = n/2$ y $n \geq 8$. Además $\beta_c(P(n, n/2)) = 2n$.

El valor de $\beta_c(P(n, k))$ se puede determinar para ciertos valores de k .

Proposición 11.8. Sea $P(n, k)$ un grafo generalizado de Petersen con $n \geq 4$ y $1 \leq k \leq \lceil (n - 1)/2 \rceil$. Entonces,

$$(i) \beta_c(P(n, 1)) = 2n - F, \text{ donde } F = \begin{cases} \lfloor n/4 \rfloor + \lfloor (n+1)/4 \rfloor & n = 4l + i, i \in \{0, 2, 3\} \\ \lfloor n/4 \rfloor + \lfloor (n+1)/4 \rfloor - 1, & n = 4l + 1. \end{cases}$$

$$(ii) \beta_c(P(n, 2)) \leq 2n - F, \text{ donde } F = \begin{cases} \lfloor n/3 \rfloor - 1, & n \equiv 4 \pmod{6}, \\ \lfloor n/3 \rfloor, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Recordemos que, por la proposición 11.7, para $n \geq 3$ y $1 \leq k \leq n - 1$, $P(n, k)$, no es circuito-destructible si y solo si $n \equiv 0 \pmod{4}$, $k = n/2$ y $n \geq 8$. Para los grafos $P(n, n/2)$, tenemos el resultado siguiente.

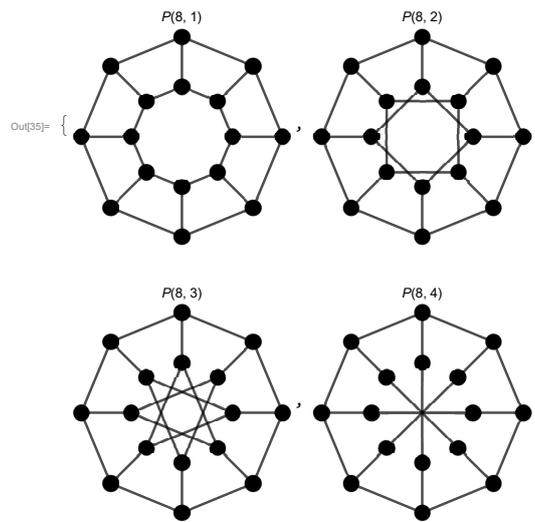


Figura 48: Grafos Generalizados de Petersen $P(8, k)$.

Proposición 11.9. *El grafo $P(n, n/2)$ es camino-destructible y*

$$\beta_t(P(n, n/2)) = \begin{cases} 2n - 2, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 2n - 1, & n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

12. PUBLICACIONES Y OTRAS REFERENCIAS.

A continuación se incluyen las referencias de los 72 artículos (citados o no), entre cuyos autores se encuentra el candidato, publicados en revistas con algún índice de calidad relativo, de las cuales 62 son revistas con JCR. La ordenación es cronológica y cada número de orden se corresponde con un archivo pdf (número.pdf) que se entrega junto al archivo pdf del presente documento (Proyecto Investigador.pdf). Asimismo, cada referencia está vinculada al correspondiente archivo pdf, al cual se accede pinchando sobre el símbolo \leftrightarrow .

Las referencias de la 73 en adelante corresponden a otros trabajos citados en el presente Proyecto Investigador.

12.1. PUBLICACIONES DEL CANDIDATO.

REFERENCIAS

- [1] Bayón, L; Grau, J.M.; Otero, J.A.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (1998)
Optimización del coste de combustible en un sistema hidrotérmico, mediante el método de Ritz.
Información Tecnológica. 9(5), pp. 213–220. \leftrightarrow
- [2] Bayón, L; Grau, J.M.; Suárez, P.M. (2002)
A new formulation of the equivalent thermal in optimization of hydrothermal systems.
Mathematical Problems in Engineering, 8(3), pp. 181–196. \leftrightarrow
JCR: 0.238; 140/156 (Q4); Mathematics, Applied
- [3] Bayón, L; Grau, J.M.; Suárez, P.M. (2004)
A New Algorithm for the Optimization of a Simple Hydrothermal Problem.
Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 9(2), pp. 197–207. \leftrightarrow
JCR: 2.698; 6/236 (Q1); Mathematics, Applied.
- [4] Bayón, L; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2004)
The First Weierstrass-Erdmann Condition in Variational Problems involving Differential Inclusions.
Mathematical Inequalities and Applications. 7(3), pp. 457–469. \leftrightarrow
JCR: 0.125; 179/181 (Q4); Mathematics
- [5] Bayón, L; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2005)
New Developments in the Application of Pontryagin's Principle for the Hydrothermal Optimization.
IMA Journal of Mathematical Control and Information. 22(4), pp. 377–393. \leftrightarrow
JCR: 0.586; 124/175 (Q3); Mathematics, Applied.
- [6] Bayón, L; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2005)
New Developments on Equivalent Thermal in Hydrothermal Optimization. An Algorithm of Approximation.
Journal of Computational and Applied Mathematics. 175(1), pp. 63–75. \leftrightarrow
JCR: 0.569; 85/151 (Q3); Mathematics, Applied.

- [7] Bayón, L.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2006)
Nonsmooth Optimization of Hydrothermal Problems.
Journal of Computational and Applied Mathematics. 192(1), pp. 11–19. ↔
JCR: 0.759; 67/150 (Q2); Mathematics, Applied.
- [8] Bayón, L.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2006)
Optimization of SO₂ and NO_x emissions in Thermal Plants.
Journal of Mathematical Chemistry. 40(1), pp. 29–41. (2005) ↔
JCR: 0.965; 25/65 (Q2); Mathematics, Interdisciplinary Applications.
- [9] Bayón, L.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2007)
A Bolza Problem in Hydrothermal Optimization. (2006)
Applied Mathematics and Computation. 184(1), pp. 12–22. ↔
JCR: 0.821; 61/165 (Q2); Mathematics, Applied.
- [10] Bayón, L.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2009)
The cyclic coordinate descent in hydrothermal optimization problems with nonregular Lagrangian.
AIP Conference Proceedings. 963 2(B), pp. 1153–1157. ↔
- [11] Bayón, L.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2008)
An Environmentally Constrained Economic Dispatch: CFBC Boilers in the Day-ahead Market.
International Journal of Computer Mathematics. 85(3), pp. 345–358. ↔
JCR: 0.308; 170/175 (Q4); Mathematics, Applied.
- [12] Bayón, L.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2009)
A Constrained and Nonsmooth Hydrothermal Problem.
Applied Mathematics and Computation. 209(1), pp. 10–18. ↔
JCR: 1.124; 61/204 (Q2); Mathematics, Applied.
- [13] Bayón, L.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2009)
An Application of the Algorithm of the Cyclic Coordinate Descent in Multidimensional Optimization Problems with Constrained Speed.
Numerical Algorithms. 52(2), pp. 129–149. ↔
JCR: 0.716; 120/204 (Q3); Mathematics, Applied.
- [14] Bayón, L.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2009)
An optimal control technique for solving differential equations.
AIP Conference Proceedings. 1148(2), pp. 25–28. ↔
- [15] Bayón, L.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2009)
An Optimization Problem in Deregulated Electricity Markets solved with the Nonsmooth Maximum Principle.
International Journal of Computer Mathematics. 86(2), pp. 237–249. ↔
JCR: 0.478; 169/204 (Q4); Mathematics, Applied.

- [16] Bayón, L; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2010)
An analytic solution for some separable convex quadratic programming problems with equality and inequality constraints.
Journal of Mathematical Inequalities. 4(3), pp. 453–465. ↔
JCR: 0.336; 242/289 (Q4); Mathematics.
- [17] Bayón, L; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2010)
Initial guess of the solution of dynamic optimization of chemical processes.
Journal of Mathematical Chemistry. 48(1), pp. 28–37. ↔
JCR: 1.259; 33/93 (Q2); Mathematics, Interdisciplinary Applications.
- [18] Bayón, L; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2011)
Algorithm for calculating the analytic solution for economic dispatch with multiple fuel units.
Computers and Mathematics with Applications. 62(5), pp. 2225–2234. ↔
JCR: 1.747; 13/245 (Q1); Mathematics, Applied.
- [19] Bayón, L; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2011)
An algorithm for Bang-Bang control of fixed-head hydroplants.
International Journal of Computer Mathematics. 88(9), pp. 1949–1959. ↔
JCR: 0.499; 179/245 (Q3); Mathematics, Applied.
- [20] Bayón, L; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2011)
Optimization of a pumped-storage fixed-head hydro-plant: the bang-singular-bang solution.
Mathematical Problems in Engineering. Article ID 561592, 11 pages. ↔
JCR: 0.777; 51/92 (Q3); Mathematics, Interdisciplinary Applications.
- [21] Bayón, L; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2011)
The explicit solution of the profit maximization problem with box-constrained inputs.
Applied Mathematics and Computation. 217(21), pp. 8705–8715. ↔
JCR: 1.317; 44/245 (Q1); Mathematics, Applied.
- [22] Grau, J.M.; Oller-Marcén, A.M. (2011)
An $\tilde{O}(\log^2(N))$ time primality test for generalized Cullen numbers.
Mathematics of Computation. 80, pp. 2315–2323. ↔
JCR: 1.313; 46/245 (Q1); Mathematics, Applied.
- [23] Grau, J.M.; Oller-Marcén, A.M. (2011)
On base- b expansion of the number of trailing zeros of $b^k!$.
Journal Of Integers Sequences. 14(6), Artículo 11.6.8. ↔
- [24] Bayón, L; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2012)
A quasi-linear algorithm for calculating the infimal convolution of convex quadratic functions.
Journal of Computational and Applied Mathematics. 236(12), pp. 2990–2997. ↔
JCR: 0.989; 79/247 (Q2); Mathematics, Applied.
- [25] Bayón, L; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2012)
Cyclic coordinate descent in hydrothermal nonsmooth problems.
Numerical Algorithms. 59(2), pp. 227–247. ↔
JCR: 1.128; 65/247 (Q2); Mathematics, Applied.

- [26] Bayón, L.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2012)
Numerical approximation to ODEs using the error functional.
Proceedings of the American Mathematical Society. 140(12), pp. 4295–4308. ↔
JCR: 0.609; 128/296 (Q2); Mathematics.
- [27] Bayón, L.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2012)
The Analytic Solution of the Firm's Cost-Minimization Problem with Box Constraints and the Cobb-Douglas model.
AIP Conference Proceedings. 1148(2), pp. 1188–1191. ↔
- [28] Bayón, L.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2012)
The Exact Solution of the Environmental/Economic Dispatch Problem.
IEEE Transactions on Power Systems. 27(2), pp. 723–731. ↔
JCR: 2.921; 22/243 (Q1); Engineering, Electrical and Electronic.
- [29] Grau, J.M.; Oller-Marcén, A.M. (2011)
Giuga numbers and the arithmetic derivative.
Journal Of Integers Sequences. 15(4), pp. 1–5. ↔
- [30] Grau, J.M.; Oller-Marcén, A.M. (2012)
On k -Lehmer numbers.
INTEGERS. Electronic Journal of Combinatorial Number Theory. 12(5), pp. 1081–1089. ↔
- [31] Grau, J.M.; Luca, F.; Oller-Marcén, A.M. (2012)
On a variant of Giuga numbers.
Acta Mathematica Sinica-English Series. 28, pp. 653–660. ↔
JCR: 0.480; 189/295 (Q4); Mathematics.
- [32] Grau, J.M.; Luca, F. (2012)
Cullen numbers with the Lehmer property.
Proceedings Of The American Mathematical Society. 140(1), pp. 129–134. ↔
JCR: 0.609; 128/295 (Q2); Mathematics.
- [33] Grau, J.M.; Luca, F. (2013)
Corrigendum to: Cullen numbers with the Lehmer property.
Proceedings Of The American Mathematical Society. 141, pp. 2941–2943. ↔
JCR: 0.609; 128/295 (Q2); Mathematics.
- [34] Bayón, L.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2013)
Mathematical modelling of the combined optimization of a pumped-storage hydro-plant and a wind park.
Mathematical and Computer Modelling. 57(7-8), pp. 2024–2028. ↔
JCR: 2.020 ; 16/251 (Q1); Mathematics, Applied.
- [35] Bayón, L.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2013)
Real-time optimization of wind farms and fixed-head pumped-storage hydro-plants.
International Journal of Computer Mathematics. 90(10), pp. 2147–2160. ↔
JCR: 0.721 129/251 (Q3) Mathematics, Applied.
- [36] Bayón, L.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2014)
A comparison between a hydro-wind plant and wind speed forecasting using ARIMA models.
AIP Conference Proceedings. 1618, pp. 1002–1005. ↔

- [37] Bayón, L; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2014)
A Hydrothermal Problem with non-regular Lagrangian.
 Journal of Industrial and Management Optimization. 10(3), pp. 761–776. ↔
 JCR: 0.843; 62/99 (Q3); Mathematics, Interdisciplinary Applications.
- [38] Bayón, L; García-Nieto, P.J.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2014)
An Economic Dispatch Algorithm of Combined Cycle Units.
 International Journal of Computer Mathematics. 91(2), pp. 269–277. ↔
 JCR: 0.824; 130/257 (Q3); Mathematics, Applied.
- [39] García-Rubio, R.; Bayón, L; Grau, J.M. (2014)
Generalization of the Firm's Profit Maximization Problem: An Algorithm for the Analytical and Nonsmooth Solution.
 Computational Economics. 43(1), pp. 1–14. ↔
 JCR: 0.521; 86/99 (Q4); Mathematics, Interdisciplinary Applications.
- [40] Bayón, L; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2014)
Optimal control of a linear unbranched chemical process with steps: the quasi-analytical solution.
 Journal of Mathematical Chemistry. 52(4), pp. 1036–1049. ↔
 JCR: 1.145; 47/99 (Q2) Mathematics, Interdisciplinary Applications.
- [41] Grau, J.M.; Oller-Marcén, A.M. (2014)
On the last digit and the last non-zero digit of n^n in base b .
 Bulletin of the Korean Mathematical Society. 51(5), pp. 1325–1337. ↔
 JCR: 0.228; 299/312 (Q4); Mathematics.
- [42] Grau, J.M.; Oller-Marcén, A.M.; Sadornil, D. (2014)
Primality test for $4Kp^n + 1$ numbers.
 Mathematics of Computation. 80, pp. 505–512. ↔
 JCR: 1.491; 40/257 (Q1); Mathematics, Applied.
- [43] Grau, J.M.; Oller-Marcén, A.M.; Sondow, J. (2014)
On the congruence $1^m + 2^m + \dots + m^m \equiv n \pmod{m}$ with $n \mid m$.
 Monatshefte Fur Mathematik. 177(3), pp. 421–436. ↔
 JCR: 0.647; 138/312 (Q2); Mathematics.
- [44] Fortuny-Ayuso, P.; Grau, J.M.; Oller-Marcén, A.M. (2015)
A von Staudt-type result for $\sum_{z \in \mathbb{Z}_n[i]} z^k$.
 Monatshefte für Mathematik. 178(3), pp. 345–359. ↔
 JCR: 0.664; 138/312. (Q2); Mathematics.
- [45] Grau, J.M.; Miguel, C.; Oller-Marcén, A.M. (2015)
On the structure of quaternion rings over $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
 Advances in Applied Clifford Algebras. 25(4), pp. 875–887. ↔
 JCR: 0.905; 109/254. (Q2); Mathematics, Applied.
- [46] Calderón, C.; Grau, J.M; Oller-Marcen, A.M.; Toth, L. (2015)
Counting invertible sums of squares modulo n and a new generalization of euler's totient function.
 Publicationes Mathematicae-Debrecen. 87(1-2), pp. 133–145. ↔
 JCR: 0.438; 244/312. (Q2); Mathematics.

- [47] Grau, J.M.; Oller-Marcen, A.M.; Rodríguez, M.; Sadonil, D. (2015)
Fermat test with Gaussian base and Gaussian pseudoprimes.
Czechoslovak Mathematical Journal. 65(140), pp. 969–982. ↔
JCR: 0.284; 293/312. (Q4); Mathematics.
- [48] Bayón, L.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2014)
A general algorithm for control problems with variable parameters and quasi-linear models.
AIP Conference Proceedings. 1702, pp. 190016-1–190016-4. ↔
- [49] Grau, J.M.; Oller-Marcen, A.M. (2015)
Variations on Giuga Numbers and Giuga's Congruence.
Ukrainian Mathematical Journal. 67(11), pp. 1778–1785. ↔
JCR: 0.228; 308/311. (Q4); Mathematics.
- [50] Bayón, L.; García-Nieto, P.J.; García-Rubio, R.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2016)
The Operation of Infimal/Supremal Convolution in Mathematical Economics.
International Journal of Computer Mathematics. 93(5), pp. 735–748. ↔
JCR: 0.971; 116/255 (Q2); Mathematics, Applied.
- [51] Bayón, L.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2016)
A comparative economic study of two configurations of hydro-wind power plants.
Energy. 112, pp. 8–16. ↔
JCR: 4.520; 17/92 (Q1); Energy and Fuels.
- [52] Grau, J.M.; Moree, P.; Oller-Marcen, A.M. (2016)
Solutions of the congruence $1 + 2^{f(n)} + \dots + n^{f(n)} \equiv 0 \pmod{n}$.
Mathematische Nachrichten. 289(7), pp. 820–830. ↔
JCR: 0.742; 120/312 (Q3); Mathematics.
- [53] Grau, J.M.; Miguel, C.; Oller-Marcen, A.M. (2017)
On the zero divisor graphs of the ring of Lipschitz integers modulo n .
Advances in Applied Clifford Algebras. 27(2), pp. 1191–1202. ↔
JCR: 1.174; 93/252 (Q2); Mathematics, Applied.
- [54] Fortuny-Ayuso, P.; Grau, J.M.; Oller-Marcen, A.M.; Rua, I. (2017)
On power sums of matrices over a finite commutative ring.
International Journal of Algebra and Computation. 27(5), pp. 547–560. ↔
JCR: 0.396; 258/312 (Q4); Mathematics.
- [55] Grau, J.M.; Oller-Marcen, A.M. (2017)
Power sums over finite commutative unital rings.
Finite Fields and their Applications. 48, pp. 10–19. ↔
JCR: 1.293; 30/312 (Q1); Mathematics.
- [56] Grau, J.M.; Oller-Marcen, A.M.; Tasis, C. (2017)
On the diameter of the commuting graph of the full matrix ring over the real numbers.
Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 43(1), pp. 217–221. ↔
JCR: 0.290; 293/312 (Q4); Mathematics.
- [57] Bayón, L.; Fortuny-Ayuso, P.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2018)
CMMSE-17: General Analytical Laws for Metabolic Pathways.
Journal of Mathematical Chemistry. 56(7), pp. 1813–1825. ↔
JCR: 1.810; 44/105 (Q2); Mathematics, Interdisciplinary Applications.

- [58] Bayón, L; Fortuny-Ayuso, P.; García-Rubio, R; Grau, J.M.; Ruiz, M.M. (2019)
Computational Approach for the Firm's Cost Minimization Problem Using the Selective Infimal Convolution Operator.
Computational Economics. 54(2), pp. 535–549. \leftrightarrow
JCR: 1.185; 68/105 (Q3); Mathematics, Interdisciplinary Applications.
- [59] Bayón, L; Fortuny-Ayuso, P.; García-Nieto, P.J.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M. (2019)
Optimal Control of Counter-Terrorism Tactics.
Applied Mathematics and Computation. 347, pp. 477–491. \leftrightarrow
JCR: 3.092; 14/254 (Q1); Mathematics, Applied.
- [60] Grau, J.M. (2019)
A new look at the returning secretary problem.
Journal of Combinatorial Optimization. 37(4), pp. 1216–1236. \leftrightarrow
JCR: 0.816; 181/254 (Q3); Mathematics, Applied.
- [61] Bayón, L; Fortuny-Ayuso, P.; Grau, J.M.; Oller-Marcén, A.M.; Ruiz, M.M. (2018)
The Best-or-Worst and the Postdoc problems.
Journal of Combinatorial Optimization. 35(3), pp. 703–723. \leftrightarrow
JCR: 0.816; 181/254 (Q3); Mathematics, Applied.
- [62] Bayón, L; Fortuny-Ayuso, P.; Grau, J.M.; Oller-Marcén, A.M.; Ruiz, M.M. (2019)
The Best-or-Worst and the Postdoc problems with random number of candidates.
Journal of Combinatorial Optimization. 38(1), pp. 86–110. \leftrightarrow
JCR: 0.816; 181/254 (Q3); Mathematics, Applied.
- [63] Grau, J.M.; Miguel, C.; Oller-Marcen, A.M. (2018)
Generalized quaternion rings over $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ for an odd n .
Advances in Applied Clifford Algebras. 28(1), article 17. \leftrightarrow
JCR: 1.174; 93/252 (Q2); Mathematics, Applied.
- [64] Alekeyev, M.; Grau, J.M; Oller-Marcen, A.M. (2020)
Computing solutions to the congruence $1^n + 2^n + \dots + n^n \equiv p \pmod{n}$.
Discrete Applied Mathematics. 286, pp. 3–9. \leftrightarrow
JCR: 0.956; (Q2); Mathematics.
- [65] Grau, J.M.; Oller-Marcen, A.M. (2019)
Fast computation of the number of solutions to $x_1^2 + \dots + x_k^2 \equiv \lambda \pmod{n}$.
Journal of Number Theory. 200, pp. 427–440. \leftrightarrow
JCR: 0.684; 181/313 (Q3); Mathematics.
- [66] Grau, J.M. (2020)
An extensión of the Last-Success-Problem.
Statistics and Probability Letters. 156, 108591; doi:10.1016/j.spl.2019.108591 \leftrightarrow
JCR: 0.615; (Q3); Statistics and Probability.
- [67] Grau, J.M. (2020)
A turn-based game related to the Last-Success-Problem.
Dynamic Games and Applications. 10(4), pp. 836–844. \leftrightarrow
JCR: 1.231; 67/105 (Q2); Mathematics interdisciplinary applications.

- [68] Bayón, L; Fortuny-Ayuso, P.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2020)
Irreversible linear pathways in enzymatic reactions: Analytical solution using the Homotopy Perturbation method.
Journal of Mathematical Chemistry. 58(1), pp. 273–291. ↔
JCR: 1.810; 44/105 (Q2); Mathematics, Interdisciplinary Applications.
- [69] Grau, J.M.; Oller-Marcén, A.M.; Sadornil, D. (2020)
A primality test for $4Kp^n - 1$ numbers.
Monatshefte für Mathematik, 191(1), pp. 93–101. ↔
JCR: 0.807; (Q3); Mathematics.
- [70] Bayón, L; Fortuny-Ayuso, P.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; García-Rubio, R. (2020)
An optimal stopping problem for an investing firm.
Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, 54(1), pp. 65–78. ↔
JCR: 0.973; 79/105 (Q4); Mathematics, Interdisciplinary Applications.
- [71] Grau, J.M. (2020)
A note on Last-Success-Problem.
Theory of Probability and Mathematical Statistics. Aceptado. ↔
- [72] Bayón, L; Fortuny-Ayuso, P.; Grau, J.M.; Ruiz, M.M.; Suárez, P.M. (2021)
A modified backward integration method for optimal control problems with degenerate equilibrium points.
Optimal Control Applications & Methods. Aceptado. ↔
JCR: 1.252; 118/260 (Q2); Mathematics, Applied.

12.2. OTRAS REFERENCIAS

REFERENCIAS

- [73] Akbari, S.; Mohammadian, A. (2007). On zero-divisor graphs of finite rings. *J. Algebra*. 314, no. 1, pp. 168–184.
- [74] Akbari, S.; Ghandehari, M. and Mohammadian, A. (2004). On commuting graphs of semisimple rings. *Linear Algebra Appl.* 390, pp. 345–355.
- [75] Akbari, S; Kiani, D. and Ramezani, F. (2010). Commuting graphs of group algebras. *Comm. Algebra*. 38(9), pp. 3532–3538.
- [76] Akbari, S.; Mohammadian, A.; Radjavi, H. and Raja, P. (2006). On the diameters of Commuting Graphs. *Linear Algebra Appl.* 418, pp. 161–176.
- [77] Akbari, S.; H. Bidkhori, H. and Mohammadian, A. (2008). Commuting graphs of matrix algebras. *Comm. Algebra*. 36(11), pp. 4020–4031.
- [78] Akbari, S. and Raja, P. (2006). Commuting graphs of some subsets in simple rings. *Linear Algebra Appl.* 416, pp. 1038–1047.
- [79] Alspach B. (1983). The Classification of Hamiltonian Generalized Peterson Graphs. *J. Combinatorial Theory, Ser. B* 34 pp. 293–312.
- [80] Anderson, D.F. and Badawi, A. (2008). The total graph of a commutative ring. *J. Algebra*. 320, pp. 2706–2719.
- [81] Anderson, D. F.; Livingston, P. S. (1999). The zero-divisor graph of a commutative ring. *J. Algebra*. 217, pp. 434–447.
- [82] Araujo, J.; M. Kinyon, M. and Konieczny, J. (2011). Minimal paths in the commuting graphs of semigroups. *European J. Combin.* 32(2), pp. 178–197.
- [83] Ashrafi, N.; H. R. Maimani, H.R.; Pournaki, M.R. and Yassemi, S. (2010). Unit graphs associated with rings. *Comm. Algebra*. 38, pp. 2851–2871.
- [84] Allaart, P and Islas J.A. (2016). A sharp lower bound for choosing the maximum of an independent sequence. *J. Appl. Prob.* Volume 53 (4), pp. 1041–105.
- [85] Babaioff, M.; Immorlica N. and R. Kleinberg. (2007) Matroids, secretary problems, and online mechanisms. *Proc. SODA*. pp. 434–443.
- [86] Bartoszynski, R., and Govindarajulu, Z. (1978) The Secretary Problem with Interview Cost. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series B* (1960-2002). 40(1/2), pp. 11–28.
- [87] Beck, I. (1988). Coloring of commutative rings. *J. Algebra*. 116, pp. 208–226.
- [88] Birkenmeier, G.F. (1990). Split-null extensions of strongly right bounded rings. *Publ. Mat.* 34 (1), pp. 37–44.

- [89] Bondy, J.A. (1972). Variations on the Hamiltonian Theme. *Canad. Math. Bull.* 15, pp. 57–62.
- [90] Bruss F.T. (2000). Sum the Odds to One and Stop. *Annals of Probability*. Vol. 28, pp. 1384–1391.
- [91] Bruss, F.T. (2003). A note on bounds for the odds theorem of optimal stopping. *Annals of Probability*. 31(4), pp. 1859–1861.
- [92] Bruss, F. T. and Louchard, Guy (2016). Sequential selection of the k best out of n rankable objects. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*. 18(3).
- [93] Cohn, P.M. (1999). Reversible rings, *Bull. London Math. Soc.* 31(6), pp. 641–648.
- [94] Chow, Y.S, Robbins H., Siegmund, D. (1971). *The Theory of Optimal Stopping*. Houghton Mifflin, Boston.
- [95] P.R. Coe and W. Butterworth (1995). Optimal Stopping in “The Showcase Show-down”, *The American Statistician*, Vol. 49, No. 3, pp. 271–275.
- [96] Conder, M. (2002). Trivalent (cubic) Symmetric Graphs on Up to 2048 Vertices. <http://www.math.auckland.ac.nz/~conder/symmcubic2048list.txt>.
- [97] Coxeter, H.S.M. (1950). Self-dual configurations and regular graphs. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 56. pp. 413–455.
- [98] Dynkin, E.B. (1963) the optimum choice of the instant for stopping a markov process. *Soviet Mathematics - Doklady*. 4:627–629.
- [99] Dendievel, R. (2013). New developments of the odds-theorem. *Math. Sci.* 38, no. 2, pp. 111–123.
- [100] Ding, G. and Marshall, E. (2018). Minimal k -connected non-hamiltonian graphs. *Graphs and Combin.* 34, pp. 289–312.
- [101] El-Hawary, M. E. and Christensen, G. S.(1979). *Optimal economic operation of electric power systems*. Ed. Academic Press, 1979.
- [102] Dolinar, G.B.; Kokol, D. and Oblak, P. (2012). On maximal distances in a commuting graph. *Electron. J. Linear Algebra*. 23, pp. 243–256.
- [103] Ferguson, T.S. (1989) Who solved the secretary problem? *Statistical Science*. 4(3), pp. 282–296.
- [104] Ferguson, T.S.; Hardwick, J. P. and Tamaki, M. (1991). Maximizing the duration of owning a relatively best object. *Contemporary Mathematics*, Bruss, F. T., Ferguson, T. S. and Samuels, S. M. eds., 125, pp. 37–58.
- [105] Ferguson, T.S. (2008) *Optimal Stopping and Applications*. <https://www.math.ucla.edu/~tom/Stopping/Contents.html>

-
- [106] Freij, R. and Wastlund, J. (2010). Partially ordered secretaries. *Electron. Comm. Probab.* 15:504–507.
- [107] García, Émilien. (2016). ESTUDIO DE VARIANTES DEL PROBLEMA DE LA SECRETARIA. Tesis doctoral.
- [108] Garrod, B. (2011). Problems of optimal choice on posets and generalizations of acyclic colourings. PhD Thesis.
- [109] Garrod, B. Grzegorz Kubicki, and Michal Morayne. (2012). How to choose the best twins. *Siam J. Discrete Math.* Vol. 26, No. 1, pp. 384–398.
- [110] Garrod, B. and R. Morris. (2012). The secretary problem on an unknown poset. *Random Structures Algorithms*, 43(4):429–451.
- [111] Georges, J.P. (1989). Non-Hamiltonian Bicubic Graphs. *J. Combin. Th. B* 46, pp. 121–124.
- [112] Georgiou, N.; N. M. Kuchta, M. Morayne and J. Niemiec. (2008). On a universal best choice algorithm for partially ordered sets. *Random Structures Algorithms*, 32:263-273.
- [113] Gilbert, J. and F. Mosteller. (1966). Recognizing the maximum of a sequence. *J. Am. Statist. Assoc.* 61:35–73.
- [114] Godsil, C. and Royle, G. (2001). Hamilton Paths and Cycles. *Algebraic Graph Theory*. New York: Springer-Verlag, pp. 45–47.
- [115] Grau, J. y López Masip, S.C. (2019). On (circuit-) destroyable graphs. Ponencia en *The 6th Gdansk workshop on graph theory*.
- [116] Gropp, H. (1990). Configurations and the Tutte Conjecture. *Ars. Combin. A* 29, pp. 171–177.
- [117] Gross, B.H. and Lucianovic, M.W. (2009). On cubic rings and quaternion rings. *J. Number Theory*. 129(6), pp. 1468–1478.
- [118] Gusein-Zade, S.M. (1966). The problem of choice and the optimal stopping rule for a sequence of independent trials. *Theor. Prob. and Its Appl.* 11, pp. 472-476.
- [119] Gutana, M; Kisielewicz, A. (2004) Reversible group rings. *J. Algebra*. 279, pp. 280–291.
- [120] Hahn, A.J. (1994). Quadratic algebras, Clifford algebras, and arithmetic Witt groups. Universitext. Springer-Verlag, New York.
- [121] Hill T. P. and Krenzel, U. (1992). A prophet inequality related to the secretary problem. *Contemp. Math.* 125 pp. 209–215.
- [122] Holton, D.A. and McKay, B.D. (1988). The smallest non-Hamiltonian 3-connected cubic planar graphs have 38 vertices. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 45 (3), pp. 305–319.

- [123] Hsiau, S. R. and Yang, J. R. (2000). A natural variation of the standard secretary problem. *Statist. Sinica*. 10, pp. 639–646.
- [124] B. Kaynar (2009). Optimal stopping in a stochastic game. *Probab. Eng. Inform. Sci.* 23, pp. 51–60.
- [125] Kanzaki, T. (1973). On non-commutative quadratic extensions of a commutative ring. *Osaka J. Math.* 10, pp. 597–605.
- [126] Knus, M.A. (1991). Quadratic and Hermitian forms over rings., volume 294 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin.
- [127] Kohn, W. (2014). Last Success Problem: Decision Rule and Application. <https://ssrn.com/abstract=2441250> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2441250>
- [128] Li, Y.; Bell, H.E.; Phipps, C. (2006). On reversible group rings. *Bull. Austral. Math. Soc.* 74, pp. 139–142.
- [129] Lindley, D.V. (1961). Dynamic programming and decision theory. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 10(1):39–51.
- [130] Lambek, J. (1971). On the representation of modules by sheaves of factor modules. *Canad. Math. Bull.* 14, pp. 359–368.
- [131] Marks, G. (2002) Reversible and symmetric rings. *J. Pure Appl. Algebra.* 174, no. 3, pp. 311–318.
- [132] V. Mazalov and A. Ivashko (2010). Equilibrium in n-person game of showcase showdown. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 24, pp. 397–403.
- [133] Matsui, T; Ano, K (2016). Lower bounds for Bruss odds problem with multiple stoppings. *Mathematics of Operations Research.* 41, pp. 700–714.
- [134] Miguel, C. (2013). A note on a conjecture about commuting graphs *Linear Algebra Appl.* 438, pp. 4750–4756.
- [135] Mohammadian, A. (2010). On commuting graphs of finite matrix rings. *Comm. Algebra.* 38(3), pp. 988–994.
- [136] Moreau, J.J. (1970). Inf-convolution, sous-additivit e, convexit eriques. *J. Math. Pures et Appl.* 49, pp. 109–154.
- [137] Mucci A.G. (1973). Differential Equations and Optimal Choice Problems. *Ann. Statist.* Volume 1, pp. 104–113.
- [138] Mucci A.G. (1973). On a Class of Secretary Problems. *The Annals of Probability.* Vol. 1, No. 3, pp. 417–427.
- [139] Omid, G.R. and Vatandoost, E. (2011). On the commuting graph of rings. *J. Algebra Appl.* 10(3), pp. 521–527.

- [140] Pierce, R.S. (1982). Associative algebras. Springer-Verlag, New York.
- [141] E. L. Presman, I. M. Sonin, (1972). The best choice problem for a random number of objects, *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 17:4, 695–706; *Theory Probab. Appl.*, 17:4 (1973), pp. 657–668.
- [142] Rocha, Amy L. (1993). The Infinite Secretary Problem with Recall. *Ann. Probab.* Volume 21, Number 2, pp. 898–916.
- [143] Rockafellar, R.T. (1970). *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton.
- [144] T. Strömberg, T. (1996). The operation of infimal convolution. *Diss. Math.* 352.
- [145] Rasmussen W.T. and H. Robbins H. (1975). The candidate problem with unknown population size. *J. Appl. Prob.* 12, pp. 692–701.
- [146] Redmond, S., (2002) The zero-divisor graph of a noncommutative ring. *International J. Commutative Rings* 1, no. 4, pp. 203–211.
- [147] Redmond, S. (2001) Generalizations of the Zero-Divisor Graph of a Ring. PhD diss., University of Tennessee. <https://trace.tennessee.edu/utkgraddiss/1504>
- [148] D. Swenson (2015). Optimal Strategy in the “Price Is Right” Showcase Showdown: A Module for Students of Calculus and Probability, *PRIMUS*, 25(7): pp. 578–595.
- [149] M. Sakaguchi (2004). Two-player games of “Score Showdown”. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, Vol. 10, pp. 347–357.
- [150] M. Sakaguchi (2004). Equilibrium in two-player games of Showcase Showdown, *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, e-2004, pp. 37–43.
- [151] M. Sakaguchi (2005). Three-player game of “Keep-or-Exchange”. *Game Th. Appl.* 10, pp. 148–160.
- [152] M. Sakaguchi (2005). Equilibrium in the three-player game of “Risky Exchange”, *Scientiae Math. Japonicae* 61, pp. 335–344.
- [153] M. Sakaguchi (2006). Player’s Information in Two-Player Games of “Score Showdown”(Mathematical Models and Decision Making under Uncertainty), Departmental Bulletin Paper, Kyoto University Research Information Repository, <http://hdl.handle.net/2433/48251>.
- [154] M. Sakaguchi (2005). Golden trisection numbers and two-player game of keep-or-exchange. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, e-2005, pp. 201–211.
- [155] Sakaguchi, M. (1984). Bilateral sequential games related to the no-information secretary problem, *Math. Japonica* 29, pp. 961–973.
- [156] Seregina, T.V.; Ivashko, A.A.; Mazalov, V.V. (2019). Optimal Stopping Strategies in the Game “The Price Is Right”. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2019, 307, pp. 127–141.

- [157] Smith, M.H. (1975). A secretary problem with uncertain employment. *J. Appl. Prob.* 12, pp. 620–624.
- [158] Soto, J.A. (2011). Matroid secretary problem in the random assignment model. *Proc. SODA.* pp. 1275–1284.
- [159] Steve Szabo (2019). Minimal reversible nonsymmetric rings. *Journal of Pure and Applied Algebra.* 223(11), pp. 4583–4591.
- [160] Szajowski, K.A. (2009). A rank-based selection with cardinal payoffs and a cost of choice. *Sci. Math. Jpn.* 69(2):285–293.
- [161] Szajowski, K. (1982). Optimal choice problem of a-th object. *Matem. Stos.* 19:51–65.
- [162] Tenorio, R. and T. Cason (2002). To spin or not to spin? Natural and laboratory experiments from The Price Is Right. *The Economic Journal.* 112. pp. 170–195.
- [163] Tuganbaev, A.A. (1993). Quaternion algebras over commutative rings. (Russian). *Math. Notes.* 53(1-2). pp. 204–207.
- [164] Vanderbei, R.J. (1983). The postdoc variant of the secretary problem (unpublished) <http://www.princeton.edu/~rvdb/tex/PostdocProblem/PostdocProb.pdf>.
- [165] Vardi, S. (2014). The secretary returns. arXiv:1404.0614
- [166] Vardi, S. (2015). The Returning Secretary. 32nd International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2015) pp. 716–729. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs).
- [167] Voight, J. (2011). Characterizing quaternion rings over an arbitrary base. *J. Reine Angew. Math.* 657, pp. 113–134.
- [168] Voight, J. (2013). Identifying the matrix ring: Algorithms for quaternion algebras and quadratic forms. In K.Alladi, M.Bhargava, D.Savitt, and P.H. Tiep (Eds.) *Quadratic and Higher Degree Forms* (255–298). Springer New York.
- [169] Watkins, M.E. (1969). A Theorem on Tait Colorings with an Application to the Generalized Petersen Graphs. *Journal of Combinatorial Theory.* 6, pp. 152–164.