

Universidad Autónoma de Madrid



Facultad de Ciencias
Departamento de Física Teórica

Inflación en supergravedad "uplifted"

Adolfo Guarino Almeida,

Madrid, Marzo 2007.

Universidad Autónoma de Madrid



Facultad de Ciencias
Departamento de Física Teórica

Inflación en supergravedad "uplifted"

Memoria del Trabajo de Iniciación a la Investigación realizado por
D. Adolfo Guarino Almeida,
presentada ante el Departamento de Física Teórica
de la Universidad Autónoma de Madrid
para la obtención del Diploma de Estudios Avanzados.

Trabajo de Iniciación a la Investigación tutelado por
Dr. D. Jesús M. Moreno Moreno,
Científico Titular de Física Teórica del Instituto de Física Teórica UAM-CSIC.

Madrid, Marzo 2007.

Índice

1. Inflación y Supergravedad. Motivación	5
2. Lagrangiano bosónico SUGRA N=1 d=4	10
2.1. V_F -Origen gravitacional	12
2.2. V_D -Origen gauge	13
3. Espacio de <i>moduli</i>	15
4. Cuerda IIB y potencial de Kähler K del modelo	17
4.1. Contenido de campos del modelo y cargas.	17
4.2. Potencial de Kähler del modelo	19
5. Superpotencial W del modelo	21
6. Compensación de anomalías: Mecanismo de Green-Schwarz	27
7. Métrica de Kähler K_{ij} del modelo	29
8. Potencial escalar del modelo: F/D-términos	31
8.1. V_F del modelo	31
8.2. V_D del modelo	35
9. Vacíos <i>de Sitter</i> en el sector $(T - m)$	37
9.1. Modelo KKLT	37
9.2. Modelo BKQ	37
9.3. Modelo ACCD	38
10. Inflación en el modelo <i>ACCD</i> : candidatos a inflatón y problemas	43
10.1. El problema η en supergravedad y condiciones iniciales	43
10.2. Candidatos a inflatón en modelos ACCD	45
11. Nuestro modelo: <i>ACCD extendido</i> . Inflación en el sector χ	47
11.1. Potencial escalar y ajuste fino	47
11.2. Ecuaciones de movimiento	50
11.3. Slow-roll (ϵ, η) , índice espectral (n_s) y WMAP3	54
11.4. Escalas y masa del gravitino.	56
12. Simetría \mathbb{Z}_2 e inflación topológica	59
13. Conclusiones	62

A. Métricas de Kähler y holonomía	64
A.1. Métricas reales	64
A.2. Transporte paralelo y grupo de holonomía de una variedad real	64
A.3. Extensión compleja de métricas reales. Métricas complejas . .	65
A.4. Métricas complejas hermíticas	68
A.5. Métricas complejas hermíticas de Kähler	69
A.6. Transporte paralelo y grupo de holonomía de una variedad de Kähler	71
B. Compactificación y variedades de Calabi-Yau	73
B.1. Dimensiones extra, espinores de Killing y supersimetría	73
B.2. Variedades de Calabi-Yau	75
B.3. Clasificación de Calabi-Yau's: espacio de <i>moduli</i> geométricos .	77
C. Parámetros de slow-roll para métricas hermíticas	81
C.1. Tensor gradiente (espacio cotangente): ϵ	81
C.2. Tensor Hessiano (cotangente \times cotangente): η	82
C.3. ϵ y η para $g^C \equiv (K)$ siendo hermítica y de Kähler	83
D. Ecuaciones de movimiento para un conjunto de campos reales con métrica FRW	85
D.1. Acción gravitacional y acción de materia	85
D.2. Ecuación de movimiento para la materia	86
D.3. Métrica de FRW en coordenadas comóviles	88
D.4. Número de <i>e-folds</i> y coordenadas espaciales comóviles	90
D.5. Espectro de potencias $P(k)$ e índice espectral n_s	93
E. Potencial generado dinámicamente para n condensados y un <i>modulus</i> T	95
E.1. F-términos para el caso $\mathcal{G} = [\prod_{\alpha=1}^n SU(N_\alpha)] \times U_X(1)$	96
E.2. D-términos para el caso $\mathcal{G} = [\prod_{\alpha=1}^n SU(N_\alpha)] \times U_X(1)$	103

1. Inflación y Supergravedad. Motivación

Más de 25 años después de que fuese expuesta en su primera versión por Alan Guth [1], *inflación* se ha convertido en el paradigma del nuevo modelo estándar cosmológico. Aunque su modelo basado en un *superenfriamiento* del Universo al sufrir una transición de fase no funcionara, sentó las bases de cómo inflación podía solucionar algunos de los problemas de la antigua cosmología ("*Hot Big Bang*") como el problema del horizonte o la planitud. En esta primera versión, inflación es un período de crecimiento exponencial del Universo en un falso vacío. Es decir, un estado (fase) metaestable sin partículas pero que alberga una gran densidad de energía. Este estado de falso vacío decae generándose burbujas de la nueva fase que colisionarán y se calentarán convirtiendo el Universo en altamente inhomogéneo, lo cual no es aceptable experimentalmente. El trabajo de Guth se conoce hoy como el antiguo modelo inflacionario ("*old inflation*").

La nueva teoría inflacionaria ("*new inflation*") desarrollada por A. Linde [2] en 1982, hacía más viable la idea de Guth permitiendo al Universo comenzar a expandirse bien desde un falso vacío o desde un estado inestable en un máximo del potencial efectivo. El campo del inflatón ϕ rueda lentamente (*slow-roll*) hacia el mínimo de su potencial efectivo y durante este movimiento, las perturbaciones a la densidad que se generan son inversamente proporcionales a $\dot{\phi}$. Entonces la parte responsable de la homogeneidad en el nuevo modelo de inflación no se genera en el falso vacío ($\dot{\phi} = 0$).

Sin embargo, tanto el antiguo como el nuevo modelo inflacionario resultaron una modificación incompleta de la teoría del *Hot Big Bang*. El nuevo modelo de inflación necesita de un potencial artificialmente plano para ser viable. Esto supone una constante de acoplo extremadamente pequeña para ϕ lo que no le permitiría estar en equilibrio térmico con otros campos de materia y, por tanto, la teoría de transiciones de fase no es aplicable.

El propio A. Linde [3] resolvió estos problemas en 1983 con el modelo de inflación caótica ("*chaotic inflation*"). En éste, el campo ϕ comienza en valores muy grandes, incluso $\phi \sim M_P$, en potenciales sencillos tipo $V(\phi) \sim \phi^n$. Esto genera un parámetro de Hubble muy grande $H^2 \propto (\dot{\phi}^2 + \phi^n)$ que da lugar a un término de fricción (viscosidad) también muy grande en la ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV(\phi)}{d\phi} \quad (1)$$

generándose las condiciones de *slow-roll* necesarias de forma más natural. La condición $\phi \sim M_P$ es menos restrictiva que en el modelo de *new inflation* y el potencial no ha de tener una región *cuasi* plana.

En este trabajo nos centraremos en otro tipo de inflación ideado por Vilenkin [4] y A. Linde [5, 6] de forma independiente y simultánea conocido como inflación topológica ("*topological inflation*"). Al igual que en el caso de inflación caótica, este modelo evita el problema de las condiciones iniciales para el inflatón, pero por razones topológicas. Para teorías en las que el potencial efectivo presenta un conjunto de mínimos, existen soluciones no triviales [7, 8] a las ecuaciones de movimiento (defectos topológicos). En potenciales que posean, por ejemplo, una simetría \mathbb{Z}_2 ,

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \phi_0^2)^2 \quad (2)$$

se formarán *domain-walls* entre los dos mínimos [9, 10].

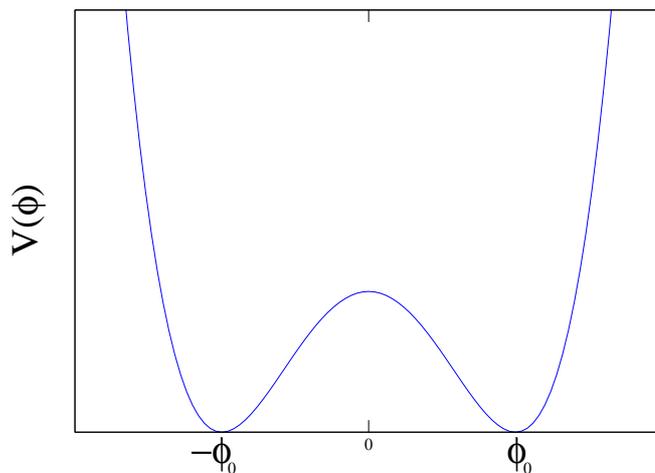


Figura 1: Potencial con mínimos degenerados.

En ellos, el campo ϕ interpola entre los vacíos $\langle \phi \rangle = \pm \phi_0$ estando obligado a pasar por el punto crítico $\phi = 0$ por razones topológicas. La producción de *domain-walls* supone un mecanismo natural para generar inflación evitando el problema de las condiciones iniciales, pues todos los valores del campo se realizan dentro del *domain-wall* asociado.

La idea de tener una colección de vacíos como solución a la teoría ha recobrado interés en los últimos años con la aparición de lo que se ha denominado el "*landscape*" de la teoría de cuerdas, teoría candidata a ser la teoría última de las cosas. Para formular una teoría de cuerdas consistente donde todo el contenido de campos sea bosónico, es sabido que la dimensión del espacio-tiempo ha de ser $D = 26$. Sin embargo si queremos que incluya fermiones (supercuerdas), esta condición se reduce a $D = 10$. En cualquiera de los casos, la teoría de cuerdas nos lleva de forma inevitable a tener que tratar con *dimensiones extras*. Esto es manejar teorías D-dimensionales así como reducirlas para obtener teorías efectivas 4-dimensionales que podamos contrastar experimentalmente. La forma de llevar a cabo esto pasa por *compactificar* las dimensiones extras en una *variedad interna* que, en general, tomaremos compacta y de *Calabi-Yau* [11].

Desde el punto de vista fenomenológico, la forma de trabajar es el límite de *supergravedad 10-dimensional*, o límite de bajas energías, de la teoría de supercuerdas fundamental. Es en este límite en el que el espectro de la teoría se rige en términos de una teoría de campos en dimensión $D = 10$ con supersimetría(s) local(es) como simetría(s) del espacio-tiempo heredada(s) de la teoría de supercuerdas original. Pero nuestro mundo es 4-dimensional, lo que implica que las seis dimensiones extras están *compactificadas* a una escala de energía tan alta que no tenemos acceso a ellas. La elección de la *variedad interna* en la *compactificación*, lejos de ser una elección irrelevante, determina de forma decisiva la teoría efectiva 4-dimensional. Cantidades como el número de supersimetrías que sobreviven a la compactificación¹, constantes de acoplo para la teoría gauge (cuerda IIB) e incluso el espacio de configuraciones de vacío de la teoría 4-dimensional, dependen de la topología de la compactificación.

Es en este contexto en el que aparece el concepto de *espacio de moduli* de la teoría sobre el que trataremos a lo largo de todo el trabajo. *Moduli* son, en sentido estricto, campos escalares sin masa que codifican o parametrizan familias continuas de vacíos de la teoría y que, si queremos un estado de vacío bien definido, han de estabilizarse. La búsqueda de mecanismos que guíen la estabilización de los *moduli*, [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22], es un problema que está avanzando rápidamente en la actualidad debido a una comprensión cada vez mayor de la teoría de supercuerdas en sus aspectos no perturbativos (instantones, condensados de gauginos, flujos, D-branas,...).

¹Por razones fenomenológicas, nos centraremos en supersimetría N=1 como principal candidata a física más allá del Modelo Estándar.

Estos aspectos no perturbativos se utilizan como mecanismos para dar masa a los *moduli* a escalas tan altas que resulten fenomenológicamente compatibles con la no observación de escalares sin masa en los experimentos.

La primera construcción explícita de un mecanismo que estabiliza todos los *moduli* en un vacío dS (constante cosmológica positiva) ha sido desarrollada por Kachru, Kallosh, Linde y Trivedi (KKLT) [16] como solución al límite de bajas energías de la teoría de cuerdas IIB. El interés en conseguir vacíos dS a partir de teoría de cuerdas se debe precisamente a que los datos experimentales más recientes confirman la idea de un período de aceleración para el Universo y, de ahí, su estrecha relación con el modelo inflacionario.

En definitiva, construir modelos de inflación en los que tanto el campo del inflatón como el potencial efectivo de la teoría tengan su origen en teoría de cuerdas [23], es uno de los objetivos a la hora de unificar la Cosmología y la Física de Partículas. Esto se ha visto reforzado con el aumento de precisión en las observaciones, como en la colaboración WMAP.

Se han construido modelos de inflación donde el inflatón es un *modulus* bien parametrizando la distancia entre branas (como propusieron originalmente Dvali y Tye [24]), la geometría/estructura de la variedad interna compacta [25, 26] o bien las componentes en la variedad interna del contenido de campos de la cuerda [27]. Nos referiremos a este tipo de inflación como *inflación modular* y es el objetivo de este trabajo.

Para conseguir modelos de inflación satisfactorios tendremos que abordar determinados problemas que son característicos y sistemáticos en el caso de inflación modular. En primer lugar, el problema de la estabilización de los *moduli* (antes comentado), inicialmente direcciones planas en el potencial efectivo a todo orden en teoría de perturbaciones. Segundo, localizar candidatos a inflatón compatibles con el mecanismo de estabilización y que eviten el problema η [28] (o al menos que sea controlable) presente en *supergravedad* $N=1$ $d=4$ con la que trabajaremos. Por último, generar un proceso inflacionario compatible con las medidas experimentales más recientes llevadas a cabo por WMAP3 [29].

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2, presentamos la estructura general de la teoría *supergravedad* $N=1$ $d=4$. En la sección 3 definimos brevemente cuál es el espacio de *moduli* para compactificaciones en variedades de *Calabi-Yau*. A lo largo de las secciones 4,5,6,7 y 8 presentamos nuestro modelo de inflación (ACCD extendido). Determinaremos el

potencial de Kähler K y el *superpotencial* W del modelo y construiremos el potencial escalar efectivo V . En las secciones 9 y 10 analizamos los primeros modelos de estabilización de *moduli* con vacíos dS así como los problemas a la hora de generar inflación en ellos, centrándonos en el modelo ACCD [18]. Por último, en las secciones 11 y 12 se muestra un ejemplo numérico de nuestro modelo en el que inflación topológica ocurre de manera perfectamente compatible con las medidas experimentales de WMAP3. Para finalizar, presentamos las conclusiones en la sección 13. En los apéndices se desarrollan de manera más formal todos los conceptos y resultados que aparecen a lo largo del trabajo.

2. Lagrangiano bosónico SUGRA N=1 d=4

A lo largo de todo el texto y siguiendo las convenciones de [30], trabajaremos con la densidad Lagrangiana de campos bosónicos² en el marco teórico de *supergravedad* $N=1$ $d=4$ para una teoría con grupo de simetría gauge \mathcal{G} .

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{bos} &= \frac{1}{\kappa} R + G_{a\bar{b}} g_{\mu\nu} (D^\mu \varphi^a) (D^\nu \bar{\varphi}^{\bar{b}}) - \underbrace{e^G [G_a (G^{-1})^{a\bar{b}} G_{\bar{b}} - 3]}_{V_F} - \\
&- \underbrace{\frac{g_{\mathcal{G}}^2}{2} \text{Re} \{ (f_{\alpha\beta}^{\mathcal{G}})^{-1} \} [G_a (t_\alpha^{\mathcal{G}})^a \varphi^b] [G_a (t_\beta^{\mathcal{G}})^a \varphi^b]}_{V_D} - \\
&- \frac{1}{4} \text{Re} \{ f_{\alpha\beta}^{\mathcal{G}} \} (F_\alpha^{\mathcal{G}})_{\mu\nu} (F_\beta^{\mathcal{G}})^{\mu\nu} + \frac{i}{4} \text{Im} \{ f_{\alpha\beta}^{\mathcal{G}} \} (F_\alpha^{\mathcal{G}})_{\mu\nu} (\tilde{F}_\beta^{\mathcal{G}})^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3}$$

Como vemos, todo depende de la función $f_{\alpha\beta}^{\mathcal{G}}(\varphi)$, de $G(\varphi, \bar{\varphi})$ y de las derivadas de $G(\varphi, \bar{\varphi})$ con respecto a los campos. $f_{\alpha\beta}^{\mathcal{G}}(\varphi)$ es la función cinética gauge y $G(\varphi, \bar{\varphi})$ es la función de Kähler, la cual se define como

$$G(\varphi, \bar{\varphi}) = K(\varphi, \bar{\varphi}) + Ln|W(\varphi)|^2 \tag{4}$$

donde

- $K(\varphi, \bar{\varphi}) \in \mathbb{R} \Rightarrow$ *potencial de Kähler de la teoría*
- $W(\varphi) \in \mathbb{C} \Rightarrow$ *superpotencial holónimo de la teoría*

Luego para hacer una teoría en SUGRA N=1 d=4 partiremos de una función $f_{\alpha\beta}^{\mathcal{G}}(\varphi)$, una función $K(\varphi, \bar{\varphi})$ y un ***superpotencial holónimo*** $W(\varphi)$.

Las magnitudes que aparecen en el \mathcal{L}_{bos} se definen como

$$\begin{aligned}
G_a &\equiv \frac{\partial G(\varphi, \bar{\varphi})}{\partial \varphi^a} \\
G_{\bar{b}} &\equiv \frac{\partial G(\varphi, \bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}^{\bar{b}}} \\
G_{a\bar{b}} &\equiv \frac{\partial G(\varphi, \bar{\varphi})}{\partial \varphi^a \partial \bar{\varphi}^{\bar{b}}}
\end{aligned} \tag{5}$$

²Para la acción gravitacional, tendremos $\kappa = -\frac{16\pi G}{M_{pl}^2}$ siendo $M_P^2 \equiv 16\pi G = 1,1 \times 10^{19}$ Gev

donde se cumple que $G_{a\bar{b}}G^{\bar{b}c} = \delta_a^c$.

La derivada en eq.(3) es covariante tanto espacio-temporal como gauge. Aparecerán en la derivada la conexión afín $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ y la conexión del \mathcal{G} – *world*, esto es, los campos gauge A_μ .

De aquí en adelante nos centraremos en la parte bosónica escalar de la teoría. No tendremos en cuenta nada referente a conexión afín ni tampoco gauge, pues buscaremos el estado de vacío de la teoría gauge libre en el que los campos gauge están apagados. Aunque sí tendremos que considerar la conexión de Kähler al resolver ecuaciones de movimiento. Esto se debe a que el potencial de Kähler no será canónico y la métrica de Kähler dependerá de los campos generando una conexión en el espacio de campos.

Haciendo las parciales obtenemos

$$G_a \equiv \frac{\partial G(\varphi, \bar{\varphi})}{\partial \varphi^a} = K_a + \frac{1}{|W|^2} \frac{\partial |W|^2}{\partial \varphi^a} \quad (6)$$

$$G_{\bar{b}} \equiv \frac{\partial G(\varphi, \bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}^{\bar{b}}} = K_{\bar{b}} + \frac{1}{|W|^2} \frac{\partial |W|^2}{\partial \bar{\varphi}^{\bar{b}}} \quad (7)$$

$$G_{a\bar{b}} \equiv \frac{\partial G(\varphi, \bar{\varphi})}{\partial \varphi^a \partial \bar{\varphi}^{\bar{b}}} = K_{a\bar{b}} \quad (8)$$

$$e^G = e^K |W|^2 \quad (9)$$

El potencial escalar de la teoría recibe dos contribuciones en eq.(3). Una de ellas V_F está incluso para el caso de no tener grupo de simetría gauge \mathcal{G} en la teoría. La otra contribución V_D , es de origen gauge. Nos referiremos a la primera como contribución de origen gravitacional mientras que a la segunda nos referiremos como contribución de origen gauge.

\mathcal{L}_{bos} es invariante bajo una transformación SUSY local de los supercampos quirales presentes en la teoría. En una transformación de parámetro (espinor de Majorana) $\zeta(x)$, las componentes del supercampo quiral se transforman como

$$\delta_\zeta \varphi^a = \sqrt{2} \bar{\zeta}(x) \psi_M^a \quad (10)$$

$$\delta_\zeta \psi_M^a = -i\gamma^\mu D_\mu (A^a + i\gamma^5 B^a) \zeta(x) - \sqrt{2} e^{\frac{G}{2}} (G^{-1})^{a\bar{b}} G_{\bar{b}} \zeta(x) + 2\text{-ferm-térm} \quad (11)$$

donde $\varphi^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(A^a + iB^a) \in \mathbb{C}$ es la componente escalar del supercampo quiral a -ésimo y $\psi_M^a = \begin{pmatrix} \psi^a \\ \bar{\psi}^{\bar{a}} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ es el espinor de Majorana construido a partir de ψ^a , la componente de Weyl del mismo supercampo.

Si imponemos que el vacío sea invariante Lorentz, sólo los campos escalares φ^a podrán tomar un valor esperado en el vacío (*v.e.v*) no nulo. Si, además de $\langle \varphi^a \rangle \neq 0$, se cumple que $\langle G_a \rangle \neq 0$, tendremos

- ruptura gravitacional de SUSY mediante F-términos

$$\langle 0 | \delta_\zeta \psi_M^a | 0 \rangle = -\sqrt{2} e^{\frac{G}{2}} (G^{-1})^{a\bar{b}} G_{\bar{b}} \zeta(x) \neq 0 \quad (12)$$

- ruptura gauge de SUSY mediante D-términos

$$\langle 0 | \delta_\zeta \lambda_\alpha | 0 \rangle = \frac{i}{2} g_{\mathcal{G}} \text{Re} \{ f_{\alpha\beta}^{\mathcal{G}-1} \} [G_a (t_\beta^{\mathcal{G}})^a \varphi^b] \zeta(x) \neq 0 \quad (13)$$

donde λ_α es el fermión "gaugino" del supercampo vectorial asociado al generador α -ésimo del grupo gauge \mathcal{G} .

2.1. V_F -Origen gravitacional

Utilizando eq.(6), eq.(7), eq.(8) y eq.(9),

$$\begin{aligned} V_F &= e^G \left[3 - G_a (G^{-1})^{a\bar{b}} G_{\bar{b}} \right] = \\ &= e^K \left\{ (K^{-1})^{a\bar{b}} \left[|W|^2 K_a K_{\bar{b}} + K_{\bar{b}} \bar{W} \frac{\partial W}{\partial \varphi^a} + K_a W \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\varphi}^{\bar{b}}} + \frac{\partial W}{\partial \varphi^a} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\varphi}^{\bar{b}}} \right] - 3|W|^2 \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

Entonces, teniendo en cuenta que $[\varphi] = 1$; $[W] = 3$; $[G] = 2$, las dimensiones de los términos en eq.(147) son

$$\begin{aligned}
V_F &= \\
&= \overbrace{e^K}^{dim=2} \left\{ (K^{-1})^{a\bar{b}} \left[\underbrace{|W|^2 K_a K_{\bar{b}}}_{dim=8} + \underbrace{K_{\bar{b}} \bar{W} \frac{\partial W}{\partial \varphi^a}}_{dim=6} + \underbrace{K_a W \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\varphi}^b}}_{dim=6} + \underbrace{\frac{\partial W}{\partial \varphi^a} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\varphi}^b}}_{dim=4} \right] - \underbrace{3|W|^2}_{dim=6} \right\} \quad (15)
\end{aligned}$$

donde, si colocamos los correspondientes factores de supresión $\frac{1}{M_P^2}$ para que todos los términos del potencial tengan $dim=4$, podemos hacer el paso SUGRA \Rightarrow SUSY sin más que tomar el límite $M_P \rightarrow \infty$, obteniéndose

$$V_F = (K^{-1})^{a\bar{b}} \frac{\partial W}{\partial \varphi^a} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\varphi}^b} \quad (16)$$

Para el caso canónico $K_{a\bar{b}} = \delta_{a\bar{b}}$, se reduce al caso de Wess-Zumino con varios supercampos quirales

$$V_F^{WZ}(\varphi, \bar{\varphi}) = \delta^{a\bar{b}} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi^a} \right) \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\varphi}^b} \right) = \sum_a \left| \frac{\partial W}{\partial \varphi^a} \right|^2 \quad (17)$$

Definiremos la "derivada de Kähler" como

$$\begin{aligned}
D_a W &= W_a + K_a W = G_a W \\
D_{\bar{b}} \bar{W} &= \bar{W}_{\bar{b}} + K_{\bar{b}} \bar{W} = G_{\bar{b}} \bar{W}
\end{aligned} \quad (18)$$

donde $W_a \equiv \frac{\partial W}{\partial \varphi^a}$, $\bar{W}_{\bar{b}} \equiv \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\varphi}^b}$.

De esta manera podemos escribir el potencial efectivo para el sector escalar de la teoría como

$$V_F = e^K \left[(K^{-1})^{a\bar{b}} D_a W D_{\bar{b}} \bar{W} - 3|W|^2 \right] \quad (19)$$

2.2. V_D -Origen gauge

Si consideramos el caso en el que la función gauge cinética de \mathcal{G} es de la forma $f_{\alpha\beta}^{\mathcal{G}} = f^{\mathcal{G}} \delta_{\alpha\beta} \implies (f^{\mathcal{G}})_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{1}{f^{\mathcal{G}}} \delta_{\alpha\beta}$. Además utilizando eq.(18)

$$\begin{aligned}
V_D &= \\
&= \frac{g_{\mathcal{G}}^2}{2} \text{Re} \left\{ f_{\alpha\beta}^{\mathcal{G}-1} \right\} [G_a (t_{\alpha}^{\mathcal{G}})^a \varphi^b] [G_a (t_{\beta}^{\mathcal{G}})^a \varphi^b] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\text{Re}\{f^{\mathcal{G}}\}} \sum_{\alpha} \left(\frac{D_a W}{W} \underbrace{g_{\mathcal{G}} (t_{\alpha}^{\mathcal{G}})^a_b \varphi^b}_{-i\eta_{\alpha}^a} \right)^2 = \tag{20} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\text{Re}\{f^{\mathcal{G}}\}} \sum_{\alpha} \left(-i \frac{D_a W}{W} \eta_{\alpha}^a \right)^2 = \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\text{Re}\{f^{\mathcal{G}}\}} \sum_{\alpha} D_{\alpha} D_{\alpha}
\end{aligned}$$

donde además hemos utilizado³

$$D_{\alpha} = -i \frac{D_a W}{W} \eta_{\alpha}^a \tag{21}$$

Utilizando ahora la condición de invariancia gauge del superpotencial W ,

$$W_a \eta_{\alpha}^a = 0 \tag{22}$$

obtenemos

$$D_{\alpha} = -i K_a \eta_{\alpha}^a \tag{23}$$

³ $\delta_{\mathcal{G}} \varphi^a = i g_{\mathcal{G}} A_{\mu}{}^{\alpha} (t_{\alpha}^{\mathcal{G}})^a_b \varphi^b = A_{\mu}{}^{\alpha} \eta_{\alpha}^a$

3. Espacio de *moduli*

El problema que afrontaremos es el de estabilizar los distintos *moduli* del espacio de *moduli* de la teoría. Éstos serán los *moduli* asociados a la variedad interna (*orientifolded Calabi-Yau*) más otros *moduli* no geométricos. Un desarrollo más completo del espacio de *moduli* geométricos en variedades de *Calabi-Yau* puede verse en el apéndice (B.3). Estos campos aparecen en la teoría 4-dimensional como escalares sin masa, lo que los convierte en fenomenológicamente invariables. Entenderemos estabilización de *moduli* en el sentido de mecanismo por el que adquieren masa.

- ***Moduli* geométricos $t^\alpha \in \mathbb{R}$ asociados a las variaciones infinitesimales $\delta K_{a\bar{b}}$: *Kähler moduli*.**

Son el resultado de expandir $\delta K_{a\bar{b}}$ en los $h^{(1,1)}$ elementos de una base de (1,1)-formas reales

$$\delta K_{a\bar{b}} = \sum_1^{h^{(1,1)}} t^\alpha b_{a\bar{b}}^\alpha \quad t^\alpha \in \mathbb{R} \quad (24)$$

Los estabilizaremos debido a términos no perturbativos en el superpotencial de la teoría SUGRA efectiva. Estos términos no perturbativos se originan dinámicamente y los originan grupos $SU(N_c)$ en fase de confinamiento en el infrarrojo que provienen de tener stacks de N_c D7-branas enrolladas en algún 4-ciclo del *Calabi-Yau*. Típicamente aparecerá un factor $U(1)$ (que puede ser anómalo) con cada grupo $SU(N_c)$.

- ***Moduli* geométricos s^α asociados a las variaciones infinitesimales δK_{ab} : *Moduli de estructura compleja*.**

Una métrica de Kähler cumple que $K_{ab} = K_{\bar{a}\bar{b}} = 0$. Si queremos que $\delta K_{ab} \neq 0$ pase a ser del tipo (1,1) (como la forma de Kähler), no podremos conseguirlo mediante una transformación que respete holomorphicidad. Esto significa que la nueva métrica será también de Kähler pero respecto a una estructura compleja (atlas sobre la variedad compleja) diferente a la de la métrica inicial.

Una parametrización de la estructura compleja se puede hacer vía los $h^{(2,1)}$ elementos de una base de (2,1)-formas más la única (3,0)-forma del CY_3 . Esto es

$$\Omega_{cd}^{\bar{b}} \delta K_{\bar{a}\bar{b}} = \sum_1^{h^{(2,1)}} s^\alpha b_{cd\bar{a}}^\alpha \quad (25)$$

La idea es usar flujos para las formas R-R y NS-NS estabilizando así los *moduli* s^α asociados a la estructura compleja de la variedad interna. Estos *moduli* se estabilizan a una escala más alta que la del resto de los *moduli* y producen una aportación constante W_0 al superpotencial de la teoría efectiva SUGRA N=1 d=4.

■ **Moduli no geométricos**

Son campos escalares presentes en la teoría 4-dimensional cuyo origen es

- modos cero de escalares de la teoría efectiva SUGRA en d=10. Para la cuerda IIB tendremos el axi3n-dilat3n el cual se estabilizar3a, al igual que los *moduli* de estructura compleja, mediante la presencia de flujos para las formas de R-R y NS-NS, [11],[12],[13]
- las componentes internas (en el CY_3) de los campos bos3nicos del contenido de campos de la cuerda. Por ejemplo, en la cuerda IIB, tendremos escalares asociados a la 2-forma del sector NS-NS y a la 2-forma y la 4-forma del sector R-R, [31]

4. Cuerda IIB y potencial de Kähler K del modelo

Trabajaremos en el contexto de la teoría efectiva SUGRA $N=1$ $d=4$ obtenida a partir de la teoría de cuerdas IIB compactificada en un *orientifolded Calabi-Yau*.

Por ejemplo, podemos tener O3-O7-*planos* ó tener O5-O9-*planos* a la hora de elegir la proyección *orientifold* [32]. Así, pasamos de la teoría SUGRA $N=2$ $d=4$ resultado de compactificar la cuerda IIB en CY_3 a la teoría SUGRA $N=1$ $d=4$. Para ver más sobre compactificaciones y supersimetría, ver apéndices (B.1) y (B.2)

Por último tendremos también un único grupo $SU(N_c)$ generado por la presencia de N_c D7-*branas* así como un correspondiente $U_X(1)$ anómalo. Asumiremos que la formación de condensados de squarks [33, 22] ocurre ($N_f < N_c$). También tendremos una estructura de N_f familias sobre la cual tendremos definida la simetría global (espacio de *flavour*) de la teoría clásica.

4.1. Contenido de campos del modelo y cargas.

- *Moduli* geométricos:

- *Kähler modulus*: $t \equiv \frac{T+T^\dagger}{2} = \text{Re} \{T\}$.

Consideraremos un único Kähler *modulus* ($h^{(1,1)} = 1$). Por ejemplo, podemos construir *orientifolds* de CY_3 conocidos con $h^{(1,1)} = 1$, como el *quintic* $CP^4_{1,1,1,1,1}$. El *modulus* T será singlete bajo el grupo $SU(N_c)$, en cambio estará cargado bajo el $U_X(1)$, apareciendo un término de FI [34].

Con todo esto, el problema que se nos planteará será el de estabilizar T evitando un *runaway*.

- *Moduli de estructura compleja + axión-dilatón*

El axión-dilatón y los *moduli* de estructura compleja se estabilizan a una escala más alta mediante la jerarquía de las compactificaciones GKP [15], dando como resultado una aportación constante al superpotencial de la teoría W_0 que rompe la *simetría-R* (pues no tiene *R-carga*).

- *Moduli* no geométricos: χ

Consideraremos un escalar genérico resultado de las componentes en la variedad interna de una p-forma bosónica de la cuerda IIB. Típicamente, podremos tener este escalar transformándose como un singlete respecto al grupo gauge $SU(N_c)$ que tengamos así como respecto al $U_X(1)$. Este singlete genérico será el candidato a inflatón en nuestro modelo.

■ **Campos de materia: Mesones** $\{\phi, \tilde{\phi}\} \rightarrow M$

Consideraremos la materia como un conjunto de supercampos $\Phi's$ y $\tilde{\Phi}'s$. Los $\Phi's$ y los $\tilde{\Phi}'s$ son supercampos quirales, cuyas componentes escalares (que denotaremos mediante ϕ y $\tilde{\phi}$) tomarán un *v.e.v* (junto con los *moduli*) para definir el *ground state* de la teoría. Como es habitual, no utilizaremos las componentes escalares propiamente dichas como las variables del sistema. En lugar de éstas (que NO son invariantes $SU(N_c)$ -gauge), utilizaremos una redefinición de ellas en función de mesones y bariones (que SÍ lo son). Son estas nuevas variables las que nos aparecerán en el superpotencial no perturbativo generado dinámicamente debido al régimen de confinamiento en el I.R. del grupo $SU(N_c)$ [35].

$$\langle \phi \rangle, \langle \tilde{\phi} \rangle \longrightarrow \langle M \rangle \quad (26)$$

La simetría global en el espacio de *flavour* de la teoría a nivel clásico es

$$SU_L(N_f) \times SU_R(N_f) \times U_X(1) \times U_B(1) \times U_R(1) \quad (27)$$

con

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \left(N_f, 1, q, 1, \frac{N_f - N_c}{N_f} \right) \\ \tilde{\phi} &\rightarrow \left(1, \bar{N}_f, \tilde{q}, -1, \frac{N_f - N_c}{N_f} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

donde $\phi, \tilde{\phi}$ los entenderemos como vectores del espacio de *flavour* con componentes $\phi_i, \tilde{\phi}^{\tilde{i}}$ ($i, \tilde{i} = 1, \dots, N_f$). Cada una de estas componentes $\phi_i, \tilde{\phi}^{\tilde{i}}$ es a su vez un vector de alguna de las representaciones del grupo gauge $SU(N_c)$

- (ϕ_i) : Vive en la representación fundamental de $SU(N_c)$ y tienen carga q_i bajo el $U_X(1)$ anómalo.

- $(\tilde{\phi}^i)$: Vive en la representación antifundamental de $SU(N_c)$ y tienen carga \tilde{q}^i bajo el $U_X(1)$ anómalo.

Para el caso $N_f < N_c$, las variables invariantes $SU(N_c)$ -gauge que utilizaremos para desarrollar la teoría serán los mesones (invariantes gauge), definidos como⁴

$$M_i \equiv (M)_i^{\tilde{i}} \delta_{\tilde{i}} \equiv \sqrt{2(\phi_i)(\tilde{\phi}^{\tilde{i}})} \delta_{\tilde{i}} \in \mathbb{C} \quad (29)$$

que no tienen carga bajo el $SU(N_c)$ pero que sí están cargados bajo el $U_X(1)$ con carga

$$q_X((M^2)_i) = q_X(\phi_i) + \tilde{q}_X(\tilde{\phi}^{\tilde{i}}) \delta_{\tilde{i}} \quad (30)$$

4.2. Potencial de Kähler del modelo

Para obtener el potencial de Kähler de la teoría tendremos, *a nivel árbol*, tres aportaciones:

- *Kähler modulus + axión-dilatón + moduli de estructura compleja* [16]

$$K = -3\text{Log}(T + T^\dagger) - \text{Log}(S + S^\dagger) - \text{Log}\left(\int_{M_{int}} \Omega \wedge \bar{\Omega}\right) \quad (31)$$

- *Modulus no geométrico: Canónico*

$$K = \chi\chi^\dagger \quad (32)$$

- *Campos de materia: Canónico*

$$K = \sum_{i=1}^{N_f} (\phi^i)^\dagger (\phi_i) + \sum_{\tilde{i}=1}^{N_f} (\tilde{\phi}^{\tilde{i}})^\dagger (\tilde{\phi}_{\tilde{i}}) \quad (33)$$

Una vez estabilizados el axión-dilatón y los *moduli* de estructura compleja a una escala mayor mediante flujos, el Kähler *modulus*, el *modulus* no geométrico y los campos de materia se regirán por

⁴En la siguiente sección veremos por qué los definimos así.

$$K = -3\text{Log}(T + T^\dagger) + \sum_{i=1}^{N_f} (\phi^i)^\dagger (\phi_i) + \sum_{\tilde{i}=1}^{N_f} (\tilde{\phi}^{\tilde{i}})^\dagger (\tilde{\phi}_{\tilde{i}}) + \chi\chi^\dagger \quad (34)$$

habiéndose generado una contribución constante W_0 al superpotencial de la teoría.

Este contenido de campos es el que trataremos de estabilizar de tal manera que durante el proceso de estabilización generemos un régimen inflacionario acorde con los resultados experimentales observados.

5. Superpotencial W del modelo

El superpotencial W del modelo que estamos construyendo recibe, según todo lo expuesto hasta el momento, tres aportaciones:

- *Flujos activos de las 3-formas F_3 y H_3*

Nos basaremos en la compactificación de Giddings-Kachru-Polchinski (GKP) [15]. En ella se establece una jerarquía grande entre la escala de estabilización de los *moduli* de estructura compleja s^α más el axi3n-dilat3n S y la escala de estabilización del K3hler *modulus* T . Su propuesta consiste en escoger flujos (cuantizados) de la 3-forma (RR) H_3 y de la 3-forma (NS-NS) F_3 en 3-ciclos de la variedad interna [23],

$$\frac{1}{4\pi^2\alpha'} \int_A F_3 = M \quad ; \quad \frac{1}{4\pi^2\alpha'} \int_B H_3 = -N \quad (35)$$

donde M y N son enteros arbitrarios y A y B son 3-ciclos de la variedad interna de Calabi-Yau. Utilizando la dualidad entre cohomolog3a y homolog3a, tendremos $b^3 = 2h_{(2,1)} + 2$ elementos independientes en la base de 3-ciclos.

Por simplicidad elegiremos la base de homolog3a simpl3ctica $\{A^{\hat{\alpha}}, B_{\hat{\beta}}\}$, donde $\hat{\alpha}, \hat{\beta} = 0, 1, \dots, h_{(2,1)}$, con los elementos de cohomolog3a dual $\{a_{\hat{\alpha}}, b^{\hat{\beta}}\}$ tal que

$$\int_{A^{\hat{\alpha}}} a_{\hat{\beta}} = \delta_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}} \quad ; \quad \int_{B_{\hat{\beta}}} b^{\hat{\alpha}} = -\delta_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}} \quad ; \quad \int_{M_{int}} a_{\hat{\alpha}} \wedge b^{\hat{\beta}} = \delta_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} \quad (36)$$

Una vez fijada la base de homolog3a, definiremos los periodos y la matriz de periodos de la (3,0)-forma Ω , 3nico elemento ($h^{(3,0)} = 1$) de una base de (3,0)-formas del *Calabi-Yau*

$$\mathcal{Z}^{\hat{\alpha}} = \int_{A^{\hat{\alpha}}} \Omega \quad ; \quad \mathcal{F}_{\hat{\beta}} = \int_{B_{\hat{\beta}}} \Omega \quad ; \quad \mathcal{F}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \frac{\partial \mathcal{F}_{\hat{\alpha}}}{\partial \mathcal{Z}^{\hat{\beta}}} \quad (37)$$

y el vector de periodos $\Pi = (\mathcal{F}_{\hat{\beta}}, \mathcal{Z}^{\hat{\alpha}})$ donde $\hat{\alpha}, \hat{\beta} = 0, 1, \dots, h_{(2,1)}$.

Como consecuencia, podemos expandir Ω en su base de cohomolog3a

$$\Omega(s) = \mathcal{Z}^{\hat{\alpha}}(s)a_{\hat{\alpha}} - \mathcal{F}_{\hat{\alpha}}(s)b_{\hat{\alpha}} \quad (38)$$

donde los coeficiente de la expansión son los períodos y éstos sólo dependen holomórficamente de los *moduli* de estructura compleja s^α que parametrizan las deformaciones puras de la métrica (ver apéndice (B.3)) normalizadas como

$$\delta K_{\bar{a}\bar{b}} = \frac{1}{\|\Omega\|^2} s^\alpha w_{cd\bar{a}}^\alpha \Omega^{cd}_{\bar{b}} \quad (39)$$

siendo $w_{(2,1)}^\alpha$ una base de $H^{(2,1)}$ con $h^{(2,1)}$ elementos y $\|\Omega\|^2 \equiv \frac{1}{3!} \Omega_{abc} \bar{\Omega}^{abc}$.

Además, $\mathcal{F}_{\bar{\beta}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{z}^\beta}$, donde \mathcal{F} recibe el nombre de *prepotencial holomorfo*. Este caso se conoce como *geometría especial de Kähler*. En términos del vector de períodos calculado a partir del prepotencial, podemos reescribir el potencial de Kähler para los *moduli* de estructura compleja en eq.(31) como

$$\begin{aligned} K_{e.c.} &= -\text{Log} \left(\int_{M_{int}} \Omega \wedge \bar{\Omega} \right) = -\text{Log} \left(-\Pi^\dagger(\bar{s}) \Sigma \Pi(s) \right) = \\ &= -\text{Log} \left(\mathcal{Z}^{\hat{\alpha}}(s) \bar{\mathcal{F}}_{\hat{\alpha}}(s) - \bar{\mathcal{Z}}^{\hat{\alpha}}(s) \mathcal{F}_{\hat{\alpha}}(s) \right) \end{aligned} \quad (40)$$

donde Σ es la matriz simpléctica ($b^3 \times b^3$)

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

Podemos escoger un sistema de coordenadas llamado *sistema especial de coordenadas*, donde $\mathcal{Z}^{\hat{\alpha}}(s) = (1, s^\alpha)$. En este sistema de coordenadas el espacio de los *moduli* de estructura compleja s^α está codificado totalmente en el prepotencial $\mathcal{F}(s)$.

Si expandimos las 3-formas F_3 y H_3 en los $b_3 = 2h^{(2,1)} + 2$ elementos de su base de cohomología

$$F_3 = -4\pi^2 \alpha' \left(f_{\hat{\alpha}} a^{\hat{\alpha}} + f_{\hat{\alpha}+(h_{(2,1)}+1)} b_{\hat{\alpha}} \right) \quad (42)$$

$$H_3 = -4\pi^2 \alpha' \left(h_{\hat{\alpha}} a^{\hat{\alpha}} + h_{\hat{\alpha}+(h_{(2,1)}+1)} b_{\hat{\alpha}} \right) \quad (43)$$

estos flujos generan un superpotencial en la acción de la teoría efectiva SUGRA para los *moduli* de estructura compleja s^α que tiene la forma que dedujeron Gukov-Vafa-Witten (GVW) [14]

$$W_0 = \int_{M_{int}} G_3 \wedge \Omega = 4\pi^2 \alpha' (f - S h) \Pi(s) \quad (44)$$

donde $G_3 = F_3 - iSH_3$ es una combinación de las 3-formas F_3 y H_3 y del campo escalar (quiral) del axi3n-dilat3n $S = e^\sigma + ia$ de la teor3a IIB.

Este superpotencial estabiliza la estructura compleja y el axi3n dilat3n y supone una aportaci3n constante W_0 al superpotencial W del modelo que desarrollaremos. En nuestro trabajo, tendremos pues los *moduli* de estructura compleja y el axi3n-dilat3n estabilizados a una escala mayor quedando como remanente en nuestro modelo la contribuci3n constante W_0 .

- *Efectos no perturbativos generados din3micamente. Fase de confinamiento en el I.R de $SU(N_c)$*

$$W_{np} = (N_c - N_f) \left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\prod_{i,j=1}^{N_f} \phi_i \tilde{\phi}^{\tilde{j}} \delta_j^i} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} \quad ; \quad N_f < N_c \quad (45)$$

Como ϕ vive en la representaci3n fundamental de $SU_L(N_f)$ de *flavour* y en la representaci3n fundamental de $SU(N_c)$ de color es un objeto de dos 3ndices cada uno en un espacio distinto. En general $N_f \neq N_c$, por lo que es una matriz rectangular. Lo mismo ocurre con $\tilde{\phi}$, que vive en la representaci3n antifundamental de $SU_R(N_f)$ de *flavour* y en la representaci3n antifundamental de $SU(N_c)$ de color.

Para una teor3a gauge $SU(N_c)$ supersim3trica en ausencia de t3rminos de masa en el superpotencial, podemos encontrar una base de los objetos $\left\{ (\phi)_{ai} , \left(\tilde{\phi} \right)^{\tilde{a}\tilde{i}} \right\}$ en la que hay una correspondencia 1 a 1 entre *flavours* y colores [35].

Para el caso $N_f < N_c$ tenemos un espacio cl3sico de configuraciones de vac3o que cumple

$$(\phi)_{ia} = (\tilde{\phi})^{\tilde{i}\tilde{a}} = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & a_{N_f} \end{pmatrix} \quad (46)$$

con $a_i \in \mathbb{C}$ arbitrario y **siendo nulas el resto de las entradas de la matriz rectangular.**

Estos valores de a 's nos parametrizan el *background* de condensados (mesones) que tenemos en la teoría. Entonces, una parametrización de los campos escalares correspondientes a la materia viene dada en términos de la matriz cuadrada ($N_f \times N_f$) y diagonal

$$M^2 \equiv 2 \begin{pmatrix} a_1^2 & & & \\ & a_2^2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & a_{N_f}^2 \end{pmatrix} \quad (47)$$

Podemos evaluar el valor del denominador en eq.(45)

$$\det(M^2) = 2^{N_f} \prod_{i=1}^{N_f} a_i^2 = 2^{N_f} \prod_{i,j=1}^{N_f} \phi_i \tilde{\phi}^{\tilde{j}} \delta_j^i \in \mathbb{C} \quad (48)$$

siendo

$$a_i = \langle \phi_i \rangle = \langle \tilde{\phi}^{\tilde{i}} \rangle \quad (49)$$

Entonces, podemos reescribir eq.(45) como

$$W_{np} = (N_c - N_f) \left(\frac{2^{N_f} \Lambda^{3N_c - N_f}}{\det(M^2)} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} \quad (50)$$

La escala Λ es la escala generada dinámicamente para la nueva física a alta energía en la que tenemos todas las simetrías globales y la teoría gauge $SU(N_c)$ con N_f *flavours*. Esto es antes de romperse a la teoría gauge $SU(N_c - N_f)$ que queda a baja energía cuando todos los a 's toman valores muy grandes.

Esta escala de alta energía Λ , en la teoría de cuerdas IIB está relacionada con el Kähler *modulus* T y la constante k_{N_c} que aparece en la función cinética gauge del grupo gauge $SU(N_c)$ [18],[35]

$$\Lambda = e^{-\frac{4\pi k_{N_c} T}{3N_c - N_f}} \quad (51)$$

y se relaciona con la escala de baja energía, en la que el grupo gauge se ha roto a $SU(N_c - N_f)$ mediante:

$$\Lambda_{low}^{3(N_c - N_f)} = \frac{2^{N_f} \Lambda^{3N_c - N_f}}{\det(M^2)} \quad (52)$$

Por último, como los mesones están cargados bajo el $U_X(1)$, el *modulus* T ha de transformarse si queremos que W sea invariante. Es importante destacar que este superpotencial generado dinámicamente sólo tiene lugar si $N_f < N_c$.

- *Sector mínimo de inflación*

$$W_{sing} = \lambda_2 \chi^2 + \lambda_4 \chi^4 + \lambda_6 \chi^6 + \dots \quad (53)$$

Ésta es la última aportación al superpotencial W de la teoría. La entendemos como una modelización sencilla⁵ de la autointeracción de un *modulus* no geométrico. Este *modulus* no geométrico lo asumiremos *single* gauge tanto del $SU(N_c)$ como del $U_X(1)$. La autointeracción la modelizamos como un polinomio hasta orden sexto en potencias pares y con coeficientes reales. Lo único que imponemos pues es una simetría Z_2 para asegurarnos que el potencial escalar de la teoría tenga un punto crítico en $|\chi| = 0$ tras haber congelado su fase. Éste será el campo que nos hará la función de inflatón en nuestro modelo, como luego veremos. Su acoplo con el resto de los campos de la teoría es gravitacional eq.(19)

Entonces, el superpotencial del modelo se compone de tres partes

$$W = W_0 + W_{np} + W_{sing} \quad (54)$$

⁵Consideraremos W_{sing} como una aproximación polinómica en la que despreciamos los monomios $\lambda_{2k} \chi^{2k}$ de orden $k \geq 4$ asumiendo $\frac{\langle \chi \rangle}{M_{pl}} < 1$

- Degeneración en el número de *flavour*.

Si nos quedamos con el subconjunto de modelos en los que las familias están degeneradas podemos simplificar de forma notable las expresiones para el Kähler y el superpotencial

$$\langle \phi_i \rangle = \langle \phi_j \rangle = a = \langle \tilde{\phi}^i \rangle = \langle \tilde{\phi}^j \rangle \in \mathbb{C} \quad (55)$$

$$\det(M^2) = 2^{N_f} a^{2N_f} \in \mathbb{C} \quad (56)$$

simplificándose eq.(34) a

$$K = -3\text{Log}(T + T^\dagger) + 2 N_f a^\dagger a + \chi \chi^\dagger \quad (57)$$

Entonces vemos que, para el caso de los N_f *flavours* degenerados, toda la parametrización de la materia que forma condensados se reduce al parámetro $a \in \mathbb{C}$.

Si lo reescalamos de la forma $a = \frac{m}{\sqrt{2}} \implies \det(M^2) = m^{2N_f}$, con $m \in \mathbb{C}$,

$$K = -3\text{Log}(T + T^\dagger) + N_f m^\dagger m + \chi \chi^\dagger \quad (58)$$

$$W_{np} = (N_c - N_f) \left(\frac{2^{N_f} \Lambda^{3N_c - N_f}}{m^{2N_f}} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} = (N_c - N_f) \left(\frac{2^{N_f}}{m^{2N_f}} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} e^{-\frac{4\pi k_{N_c} T}{N_c - N_f}} \quad (59)$$

6. Compensación de anomalías: Mecanismo de Green-Schwarz

Si el Kähler *modulus* T está cargado bajo el $U_X(1)$ y por lo tanto se transforma no trivialmente, $q_X(T) \equiv \frac{\delta_{GS}}{2}$, aparecerán términos del tipo FI dependientes de T . La transformación correspondiente del Lagrangiano de la teoría tiene que ser compensada por la transformación que viene de la anomalía tipo $SU(N_c) \times SU(N_c) \times U_X(1)$ y la de tipo $U_X(1) \times U_X(1) \times U_X(1)$.

Para que ocurra esto es necesario que, en el caso de $h^{(1,1)} = 1$ (un único Kähler *modulus*):

- $SU(N_c) \times SU(N_c) \times U_X(1)$:

$$k_{N_c} \delta_{GS} = -\frac{1}{\pi} \sum_r I(r) q_X(r) \quad (60)$$

donde r denota un estado que se transforme bajo $SU(N_c)$, $I(r)$ denota el índice de la representación en la que se transforma ese estado r y $q_X(r)$ denota la carga bajo el $U_X(1)$ del mismo estado r .

- $U_X(1) \times U_X(1) \times U_X(1)$: Tiene un factor $\frac{1}{3}$ extra.

$$k_X \delta_{GS} = -\frac{1}{3\pi} \sum q_X^3 \quad (61)$$

donde la suma se entiende a todos los estados cargados bajo el $U_X(1)$. Esto es, cada entrada de un multiplete de $SU(N_c)$ es un estado de $U_X(1)$. k_X es la constante que aparece en la función cinética gauge del grupo $U_X(1)$

Para nuestro modelo en concreto:

- $SU(N_c) \times SU(N_c) \times U_X(1)$:

La materia $\{\phi, \tilde{\phi}\}$ se transforma en la fundamental/antifundamental de $SU(N_c)$ por lo tanto $I(r) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \delta_{GS} &= -\frac{1}{2k_{N_c}\pi} \left(\sum_{i=1}^{N_f} q_X(\phi_i) + \sum_{\tilde{i}=1}^{N_f} \tilde{q}_X(\tilde{\phi}^{\tilde{i}}) \right) = \\ &= -\frac{1}{2k_{N_c}\pi} \sum_{i=1}^{N_f} q_X(\phi_i) + \tilde{q}_X(\tilde{\phi}^{\tilde{i}}) \delta_{\tilde{i}} = -\frac{1}{2k_{N_c}\pi} \sum_{i=1}^{N_f} q_X((M^2)_i) \end{aligned} \quad (62)$$

donde r denota un estado que se transforme bajo $SU(N_c)$, $I(r)$ denota el índice de la representación en la que se tranforma ese estado r y $q_x(r)$ denota la carga bajo el $U_X(1)$ del mismo estado r .

■ $U_X(1) \times U_X(1) \times U_X(1)$:

$$\begin{aligned}\delta_{GS} &= -\frac{1}{3k_X\pi}N_c \left(\sum_{i=1}^{N_f} (q_X(\phi_i))^3 + \sum_{\tilde{i}=1}^{N_f} (\tilde{q}_X(\tilde{\phi}^{\tilde{i}}))^3 \right) = \\ &= -\frac{1}{3k_X\pi}N_c \sum_{i=1}^{N_f} \left[(q_X(\phi_i))^3 + (\tilde{q}_X(\tilde{\phi}^{\tilde{i}}))^3 \delta_{\tilde{i}i} \right]\end{aligned}\quad (63)$$

Una vez más, si nos reducimos al caso más sencillo de N_f *flavours* degenerados, las expresiones se simplifican bastante:

$$q_X(\phi_i) = q_X(\phi_j) \equiv q \quad (64)$$

$$\tilde{q}_X(\tilde{\phi}^{\tilde{i}}) = \tilde{q}_X(\tilde{\phi}^{\tilde{j}}) \equiv \tilde{q}$$

$$q_X((M^2)_i) = q_X((M^2)_j) = q + \tilde{q} \quad (65)$$

resultando

$$-\frac{N_f}{2k_{N_c}\pi}(q + \tilde{q}) = \delta_{GS} = -\frac{N_f N_c}{3k_X\pi}(q^3 + \tilde{q}^3) \quad (66)$$

entonces podemos reducir el número de parámetros

$$\{k_X, k_{N_c}, q, \tilde{q}, \delta_{GS}\} \implies \{k_{N_c}, q, \tilde{q}\}$$

haciendo

$$\delta_{GS} = -\frac{N_f}{2k_{N_c}\pi}(q + \tilde{q}) \quad (67)$$

$$k_X = \frac{2}{3}N_c \left(\frac{q^3 + \tilde{q}^3}{q + \tilde{q}} \right) k_{N_c} \quad (68)$$

Podemos ver que W es invariante $U_X(1)$ si se cumplen eq.(67) y eq.(68).

7. Métrica de Kähler K_{ij} del modelo

Para el caso de N_f *flavours* degenerados⁶, eq.(58) queda de forma

$$K = -3\text{Log}(T + \bar{T}) + N_f m\bar{m} + \chi\bar{\chi} \quad (69)$$

que nos genera una métrica de Kähler, real y diagonal

$$(K)_{a\bar{b}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{(T+\bar{T})^2} & 0 & 0 \\ 0 & N_f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (K)_{\bar{a}b} \quad (70)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} g &= \frac{3}{(T+\bar{T})^2} dT \otimes d\bar{T} + N_f dm \otimes d\bar{m} + d\chi \otimes d\bar{\chi} + \\ &+ \frac{3}{(T+\bar{T})^2} d\bar{T} \otimes dT + N_f d\bar{m} \otimes dm + d\bar{\chi} \otimes d\chi \end{aligned} \quad (71)$$

Como la métrica es real, podemos escribirlo todo en función de las componentes real e imaginaria de los campos sin que se mezclen (reales con imaginarias). Además, como la métrica original es diagonal, esto se mantendrá.

Llamaremos

$$T = T_R + iT_I ; m = m_R + im_I ; \chi = \chi_R + i\chi_I \quad (72)$$

En función de las componentes reales e imaginarias,

$$\begin{aligned} g &= 2 \frac{3}{4T_R^2} [dT_R \otimes dT_R + dT_I \otimes dT_I] + 2N_f [dm_R \otimes dm_R + dm_I \otimes dm_I] + \\ &+ 2 [d\chi_R \otimes d\chi_R + d\chi_I \otimes d\chi_I] \end{aligned} \quad (73)$$

Resultando entonces:

$$(K)_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2T_R^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2T_R^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2N_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (74)$$

⁶Para ir acorde con la notación en el apéndice (A), vamos a identificar (para cualquier campo complejo) $\Phi^\dagger \equiv \bar{\Phi}$

Podemos hacer un cambio real de las coordenadas reales (paso a polares en m y en χ) sin que cambien los autovalores de η^i_j ni el valor de ϵ . El escalar ϵ y la matriz η (ambos en el espacio de campos) se presentan en detalle en el apéndice (C). Son cantidades medidas experimentalmente por WMAP y suponen cotas experimentales a los modelos de inflación.

$$T_R \equiv t ; T_I \equiv \tau ; m_R = |m|\cos(\vartheta) ; m_I = |m|\sen(\vartheta) ; \chi_R = |\chi|\cos(\Omega) ; \chi_I = |\chi|\sen(\Omega)$$

quedando eq.(71) en función de las nuevas coordenadas reales como

$$g = \frac{3}{2t^2} [dt \otimes dt + d\tau \otimes d\tau] + 2N_f [d|m| \otimes d|m| + |m|^2 d\vartheta \otimes d\vartheta] + 2 [d|\chi| \otimes d|\chi| + |\chi|^2 d\Omega \otimes d\Omega] \quad (75)$$

esto es,

$$(K')_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2t^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2t^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2N_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N_f|m|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2|\chi|^2 \end{pmatrix} \quad (76)$$

A partir de eq.(75) podemos calcular los símbolos de Christoffel independientes que luego necesitaremos para obtener η

$$\Gamma_{tt}^t = -\frac{1}{t} ; \Gamma_{\tau\tau}^t = \frac{1}{t} ; \Gamma_{t\tau}^\tau = -\frac{1}{t} ; \Gamma_{\vartheta\vartheta}^{|m|} = -|m| ; \Gamma_{|m|\vartheta}^\vartheta = \frac{1}{|m|} ; \Gamma_{\Omega\Omega}^{|\chi|} = -|\chi| ; \Gamma_{|\chi|\Omega}^\Omega = \frac{1}{|\chi|} \quad (77)$$

Para un análisis más detallado sobre la extensión compleja de métricas reales, ver apéndice (A).

8. Potencial escalar del modelo: F/D-términos

Vamos a calcular para nuestro modelo las dos aportaciones al potencial escalar de la teoría. Aquí se presenta un resumen para el caso de un único grupo gauge. El cálculo de V_F y V_D para el sector $(T - m)$, generalizado a n grupos gauge, se encuentra en los apéndices (E.1) y (E.2). V_D no varía al incluir el sector del singlete χ , pues no está cargado bajo el grupo gauge.

8.1. V_F del modelo

Para computar el potencial escalar de la teoría vamos a nombrar por separado a cada una de las contribuciones que tenemos en el superpotencial total para verlo como una suma de cinco cantidades complejas

$$W = W_0 + W_{np}(T, m) + W_{\lambda_2}(\chi) + W_{\lambda_4}(\chi) + W_{\lambda_6}(\chi) \quad (78)$$

Veamos cada una de las contribuciones:

- Flujos :

$$W_0 = |W_0|e^{i\varphi_0} = Cte \quad (79)$$

- Confinamiento en el I.R. :

$$W_{np}(T, m) = |W_{np}|e^{i\varphi_{np}} \quad (80)$$

donde

$$|W_{np}| = (N_c - N_f) \left(\frac{\sqrt{2}}{|m|} \right)^{\frac{2N_f}{N_c - N_f}} e^{-\frac{4\pi k_{N_c}}{N_c - N_f} t} ; \quad \varphi_{np} = -\frac{4\pi k_{N_c}}{N_c - N_f} \tau - \frac{2N_f}{N_c - N_f} \vartheta \quad (81)$$

- Autoacoplo cuadrático de χ :

$$W_{\lambda_2}(\chi) = |W_{\lambda_2}|e^{i2\Omega} \quad (82)$$

donde

$$|W_{\lambda_2}| = \lambda_2 |\chi|^2 ; \quad \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad (83)$$

- Autoacoplo cuártico de χ :

$$W_{\lambda_4}(\chi) = |W_{\lambda_4}|e^{i4\Omega} \quad (84)$$

donde

$$|W_{\lambda_4}| = \lambda_4 |\chi|^4 ; \quad \lambda_4 \in \mathbb{R} \quad (85)$$

- Autoacoplo sexto de χ :

$$W_{\lambda_6}(\chi) = |W_{\lambda_6}| e^{i6\Omega} \quad (86)$$

donde

$$|W_{\lambda_6}| = \lambda_6 |\chi|^6 \quad ; \quad \lambda_6 \in \mathbb{R} \quad (87)$$

Autoacoplo significa autoacoplo en el superpotencial W . Sin embargo, χ se acoplará a los demás campos en V a través del Kähler.

Vamos a calcularnos ahora las cantidades que aparecen en eq.(19).

$$\begin{aligned} D_T W &= \frac{\partial W}{\partial T} + K_T W \\ D_m W &= \frac{\partial W}{\partial m} + K_m W \\ D_\chi W &= \frac{\partial W}{\partial \chi} + K_\chi W \end{aligned} \quad (88)$$

Utilizando eq.(58), eq.(59) y eq.(54) obtenemos:

$$D_T W = \left(\frac{-3}{2t}\right) W_0 + \left(\frac{-3}{2t} - \frac{4\pi k_{N_c}}{N_c - N_f}\right) W_{np} + \left(\frac{-3}{2t}\right) W_{\lambda_2} + \left(\frac{-3}{2t}\right) W_{\lambda_4} + \left(\frac{-3}{2t}\right) W_{\lambda_6} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} D_m W &= \frac{1}{m} \left[(N_f |m|^2) W_0 + \left(N_f |m|^2 - \frac{2N_f}{N_c - N_f} \right) W_{np} + (N_f |m|^2) W_{\lambda_2} + \right. \\ &\quad \left. + (N_f |m|^2) W_{\lambda_4} + (N_f |m|^2) W_{\lambda_6} \right] \end{aligned} \quad (90)$$

$$D_\chi W = \frac{1}{\chi} \left[(|\chi|^2) W_0 + (|\chi|^2) W_{np} + (|\chi|^2 + 2) W_{\lambda_2} + (|\chi|^2 + 4) W_{\lambda_4} + (|\chi|^2 + 6) W_{\lambda_6} \right] \quad (91)$$

Como la métrica en eq.(76) es diagonal, tendremos que calcularnos el módulo cuadrado de eq.(89), eq.(90) y eq.(91). Nos será útil definir la siguiente función cuyos argumentos constituyen 5 números complejos $z = |z_i| e^{i\alpha_i}$

- $|z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5|^2 \equiv \text{mod}^2 [|z_1|, |z_2|, |z_3|, |z_4|, |z_5|, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5] =$
 $= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 +$
 $+ 2|z_1||z_2|\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + 2|z_1||z_3|\cos(\alpha_1 - \alpha_3) + 2|z_1||z_4|\cos(\alpha_1 - \alpha_4) +$
 $+ 2|z_1||z_5|\cos(\alpha_1 - \alpha_5) + 2|z_2||z_3|\cos(\alpha_2 - \alpha_3) + 2|z_2||z_4|\cos(\alpha_2 - \alpha_4) +$
 $+ 2|z_2||z_5|\cos(\alpha_2 - \alpha_5) + 2|z_3||z_4|\cos(\alpha_3 - \alpha_4) + 2|z_3||z_5|\cos(\alpha_3 - \alpha_5) +$
 $+ 2|z_4||z_5|\cos(\alpha_4 - \alpha_5)$ (92)

Entonces⁷ definiremos:

$$|F_T|^2 = \frac{4t^2}{3} \text{mod}^2 \left[\left(\frac{-3}{2t} \right) |W_0|, \left(\frac{-3}{2t} - \frac{4\pi k N_c}{N_c - N_f} \right) |W_{np}|, \left(\frac{-3}{2t} \right) |W_{\lambda_2}|, \left(\frac{-3}{2t} \right) |W_{\lambda_4}|, \right. \\ \left. , \left(\frac{-3}{2t} \right) |W_{\lambda_6}|, \varphi_0, \varphi_{np}, 2\Omega, 4\Omega, 6\Omega \right] \quad (93)$$

$$|F_m|^2 = \frac{1}{N_f} \text{mod}^2 \left[(N_f|m|) |W_0|, \left(N_f|m| - \frac{2N_f}{|m|} \right) |W_{np}|, (N_f|m|) |W_{\lambda_2}|, (N_f|m|) |W_{\lambda_4}|, \right. \\ \left. , (N_f|m|) |W_{\lambda_6}|, \varphi_0 - \vartheta, \varphi_{np} - \vartheta, 2\Omega - \vartheta, 4\Omega - \vartheta, 6\Omega - \vartheta \right] \quad (94)$$

$$|F_\chi|^2 = \text{mod}^2 \left[(|\chi|) |W_0|, (|\chi|) |W_{np}|, \left(|\chi| + \frac{2}{|\chi|} \right) |W_{\lambda_2}|, \left(|\chi| + \frac{4}{|\chi|} \right) |W_{\lambda_4}|, \right. \\ \left. , \left(|\chi| + \frac{6}{|\chi|} \right) |W_{\lambda_6}|, \varphi_0 - \Omega, \varphi_{np} - \Omega, 1\Omega, 3\Omega, 5\Omega \right] \quad (95)$$

$$|W|^2 = \text{mod}^2 [|W_0|, |W_{np}|, |W_{\lambda_2}|, |W_{\lambda_4}|, |W_{\lambda_6}|, \varphi_0, \varphi_{np}, 2\Omega, 4\Omega, 6\Omega] \quad (96)$$

por lo que eq.(19) se puede escribir como

7

- $\text{mod}^2 [|z_1|, |z_2|, |z_3|, |z_4|, |z_5|, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5] =$
 $= \text{mod}^2 [|z_1|, |z_2|, |z_3|, |z_4|, |z_5|, \alpha_1 - \beta, \alpha_2 - \beta, \alpha_3 - \beta, \alpha_4 - \beta, \alpha_5 - \beta]$

$$V_F = e^K [|F_T|^2 + |F_m|^2 + |F_\chi|^2 - 3|W|^2] \quad (97)$$

Es interesante resaltar que el superpotencial W y el potencial escalar de la teoría V (construido a partir de él y del Kähler) tienen una dirección plana. Esto ocurre por tres razones:

- Trabajando en coordenadas reales, tenemos el siguiente conjunto de coordenadas para la teoría

$$\{t, \tau, |m|, \vartheta, |\chi|, \Omega\} \quad (98)$$

podemos hacer una transformación sobre las coordenadas reales tal que

$$\{t, |m|, |\chi|, \tau, \vartheta, \Omega\} \implies \{t, |m|, |\chi|, \Theta, \varphi_{np}, \Omega\} \quad (99)$$

mediante una matriz de $GL(2, R)$ con determinante $\sqrt{b^2 + c^2}$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{np} \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -b \\ \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & \frac{-c}{\sqrt{b^2+c^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \vartheta \end{pmatrix} \quad (100)$$

donde

$$b = \frac{2N_f}{N_c - N_f} \quad ; \quad c = \frac{4\pi k_{N_c}}{N_c - N_f} \quad (101)$$

El superpotencial W sólo ve la dirección φ_{np} . Entonces, la combinación ortogonal a φ_{np} , que denotaremos por Θ , es una dirección plana del superpotencial W . Pero una dirección plana en el superpotencial W no implica que también lo sea en V , pues se puede filtrar a través del Kähler y sus derivadas o a través de los D-términos si la teoría es gauge.

- El Kähler sólo depende de t (la componente real de T) y de los módulos $|m|$ y $|\chi|$, por lo que la dirección Θ no se filtrará a través del Kähler ni de sus derivadas en el potencial escalar V .
- Como veremos en la siguiente sección, la contribución V_D al potencial escalar V sólo depende de $|m|$ y de t , por lo que Θ tampoco aparece en V_D .

Entonces, la dirección Θ es realmente una dirección plana del sistema. No influirá para nada en la dinámica de las otras variables al resolver sus e.o.m's ni en ninguna otra cantidad.

8.2. V_D del modelo

Como expusimos al principio, los campos T y χ son singletes bajo el $SU(N_c)$. También supondremos todos los N_f *flavours* degenerados. Además, como el grupo $SU(N_c)$ gauge está en la fase confinante (I.R), vimos que $\langle \phi \rangle = \langle \tilde{\phi} \rangle = a \in \mathbb{C}$, lo que hace que, al transformarse en las representaciones fundamental y antifundamental (respectivamente), no se generen D-términos para el $SU(N_c)$.

Todo queda pues a calcular los D-términos que genere el $U_X(1)$ anómalo de la teoría, bajo el cual, todos los campos (salvo el χ) están cargados.

Escribamos la transformación de los campos bajo el $U_X(1)$ como

$$\eta_\phi^X = iq\phi \quad (102)$$

$$\eta_{\tilde{\phi}}^X = i\tilde{q}\tilde{\phi} \quad (103)$$

$$\eta_T^X = i\frac{\delta_{GS}}{2} \quad (104)$$

Los D-términos que tenemos son

$$D_\phi^X = -iK_\phi\eta_\phi^X = N_fq|\phi|^2 \quad (105)$$

$$D_{\tilde{\phi}}^X = -iK_{\tilde{\phi}}\eta_{\tilde{\phi}}^X = N_f\tilde{q}|\tilde{\phi}|^2 \quad (106)$$

$$D_T^X = -iK_T\eta_T^X = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{-3\delta_{GS}}{2t}\right) \quad (107)$$

Utilizando

$$f_X^G = \frac{k_X}{2\pi}T \quad (108)$$

y sustituyendo (105),(106) y (107) en eq.(20), obtenemos

$$V_D = \frac{1}{2} \frac{1}{\text{Re}\{f^X\}} D^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{k_X t}\right) \left[N_fq|\phi|^2 + N_f\tilde{q}|\tilde{\phi}|^2 - \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3\delta_{GS}}{2t}\right) \right]^2 \quad (109)$$

y como $\langle \phi \rangle = \langle \tilde{\phi} \rangle = a \in \mathbb{C}$

$$V_D = \frac{\pi}{k_X t} \left[N_f(q + \tilde{q})|a|^2 - \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3\delta_{GS}}{2t}\right) \right]^2 \quad (110)$$

Haciendo de nuevo el reescale que hicimos $a = \frac{m}{\sqrt{2}}$ obtenemos la expresión definitiva de los D-términos como expresión de los mismos campos que teníamos en los F-términos

$$V_D = \frac{\pi}{4k_X t} \left[N_f (q + \tilde{q}) |m|^2 - \left(\frac{3\delta_{GS}}{2t} \right) \right]^2 \quad (111)$$

Si utilizamos eq.(67) y eq.(68), resultado de la cancelación de anomalías, obtenemos

$$V_D = \frac{3\pi N_f^2}{8 k_{N_c} N_c t} \frac{(q + \tilde{q})^3}{q^3 + \tilde{q}^3} \left[|m|^2 + \frac{3}{4\pi k_{N_c} t} \right] \quad (112)$$

9. Vacíos *de Sitter* en el sector $(T - m)$

Vamos a centrarnos en la posibilidad de usar los D-términos asociados al $U_X(1)$ anómalo para hacer el *uplifting* de los vacíos *AdS* (constante cosmológica negativa) a vacíos *dS* o *Minkowski* (constante cosmológica positiva o nula).

9.1. Modelo KKLТ

En el modelo KKLТ [16], Kachru et al. idearon un método para construir vacíos *dS* a través de una combinación de D-branas, flujos y efectos no perturbativos. Lo hicieron en el contexto de la teoría de cuerdas IIB, estabilizando los *moduli* de estructura compleja y el axi3n-dilat3n mediante flujos de la manera que hemos expuesto en la secci3n (5). Dedujeron una acci3n efectiva 4-dimensional para el K3hler *modulus* restante a partir de

$$K = -3\text{Log}(T + T^\dagger) \quad (113)$$

$$W = W_{\text{flujos}} + W_{np} = W_0 + Ae^{-aT} \quad (114)$$

donde W_0 es el par3metro efectivo resultado de haber integrado los *moduli* de estructura compleja y a, A son constantes.

El potencial escalar $V = V_F$ que se calcula a partir de eq.(19) posee un m3nimo *AdS* que preserva SUSY. Para subirlo a *dS*, inclu3an anti D3-branas, generando una nueva contribuci3n al potencial escalar

$$V = V_F + \frac{k}{t^2}, \quad \text{siendo } T = t + i\tau \quad (115)$$

Para un valor adecuado del par3metro k , Kachru et al. encontraban vac3os *dS*. El problema es que el nuevo t3rmino $\frac{k}{t^2}$ rompe expl3citamente SUSY haciendo la teor3a menos manejable.

9.2. Modelo BKQ

En [17], Burgess et al. hicieron una variaci3n del modelo KKLТ. Evitaban el problema de hacer el *uplifting* con anti D3-branas activando flujos para los campos gauge viviendo en D7-branas. Estos flujos generar3an un t3rmino de FI para el $U_X(1)$ an3malo en la acci3n 4-dimensional de la forma

$$V_D = \frac{\pi}{t} \left(\frac{E}{t} + \sum_i q_i |\varphi_i|^2 \right)^2 \quad (116)$$

donde E es una constante que aparece como resultado de los flujos para los campos gauge viviendo en las D7-branas, φ_i son las componentes escalares de los supercampos quirales⁸ y q_i son las cargas de éstos bajo el $U_X(1)$.

Por último, asumían que $\langle \varphi_i \rangle = 0$ basándose en dos argumentos diferentes:

- Si las cargas son tales que el D-término no se cancela, es razonable asumir que los campos φ se coloquen en el origen para minimizar el potencial.
- Si W no depende de los campos φ 's, las contribuciones a V_F serán cuadráticas $|D_i W|^2 \sim |W \varphi_i^*|^2$ tendiendo a situar los campos en el origen.

Entonces

$$V_D \sim \frac{\pi E^2}{t^3} \quad (117)$$

que tiene una forma similar al término de *uplifting* propuesto por KKLT. Para un valor adecuado de E , el mínimo original de KKLT pasaba de AdS a dS .

Este resultado fue criticado por Choi et al [20]. Su argumento se basa en la relación existente en SUGRA N=1 d=4 entre F-términos y D-términos. Utilizando eq.(21), los D-términos han de anularse en vacíos que mantengan SUSY, como es el caso original de KKLT, por lo que el *uplifting* mediante D-términos no puede ocurrir en el modelo BKQ.

9.3. Modelo ACCD

Finalmente, en [18], Achúcarro et al. reformularon el *uplifting* mediante D-términos pero de una manera consistente. La idea es utilizar los trabajos de Intriligator y Seiberg [35],[33] sobre las fases en teorías gauge e identificar W_{np} en eq.(114) con eq.(59)

⁸Tomaban un Kähler canónico para los φ 's

$$W_{np} = Ae^{-aT} = (N_c - N_f) \left(\frac{2^{N_f}}{m^{2N_f}} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} e^{-\frac{4\pi k_{N_c} T}{N_c - N_f}} \quad (118)$$

Entonces

$$A \rightarrow A(m) = (N_c - N_f) \left(\frac{2^{N_f}}{m^{2N_f}} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} \quad (119)$$

$$a = \frac{4\pi k_{N_c}}{N_c - N_f} \quad (120)$$

donde m es el mesón (condensado de squarks).

De esta manera todo es consistente y SUSY se rompe tanto por F-términos como por D-términos produciéndose el *uplifting* de AdS a dS de la misma manera que en el caso anterior, pero con $\langle m \rangle \neq 0$

El papel de W_0 es fundamental, pues determina la existencia o no de mínimo⁹ así como el *uplifting* a dS o *Minkowski*. Valores pequeños de W_0 resultan en valores pequeños de V_F lo cual implica que V_D domina y el mínimo desaparece. Valores grandes de W_0 resultan en valores grandes de V_F y V_D no es suficiente para subir el mínimo a dS o *Minkowski*.

El potencial escalar en el modelo ACCD¹⁰ resulta

$$V_F = A(t, |m|) + B(t, |m|) + C(t, |m|) \cos(\varphi_{np}) \quad (121)$$

donde las funciones $A(t, |m|)$, $B(t, |m|)$ y $C(t, |m|)$ se han calculado¹¹ en apéndice (E.1) y son las ecuaciones (E.44), (E.45) y (E.46) respectivamente.

V_F tiene un extremo para

⁹En *supergravedad*, añadir una constante W_0 al superpotencial varía V_F , pues W_0 se filtra en términos de $dim > 4$ que desaparecen al tomar el límite SUGRA \rightarrow SUSY como vimos en eq.(15)

¹⁰Hemos elegido $W_0 = |W_0|$, que no es más que alinear W_0 en la dirección real. También podemos verlo como que alineamos W_{np} y $-W_0$, para que en V_F sólo aparezca φ_{np} en el argumento del coseno.

¹¹En el apéndice (E), la notación es ligeramente distinta para poder calcular sistemáticamente. $|\varphi_i|$ y θ_i denotan el módulo del condensado y la fase no perturbativa asociados al i -ésimo grupo gauge.

$$\varphi_{np} = n\pi \quad (122)$$

con n entero. Dependiendo de los signos de A y B , n par (impar) corresponde a un mínimo (máximo) de V_F o vice versa. Estos extremos también lo serán de $V = V_F + V_D$ debido a que V_D no depende de φ_{np} .

Como podemos ver en eq.(E.44) y eq.(E.45), $A(t, |m|) > 0$ siempre y, si se cumple que $N_c > N_f$, $B(t, |m|) > 0$ también. Esto implica que si $C(t, |m|) > 0$ para una elección de los parámetros del modelo, $\cos(\varphi_{np}) = -1$.

La expresión para V_D la hemos calculado de forma general en el apéndice (E.2). Podemos también tomarla directamente¹² de la eq.(112).

Uno puede *integrar out* φ_{np} (eligiendo el coseno = -1) y trabajar con un potencial de dos variables

$$V(t, |m|) = A(t, |m|) + B(t, |m|) - C(t, |m|) + V_D(t, |m|) \quad (123)$$

Para valores razonables de N_c podemos escoger los parámetros gauge (cargas y constante gauge) de forma que

- hay mínimos de V_F que rompen SUSY y tienen energía de vacío negativa (AdS)
- V_D no se anula y resulta suficiente para subir estos vacíos de AdS a dS .

Podemos ver que el vacío romperá SUSY obligatoriamente ya que las condiciones $D_T W = D_m W = 0$ sólo se cumplirán simultáneamente en el límite de *decompactificación*, $Re\{T\} \rightarrow \infty$.

$$\frac{1}{K_T} D_T W - \frac{1}{K_m} D_m W = W_{np} \left(\frac{T + \bar{T}}{3} a + \frac{b}{|m|^2} \right), \quad (124)$$

con (a, b) definidos en eq.(118) como $W_{np} \propto m^{-b} e^{-aT}$. Como los parámetros (a, b) son definidos positivos, esta ecuación no tiene solución compatible

¹²Aunque la eq.(112) la hemos deducido en el modelo ACCD extendido con el campo χ , sigue siendo válida para el modelo ACCD original ya que χ es singlete bajo el $U_X(1)$ anómalo.

con $D_T W = D_m W = 0$ para valores físicos ($0 < \text{Re}\{T\} < \infty$) del modulus T .

Una colección de ejemplos para la elección de los parámetros

$$\{N_c, N_f, k_{N_c}, q, \tilde{q}\}$$

puede encontrarse en [18].

De aquí en adelante nos quedaremos con la elección

$$N_c = 20, \quad N_f = 1, \quad k_{N_c} = \frac{1}{2}, \quad q = 1, \quad \tilde{q} = \frac{1}{10} \quad (125)$$

para la que $C(t, |m|) > 0$. Entonces

$$\varphi_{np} = (2n + 1)\pi \quad (126)$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Tendremos una colección infinita de vacíos degenerados para distintos valores de n .

Para la elección (125) de parámetros resulta

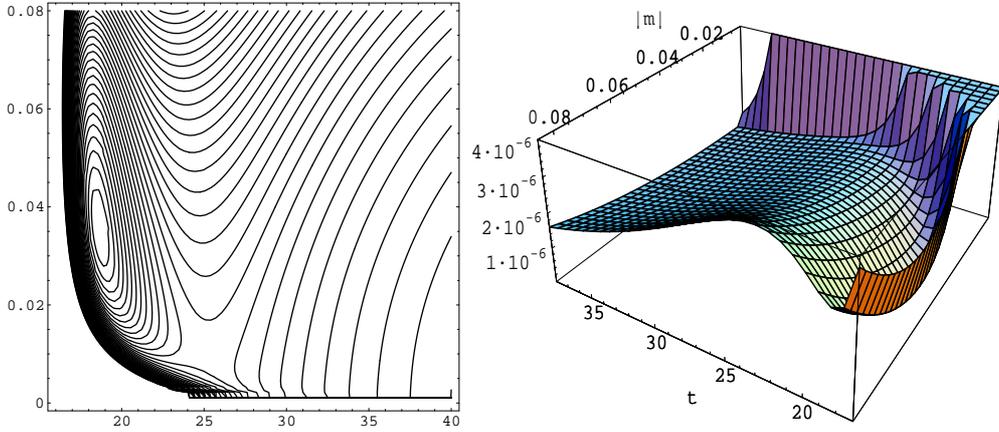


Figura 2: Contornos y superficie de $V(t, |m|)$ para $|W_0| = 0,42$

vemos que el sistema posee un mínimo *Minkowski* y un punto de silla

$$t_{min} = 18,641; \quad |m|_{min} = 0,036; \quad V_{min} = 0 \quad (127)$$

$$t_{sad} = 25,048 ; \quad |m|_{sad} = 0,010 ; \quad V_{sad} = 1,5 \times 10^{-6} \quad (128)$$

Vemos que la estabilización con vacío *Minkowski* se puede llevar a cabo de forma consistente en el modelo ACCD.

Para ver mejor el papel de los flujos a la hora de determinar la forma de $V(t, |m|_{min})$

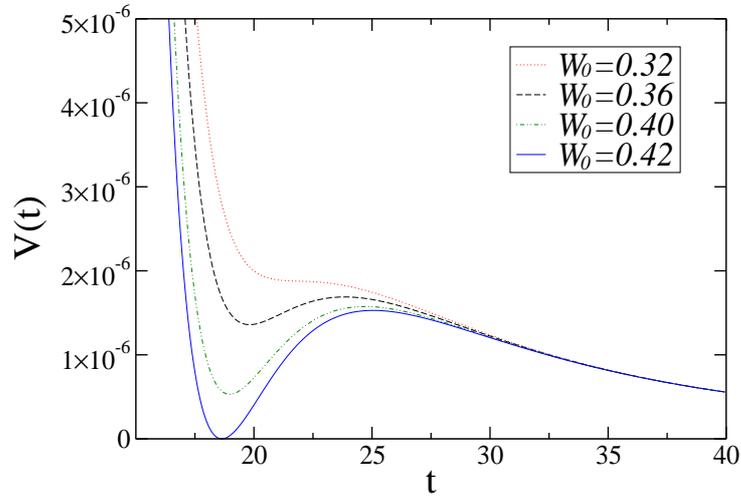


Figura 3: Potencial escalar en función de t para $|m|$ integrado out.

Resulta entonces que el papel de los flujos que activemos en las dimensiones extras es fundamental para la existencia y la altura del mínimo.

10. Inflación en el modelo *ACCD*: candidatos a inflatón y problemas

En [27], hemos analizado las posibilidades de generar inflación dentro del modelo *ACCD*.

Inflación es un período cosmológico en el que el Universo experimenta una expansión superlumínica. El factor de escala $a(t)$ evoluciona de forma exponencial con el tiempo

$$a(t) \simeq e^{Ht} \quad (129)$$

siendo el elemento de línea ds^2 de la forma FRW

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dx_i dx^i. \quad (130)$$

H se denomina parámetro de Hubble. Durante el período inflacionario, el potencial $V \simeq V_0$ se mantiene **cuasi constante**. La energía cinética del sistema es despreciable frente a V_0 (debido a la planitud del potencial) y el Universo entra en un período en el que domina la energía de vacío V_0 .

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \simeq \frac{V_0}{3} \Rightarrow a(t) \simeq e^{\frac{\sqrt{V_0}}{\sqrt{3}} t} \quad (131)$$

A menudo, conseguir un potencial V lo suficientemente plano para el inflatón (campo(s) responsable(s) de la inflación), conlleva un ajuste fino de los parámetros del modelo.

10.1. El problema η en supergravedad y condiciones iniciales

En teorías supersimétricas, el inflatón ϕ , es generalmente una componente (real) de algún campo escalar complejo, Φ . Para tener inflación es necesario que los parámetros de *slow-roll* definidos (en unidades de Planck) como¹³

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{V'}{V} \right]^2, \quad \eta \equiv \frac{V''}{V}, \quad (132)$$

¹³En el caso de inflación con varios campos, el parámetro η se generaliza al autovalor más negativo de la matriz η_j^i . Para ver en detalle la generalización de los parámetros de *slow-roll* para inflación con varios campos, consultar el apéndice (C).

(las primas denotan diferenciación con respecto a ϕ) deben ser $\ll 1$. Por otro lado, es bien conocido [28] que, generalmente, las teorías de supergravedad presentan el llamado problema η , el cual se refiere al hecho de que η es de orden uno de forma natural debido a la presencia del factor e^K en eq.(19).

Cojamos, por ejemplo, el potencial de Kähler más sencillo (canónico), $K = |\Phi|^2$. Si escribimos eq.(19) como

$$V = e^K \tilde{V} \quad , \quad (133)$$

y expandimos la exponencial a primer orden, vemos que

$$V \sim (1 + |\Phi|^2 + \dots) \tilde{V} \quad . \quad (134)$$

En otras palabras, Φ , y por consiguiente ϕ , adquiere un término de masa de orden \tilde{V} (en unidades de Planck) y la correspondiente contribución a η en (132) es de orden uno, lo cual no favorece en absoluto *slow roll*.

Se han propuesto algunos mecanismos para evitar o suavizar el problema η . Si ϕ no aparece en el potencial de Kähler, no cogerá un término de masa proveniente de la expansión de e^K . Sin embargo, esto no es ni suficiente ni necesario para evitar el problema η , ya que también hay que tener en cuenta la posible dependencia de \tilde{V} con Φ en eq.(133). Esquemáticamente,

$$V \sim (1 + |\Phi|^2 + \dots) \left[\tilde{V} \right]_{\Phi=0} + e^K \left[\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \Phi \partial \bar{\Phi}} \right]_{\Phi=0} |\Phi|^2 + \dots \quad . \quad (135)$$

Entonces, lo que debe ocurrir es que los varios términos de masa $|\Phi|^2$ que aparecen en eq.(135) se cancelen entre ellos.

Además del problema η , está el problema de tener que elegir unas condiciones iniciales para el campo del inflatón. Sería preferible no tener que situar el inflatón en ningún punto de partida en concreto para tener suficiente inflación. Esto es un problema típico de naturalidad. Una posibilidad atractiva a este respecto es tener inflación topológica [4, 5, 6], la cual ocurre en modelos en los que el potencial para el inflatón tiene un punto de silla entre diferentes vacíos (mínimos) degenerados. Esto da lugar a que se formen defectos topológicos (domain walls si los vacíos tienen simetría Z_N) y, en presencia de un Universo en expansión, el falso vacío dentro del defecto sirve como sitio para que inflación ocurra. En [36] presentan y justifican el resultado de que la expansión topológica tiene lugar siempre que se cumplan las condiciones de *slow-roll* en el interior del defecto.

10.2. Candidatos a inflatón en modelos ACCD

A la hora de buscar candidatos a inflatón en ACCD, vamos a analizar cada uno de los sectores que aparecen en el modelo. Por un lado veremos el sector del modulus t y la materia $|m|$ y por otro lado veremos el de la fase φ_{np} .

- *Inflación en el sector $(t - |m|)$*

Dentro del modelo ACCD tendremos varios candidatos a ser el campo del inflatón. En primer lugar podemos pensar en el *modulus* t o en $|m|$. Como hemos expuesto, tanto t como $|m|$ presentan un claro problema η debido a que aparecen en el potencial de Kähler. Entonces, podemos concluir que no se cumplirán las condiciones de *slow-roll* si buscamos inflación topológica en el punto de silla (128).

- *Inflación en la dirección de φ_{np}*

Aparentemente, la idea de utilizar φ_{np} como inflatón parece más viable. Esto se debe a que la parte proporcional a τ en eq.(100) no aparece en el potencial de Kähler (58). Aún así, hemos de tener cuidado porque sí que aparece en el potencial \tilde{V} .

Si suponemos $W_{np} = Ae^{-aT}$, entonces τ aparece en \tilde{V} a través de $\cos(-a\tau)$. En esto se basaron en [25] y [26] para hacer su modelo *racetrack* de inflación basada en τ . Partían del modelo KKLT, pero con dos exponenciales

$$W = W_0 + Ae^{-aT} + Be^{-bT} \quad (136)$$

y hacían el *uplifting* mediante $V = V_F + \delta V$ con

$$\delta V = \frac{E}{t^\alpha} \quad (137)$$

siendo $\alpha = 2$ para KKLT y $\alpha = 3$ para BKQ.

El hecho de tener dos exponenciales les permitía, ajustando los parámetros A , a , B , b , E y W_0 , generar puntos de silla entre mínimos degenerados. Además, el hecho de que los parámetros fuesen continuos, les permitía evitar el problema η ya que podían deformar de forma continua el punto de silla a mínimo, pasando por curvatura nula ($\eta = 0$)

En el caso ACCD, al incorporar materia como origen de W_{np} , los parámetros son discretos y vienen fijados por la elección de q , \tilde{q} , N_c , N_f y k_{N_c} . Aún incluyendo dos condensados, no podremos ajustar de forma continua los parámetros del modelo para tener inflación viable y evitar el problema η . Además, como ocurre en ACCD, vemos que a medida que varía φ_{np} en el intervalo $[0, \pi]$ perdemos la estructura de mínimo y *saddle* en el plano $(t, |m|)$. En otras palabras, tenemos un *runaway* en estas direcciones.

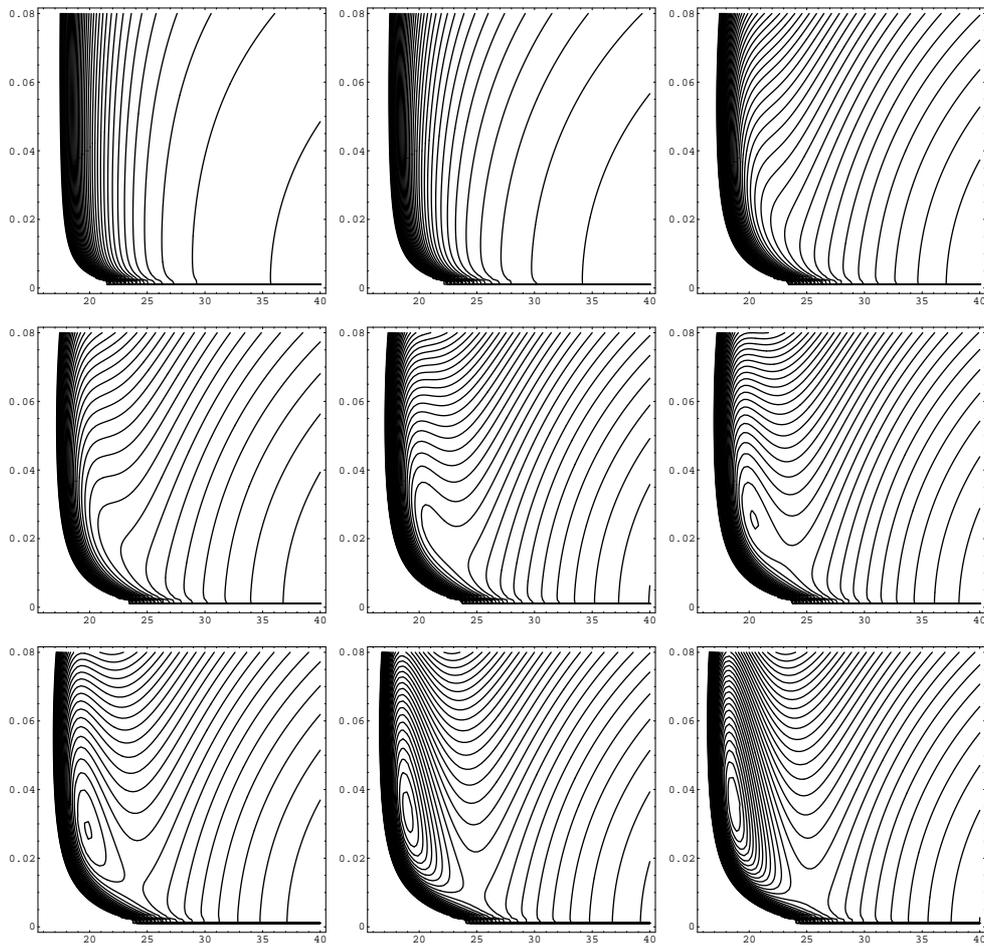


Figura 4: Secciones en el plano $(t, |m|)$ del potencial $V(t, |m|, \varphi_{np})$ para $\varphi_{np} \in [0, \pi]$

11. Nuestro modelo: *ACCD extendido*. Inflación en el sector χ

Ahora vamos a analizar numéricamente el modelo que hemos presentado en las secciones 4,5,6,7 y 8 par la elección de los parámetros (125). Es una extensión del modelo ACCD cuyo vacío tiene constante cosmológica nula y cuya dinámica de campos se acomoda a un período de inflación además de generar una cantidad de inflación y unos valores para el número de *e-folds* y el espectro de potencias acorde con las medidas más recientes llevadas a cabo por WMAP3. Consiste en extender el modelo ACCD con un sector singlete que aparecerá de forma canónica en el Kähler eq.(58) y con una autointeracción en el superpotencial eq.(53). Nos quedaremos hasta orden 6 despreciando los siguientes órdenes asumiendo $\frac{\langle \chi \rangle}{M_{pl}} < 1$

Introducir este singlete χ viene motivado por el hecho de que, simplemente su presencia en el Kähler, genera una dirección de caída. Debido a la simetría \mathbb{Z}_2 , cualquier extremo en el sector *modulus*-condensado se mantendrá en el modelo extendido para $\chi = 0$. La estabilidad de estos extremos dependerá del parámetro λ_2 . En particular, para un λ_2 suficientemente pequeño, estos extremos serán puntos de silla de la teoría extendida. Fijando $\lambda_2 = 0$ podemos ver, utilizando eq.(19),

$$\Delta V = [V_F + e^K |W|^2]_{\chi=0} |\chi|^2 + \mathcal{O}(|\chi|^4) . \quad (138)$$

El valor de V_F para $\chi = 0$ es el mismo que en el vacío original *dS* o *Minkowski*, de ahí, como explicamos en la sección (9), $V_F < 0$. Como ocurre en este tipo de escenarios V_F domina sobre el segundo término dentro del corchete en eq.(138), dando lugar a una inestabilidad en la dirección del singlete. La pendiente en esta inestabilidad se ve reducida una vez que activamos el término de masa ($\lambda_2 \neq 0$) in eq.(53).

11.1. Potencial escalar y ajuste fino

Además de fijar los parámetros de ACCD original, eq.(125), para tener completamente definido el potencial¹⁴ escalar V de la teoría extendida, hemos de fijar los cuatro parámetros siguientes

$$\{|W_0|, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_6\} \quad (139)$$

Lo haremos siguiendo el siguiente criterio:

¹⁴De nuevo elegimos $W_0 = |W_0|$ o, equivalentemente, alinearemos W_{np} y $-W_0$

- $(|W_0|, \lambda_2) \implies$ Determinan el potencial V en la vecindad de $|\chi| = 0$. Los fijaremos imponiendo que exista un saddle point en $|\chi| = 0$ para una altura inicial del potencial V_{sad} . Esta altura inicial V_{sad} es también libre de ser fijada como queramos. Nos interesa que en este punto inicial el valor del parámetro η esté bajo control y se ajuste al experimental que hemos de medir 60 *e-folds* antes del final de inflación (pues el valor no cambia mucho hasta el final de la caída al mínimo). Además, V_{sad} ha de ser tal que se reproduzca la escala de $P(k) \sim 10^{-10}$ observado. Podemos conseguir esto con la siguiente elección para los parámetros¹⁵

$$V_{sad} = 10^{-16} \quad , \quad |W_0| = 0,420 \quad , \quad \lambda_2 = -0,215 \quad (140)$$

- $(\lambda_4, \lambda_6) \implies$ Van tomando importancia en el potencial V a medida que nos alejamos del punto crítico $|\chi| = 0$ ya que acompañan a potencias de orden mayor en $|\chi|$. No importan a la hora de fijar el punto de silla donde empieza el movimiento, pero juegan un papel crucial a la hora de fijar la existencia, posición, altura y curvatura del mínimo en el que acabará.

La condición de constante cosmológica nula $V_{min} = 0$ así como un valor correcto del $P(k)$ 60 *e-folds* antes del final de inflación, nos fija el valor de estos parámetros a

$$\lambda_4 = 0,055 \quad , \quad \lambda_6 = -0,009 \quad (141)$$

Para estos valores de los parámetros, el potencial V del modelo presenta un punto de silla (con un único autovalor negativo en la dirección de $|\chi|$) y un mínimo conectados de forma monótona¹⁶:

- Saddle

$$t = 18,641 \quad , \quad |m| = 35,510 \times 10^{-3} \quad , \quad |\chi| = 0 \quad , \quad \varphi_{np} = \pi \quad , \quad \Omega = 0 \quad (142)$$

- Mínimo

¹⁵El potencial resultante es de orden $\mathcal{O}(10^{-16})$, lo que involucra masas de orden $\mathcal{O}(10^{-4})$. Esto son dos órdenes de magnitud por debajo del umbral para producir ondas gravitacionales observables en futuros experimentos, [25].

¹⁶La idea es abrir una nueva dirección al introducir χ pero mantener el sistema siempre sobre el mínimo del modelo ACCD

$$t = 18,655 , |m| = 35,491 \times 10^{-3} , |\chi| = 0,091 , \varphi_{np} = \pi , \Omega = 0 \quad (143)$$

Al igual que ocurría para el modelo ACCD original, se mantendrá eq.(126). Además, Ω también podemos *integrarla out* por los mismos argumentos¹⁷. Como V tiene simetría \mathbb{Z}_2 en la dirección de χ y Ω aparece en el argumento de funciones coseno, minimizarán el potencial para

$$\varphi_{np} = (2n + 1)\pi \quad (144)$$

$$\Omega = n\pi \quad (145)$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Entonces, las variables que juegan papel en este modelo son t , $|m|$ y $|\chi|$.

Veamos el potencial que siente el inflatón. Una vez fijadas las fases, el potencial se puede escribir como

$$V(t, |m|, |\chi|) = V_F(t, |m|, |\chi|) + V_D(t, |m|) \quad (146)$$

donde $V_F(t, |m|, |\chi|)$, resultado de sustituir eq.(144) y eq.(145) en eq.(97), es

$$V_F = \frac{1}{8t^3} e^{|m|^2 + |\chi|^2} \left\{ 3 \left(L - \frac{8\pi k_{N_c} t^2}{3} \left(\frac{2}{|m|^2} \right)^{\frac{N_f}{N_c - N_f}} e^{\frac{-4\pi k_{N_c} t}{N_c - N_f}} \right)^2 + \right. \quad (147)$$

$$\left. + N_f |m|^2 \left(L + \left(\frac{2}{|m|^2} \right)^{\frac{N_c}{N_c - N_f}} e^{\frac{-4\pi k_{N_c} t}{N_c - N_f}} \right)^2 + |\chi|^2 (L + 2\lambda_2 + 4\lambda_4 |\chi|^2 + 6\lambda_6 |\chi|^4)^2 - 3L^2 \right\}$$

siendo

$$L \equiv W_0 - (N_c - N_f) \left(\frac{2}{|m|^2} \right)^{\frac{N_f}{N_c - N_f}} e^{\frac{-4\pi k_{N_c} t}{N_c - N_f}} + \lambda_2 |\chi|^2 + \lambda_4 |\chi|^4 + \lambda_6 |\chi|^6 \quad (148)$$

y $V_D(t, |m|)$ sigue siendo (ver eq.(112))

¹⁷De nuevo, nada cambia al incluir V_D ya que ni φ_{np} ni Ω aparecen en el potencial de Kähler.

$$V_D(t, |m|) = \frac{3\pi N_f^2}{8 k_{N_c} N_c t} \frac{(q + \tilde{q})^3}{q^3 + \tilde{q}^3} \left[|m|^2 + \frac{3}{4\pi k_{N_c} t} \right] \quad (149)$$

Aún así, todavía necesitamos un paso más para poder representar el potencial bajo el cual evoluciona el inflatón (singleta $|\chi|$). Si la masa efectiva del inflatón durante el movimiento es mucho menor que las masas efectivas de t y $|m|$, podremos *integrar out* éstos últimos también. Éste ha de ser el caso si queremos que $|\chi|$ sea el inflatón y que $\eta \ll 1$.

La condición de *integrar out* t y $|m|$ no es más que definir $t = t(|\chi|)$ y $|m| = |m|(|\chi|)$ de tal manera que se cumpla

$$\frac{\partial V(t, |m|, |\chi|)}{\partial t} = 0 \quad (150)$$

$$\frac{\partial V(t, |m|, |\chi|)}{\partial |m|} = 0 \quad (151)$$

con lo que tenemos $V_{eff}(|\chi|) = V(t(|\chi|), |m|(|\chi|), |\chi|)$

El potencial escalar $V_{eff}(|\chi|)$ que obtenemos tras *integrar out* t y $|m|$ tiene un perfil adecuado para producir inflación (Figura 5). Es casi plano en una región ancha cerca del origen $|\chi| = 0$, cumpliéndose las condiciones de *slow-roll*.

11.2. Ecuaciones de movimiento

Partiendo del Lagrangiano bosónico para campos escalares reales

$$\mathcal{L}_{esc} = \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} K_{ij} g_{\mu\nu} (\partial^\mu \varphi^i) (\partial^\nu \varphi^j) - V(\varphi) \right] \quad (152)$$

y asumiendo eq.(130) y homogeneidad ($\varphi = \varphi(t)$), obtenemos

$$\ddot{\varphi}^i + 3H \dot{\varphi}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{\varphi}^j \dot{\varphi}^k + K^{ij} \frac{\partial V}{\partial \varphi^j} = 0. \quad (153)$$

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} K_{ij} \dot{\varphi}^i \dot{\varphi}^j + V \right] \quad (154)$$

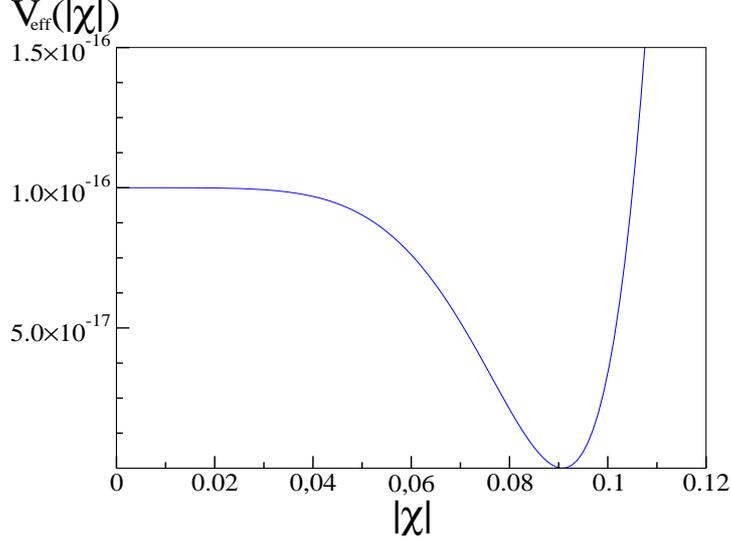


Figura 5: Potencial escalar $V_{eff}(|\chi|)$ como función de $|\chi|$

donde los puntos significan derivadas con respecto a la coordenada temporal. Como es habitual, Γ_{jk}^i son los símbolos de Christoffel derivados de la métrica de Kähler.

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} K^{im} \left[\frac{\partial K_{mk}}{\partial \varphi^j} + \frac{\partial K_{jm}}{\partial \varphi^k} - \frac{\partial K_{jk}}{\partial \varphi^m} \right] \quad (155)$$

Para resolver la evolución de la materia, haremos un cambio de variable de la coordenada temporal t al número de *e-folds*.

$$a(t) = e^{N_e(t)} \quad ; \quad H = \frac{dN_e(t)}{dt} \quad (156)$$

De esta manera, el factor de escala desaparece de las ecuaciones de movimiento para los campos,

$$\varphi''^i + \left[1 - \frac{1}{6} K_{jk} \varphi'^j \varphi'^k \right] \left[3\varphi'^i + 3K^{ij} \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi^j} \right) \right] + \Gamma_{jk}^i \varphi'^j \varphi'^k = 0 \quad (157)$$

donde las primas significan derivadas con respecto a N_e , el número de *e-folds*.

Un deducción completa de las ecuaciones de movimiento tanto para los campos de materia, como para el factor de escala se puede ver en el apéndice (D)

Utilizando directamente eq.(76), el lagrangiano (152) para los tres campos relevantes $\{t, |m|, |\chi|\}$ resulta

$$\mathcal{L}_{esc} = \sqrt{g} \left[\frac{3}{4t^2} \partial_\mu t \partial^\mu t + \partial_\mu |m| \partial^\mu |m| + \partial_\mu |\chi| \partial^\mu |\chi| - V \right] \quad (158)$$

donde¹⁸ $V = V_F + V_D$ viene dado por las ecuaciones (97) y (112) respectivamente.

La ecuación de movimiento, eq.(157), aplicada a estos campos reza

$$|\chi|'' + \left[1 - \frac{1}{3} |\chi|'^2 - \frac{1}{4t^2} t'^2 - \frac{1}{3} |m|'^2 \right] \left[3 |\chi|' + \frac{3}{2V} \left(\frac{\partial V}{\partial |\chi|} \right) \right] = 0 \quad (159)$$

$$t'' + \left[1 - \frac{1}{3} |\chi|'^2 - \frac{1}{4t^2} t'^2 - \frac{1}{3} |m|'^2 \right] \left[3t' + \frac{2t^2}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) \right] - \frac{t'^2}{t} = 0 \quad (160)$$

$$|m|'' + \left[1 - \frac{1}{3} |\chi|'^2 - \frac{1}{4t^2} t'^2 - \frac{1}{3} |m|'^2 \right] \left[3 |m|' + \frac{3}{2V} \left(\frac{\partial V}{\partial |m|} \right) \right] = 0 \quad (161)$$

Al tratarse de ecuaciones diferenciales de segundo orden, necesitamos dos condiciones iniciales para cada campo.

- Los campos parten en reposo:

$$\partial_{N_e} |\chi| |_{N_e=0} = 0 \quad ; \quad \partial_{N_e} t |_{N_e=0} = 0 \quad ; \quad \partial_{N_e} |m| |_{N_e=0} = 0 \quad (162)$$

- El desplazamiento inicial del singlete $|\chi|$ respecto a $|\chi| = 0$, esto es $\delta|\chi|$

$$|\chi| |_{N_e=0} = \delta|\chi| \quad (163)$$

El valor inicial para los campos t y $|m|$ es tal que se cumplan eq.(150) y eq.(151) para $\delta|\chi|$.

En el caso que representamos en las gráficas hemos escogido $\delta|\chi| = 10^{-4}$, pero, como veremos al final, las magnitudes físicas no dependen de este desplazamiento inicial.

¹⁸En V_F tomaremos $\varphi_{np} = \pi$ y $\Omega = 0$

- Singlete $|\chi|$

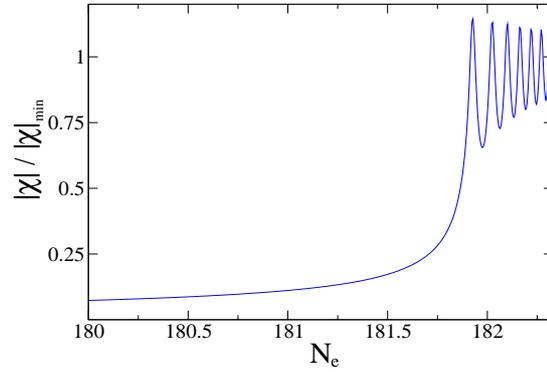


Figura 6: Evolución de $|\chi|$ como función de N_e

- Moduli t y condensado $|m|$

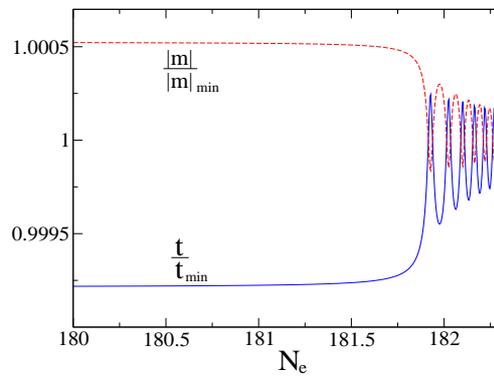


Figura 7: Evolución de t y $|m|$ como función de N_e

Al observar los autovalores del Hessiano covariante, apéndice (C.2), durante el movimiento, vemos que hay una jerarquía entre los dos autovalores (siempre positivos y casi constantes) asociados a las direcciones t y $|m|$ (en realidad a una combinación lineal de ellas) y el autovalor asociado a la dirección de $|\chi|$. Este último autovalor cambia de signo al movernos de un *saddle* donde es negativo (dirección de caída) a un mínimo, donde es positivo. Los autovalores del Hessiano covariantizado evaluado en el mínimo (punto en el que la jerarquía de masas es menor) asociados a las dos direcciones en el plano

$t - |m|$ (curvaturas siempre positivas) son **9 órdenes de magnitud** mayores que el asociado a la dirección de $|\chi|$. Podemos pensarlo como una teja muy curvada en la dirección transversa a la de caída. Esto justifica la aproximación que hicimos para obtener $V(|\chi|)$ en la que t y $|m|$ **están integrados out**. Es decir, minimizarán el potencial V para cada valor que vaya tomando $|\chi|$. Esto también significa que podemos centrarnos en el espectro de potencias escalar ya que las fluctuaciones por isocurvatura son despreciables dada la jerarquía de escalas entre el inflatón y los demás campos del sistema.

11.3. Slow-roll (ϵ, η), índice espectral (n_s) y WMAP3

EL régimen inflacionario (slow-roll) sólo tendrá lugar mientras $\epsilon < 1$ y $\eta < 1$. Esto en general no ocurrirá durante toda la caída al mínimo, por lo que tendremos que ver su variación a lo largo del movimiento.

Resolviendo $\epsilon(N_e)$ y $\eta(N_e)$

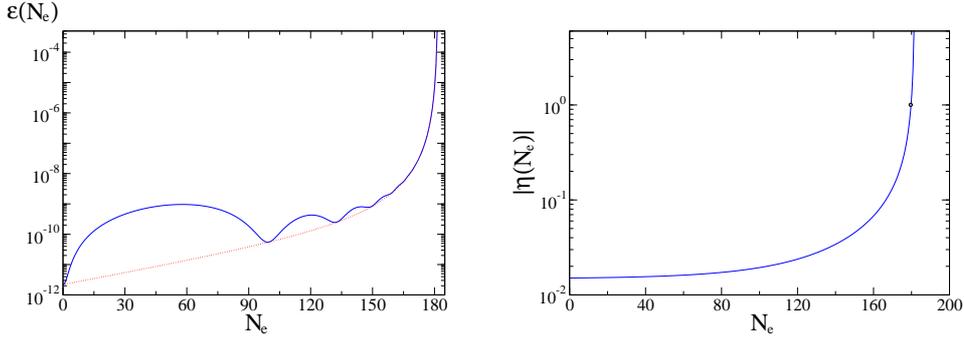


Figura 8: Evolución de ϵ y η como función de N_e

vemos que el parámetro η sale del régimen inflacionario para

$$N_e = 180 \text{ e-folds} \quad (164)$$

y es éste el que nos determina tanto la duración total como el fin de inflación.

$$N_e^{tot} = N_\eta = 180 \text{ e-folds} \quad (165)$$

Entonces, salvo los dos últimos *e-folds* del movimiento de caída, el resto inflan.

También podemos ver el perfil de $P(k)$ que resulta en este modelo

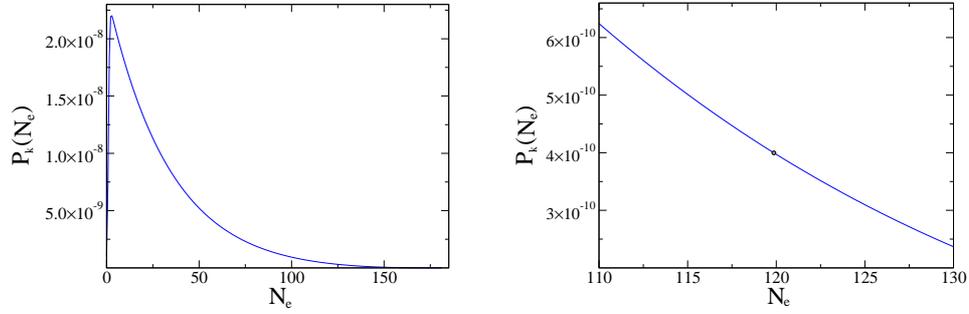


Figura 9: P_k en función de N_e

Vemos que

$$P(k)|_{N_e=120} \sim 4 \times 10^{-10} \quad (166)$$

que está de acuerdo con la medida experimental de WMAP3.

Representemos el índice espectral n_s que genera este $P(k)$ en todo el rango y en la ventana observacional de WMAP3

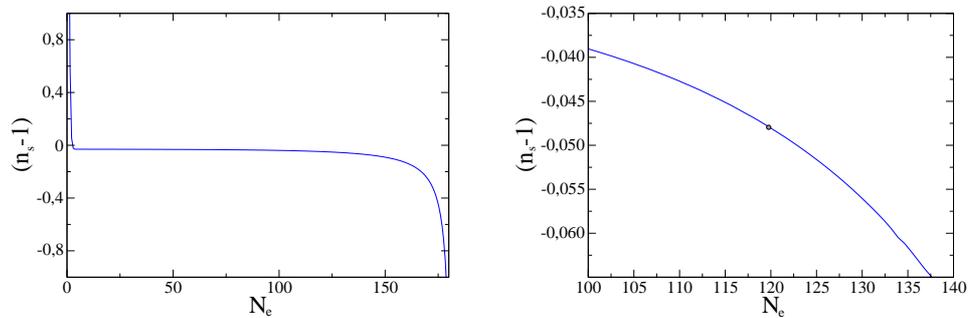


Figura 10: n_s en función de N_e

Vemos que

$$n_s|_{N_e=120} \sim 0,95, \quad (167)$$

valor que está dentro del rango permitido por la medida experimental de WMAP3.

11.4. Escalas y masa del gravitino.

Veamos el caso concreto que hemos analizado

$$N_c = 20 \quad , \quad N_f = 1 \quad , \quad k_{N_c} = \frac{1}{2} \quad , \quad q = 1 \quad , \quad \tilde{q} = \frac{1}{10} \quad (168)$$

Una idea de la ruptura de SUSY nos la da la masa del gravitino

$$m_{3/2}^2 = e^G|_{min} = e^K|W|^2|_{min} \simeq 2,5 \times 10^{-6} \quad (169)$$

que vemos que es muy elevada.

Calculemos las distintas masas que se generan en este modelo. Esto es, curvaturas del potencial en el estado de vacío (mínimo) de la teoría. Esto es en la base normalizada, pero que no es autoestado de la masa.

$$(M_{min}^2)^i_j = \begin{pmatrix} 2,36 \times 10^{-4} & 0 & 7,76 \times 10^{-3} & 0 & -7,30 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 2,96 \times 10^{-4} & 0 & 9,42 \times 10^{-5} & 0 & -8,78 \times 10^{-6} \\ 1,67 \times 10^{-5} & 0 & 2,11 \times 10^{-3} & 0 & -4,54 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 1,61 \times 10^{-4} & 0 & 5,13 \times 10^{-5} & 0 & -4,78 \times 10^{-6} \\ -1,57 \times 10^{-7} & 0 & -4,53 \times 10^{-6} & 0 & 4,89 \times 10^{-8} & 0 \\ 0 & -2,30 \times 10^{-6} & 0 & -7,31 \times 10^{-7} & 0 & 1,26 \times 10^{-7} \end{pmatrix} \quad (170)$$

Podemos diagonalizar para ver los autovalores de la masa así como los autoestados,

$$(M_{min,diag}^2)^i_j = \begin{pmatrix} 2,18 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,47 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,69 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5,78 \times 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,79 \times 10^{-13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (171)$$

resultando los autoestados de la masa:

- $\lambda_1^{min} = 2,18 \times 10^{-3}$

$$v_1^{min} = -0,97t - 0,24|m| + 5,76 \times 10^{-4}|\chi| \quad (172)$$

- $\lambda_2^{min} = 3,47 \times 10^{-4}$

$$v_2^{min} = 0,88\tau + 0,48\vartheta - 6,81 \times 10^{-3}\Omega \quad (173)$$

- $\lambda_3^{min} = 1,69 \times 10^{-4}$

$$v_3^{min} = -0,99t + 8,61 \times 10^{-3}|m| + 6,99 \times 10^{-4}|\chi| \quad (174)$$

- $\lambda_4^{min} = 5,78 \times 10^{-8}$

$$v_4^{min} = 2,53 \times 10^{-2}\tau + 1,38 \times 10^{-2}\vartheta + 0,99\Omega \quad (175)$$

- $\lambda_5^{min} = 2,79 \times 10^{-13}$

$$v_5^{min} = -0,31t + 3,90 \times 10^{-4}|m| - 0,95|\chi| \quad (176)$$

- $\lambda_6^{min} = 0$

$$v_6^{min} = 0,30\tau - 0,95\vartheta \quad (177)$$

Vemos que el último de los autovectores corresponde a la dirección plana del sistema que mencionamos al principio

$$v_6 = \Theta \quad (178)$$

$$\frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 0,30 \quad ; \quad \frac{-c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = -0,95 \quad (179)$$

Podemos ver las masas y los autovectores en el saddle point ($|\chi| = 0$) y veremos que la jerarquía de autovalores se mantiene desde el principio del movimiento

$$(M_{sad}^2)^i_j = \begin{pmatrix} 2,36 \times 10^{-4} & 0 & 7,77 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,96 \times 10^{-4} & 0 & 9,43 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 1,68 \times 10^{-5} & 0 & 2,11 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,61 \times 10^{-4} & 0 & 5,14 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,48 \times 10^{-18} & 0 \\ 0 & -2,30 \times 10^{-6} & 0 & -7,33 \times 10^{-7} & 0 & 6,07 \times 10^{-8} \end{pmatrix} \quad (180)$$

y diagonalizar para ver los autovalores de la masa así como los autoestados,

$$(M_{sad,diag}^2)^i_j = \begin{pmatrix} 2,18 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,48 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,69 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,07 \times 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,48 \times 10^{-18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (181)$$

resultando los autoestados de la masa:

- $\lambda_1^{sad} = 2,18 \times 10^{-3}$

$$v_1^{sad} = 0,97t + 0,24|m| \quad (182)$$

- $\lambda_2^{sad} = 3,48 \times 10^{-4}$

$$v_2^{sad} = 0,88\tau + 0,48\vartheta - 6,82 \times 10^{-3}\Omega \quad (183)$$

- $\lambda_3^{sad} = 1,69 \times 10^{-4}$

$$v_3^{sad} = -0,99t + 8,61 \times 10^{-3}|m| \quad (184)$$

- $\lambda_4^{sad} = 6,07 \times 10^{-8}$

$$v_4^{sad} = \Omega \quad (185)$$

- $\lambda_5^{sad} = -1,48 \times 10^{-18}$

$$v_5^{sad} = |\chi| \quad (186)$$

- $\lambda_6^{sad} = 0$

$$v_6^{sad} = 0,30\tau - 0,95\vartheta \quad (187)$$

12. Simetría \mathbb{Z}_2 e inflación topológica

Por último, vamos a interpretar el modelo que hemos presentado como un modelo de inflación topológica. Esto es, un modelo de inflación que carece del problema de las condiciones iniciales.

Como ya se comentó, nuestro lagrangiano posee una simetría \mathbb{Z}_2 bajo la transformación

$$\chi \rightarrow -\chi \quad (188)$$

que se refleja en el potencial V_{eff} de la teoría.

Descomponiendo el inflatón en coordenadas polares¹⁹, $\chi = |\chi|e^{i\Omega}$, y en coordenadas cartesianas, $\chi = \chi_R + i\chi_I$, podemos ver esta simetría como

$$\Omega = 0 \rightarrow \Omega = \pi \quad (189)$$

$$\chi_R \rightarrow -\chi_R \quad (190)$$

Tendremos dos mínimos degenerados en energía hacia los que el inflatón puede rodar.

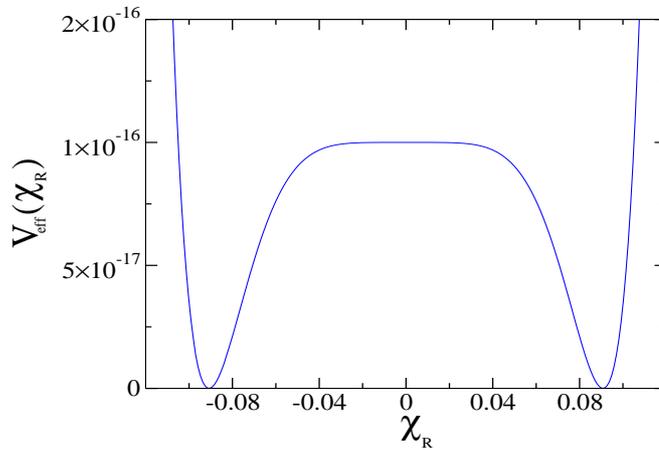


Figura 11: Simetría \mathbb{Z}_2 en los mínimos del potencial V_{eff}

Debido a la simetría discreta del sistema, existirán soluciones no triviales a la ecuación de movimiento que interpolen entre ambos vacíos. Esto es,

¹⁹Utilizando coordenadas polares, la simetría \mathbb{Z}_2 en el sector χ se encuentra codificada en la condición de minimización eq.(145)

existirán zonas del Universo en las que el campo no se encuentra en ninguno de los mínimos, sino que interpola entre ellos.

Para el caso de un espacio-tiempo *Minkowski* (despreciamos la gravedad), existen soluciones estáticas a la ecuación (con métrica de Kähler constante)

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}(\partial_z|\chi|)^2 - K^{|\chi||\chi|}V(|\chi|)\right)}{dz} = 0 \quad (191)$$

Esta solución representa un *domain-wall* estático a lo largo de la dirección espacial z . Para el potencial V_{eff} de nuestro modelo, podemos representar el perfil del *domain-wall* cuya anchura (la cual se puede deducir a partir del

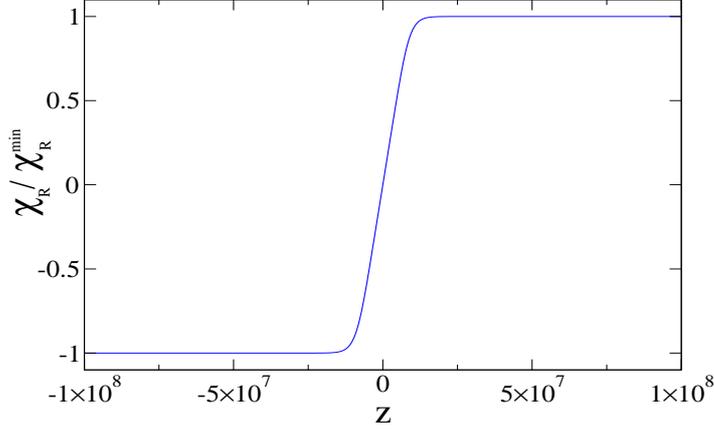


Figura 12: *Domain-wall* en la dirección espacial z

balance entre energías cinética y potencial) es

$$\delta_0 = \frac{2|\chi|_{min}}{\sqrt{V(|\chi|=0)}} \simeq 10^7 \quad (192)$$

Siguiendo el razonamiento²⁰ de [37], podemos entender este *domain-wall* como una configuración espacial de valores iniciales para el inflatón. Cada punto del defecto topológico rodará desde su valor hasta el mínimo del potencial despreciando²¹ el gradiente espacial de energías en la e.o.m ($\propto \frac{1}{a^2}$).

²⁰En nuestro caso, $H_0^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{V_{eff}(|\chi|=0)}} = 3 \times 10^8 > \delta_0$, luego el horizonte es un orden de magnitud mayor que la anchura inicial del defecto, $\delta_0 \simeq 0,1 H_0^{-1}$

²¹Como se expone en [37], el núcleo del defecto ha de ser no contractible en el momento inicial ($\dot{a} \geq 0$ y $\ddot{a} > 0$)

Pero no todos los puntos del defecto inflarán, sino sólo los que estén en régimen inflacionario [36], es decir, estén lo suficientemente cerca del punto de silla $|\chi| = 0$ como para que se cumplan las condiciones de *slow-roll*.

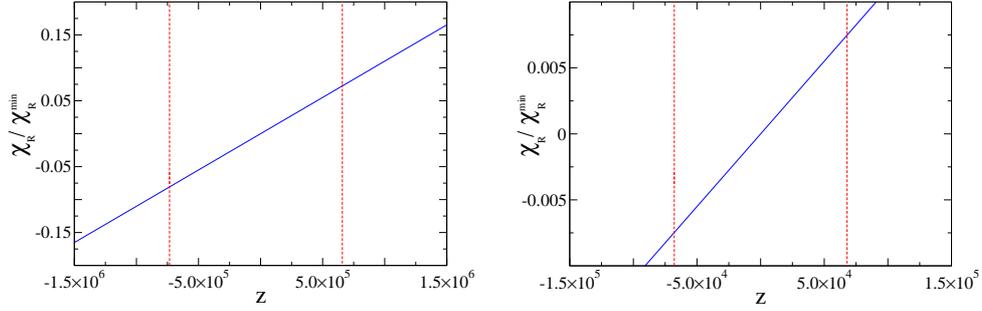


Figura 13: A la izquierda, se muestra la región en la que se cumple *slow-roll* dentro del *domain-wall*. En la figura de la derecha, nos centramos en la región compatible con WMAP3

El origen es un punto crítico, luego en $z = 0$ inflación es eterna. A medida que nos alejamos del centro del defecto, el potencial se va curvando e inflación va durando cada vez menos hasta que llegamos a la zona del defecto que produce los 60 *e-folds* mínimos de la ventana observacional de WMAP3. Por último, si nos alejamos más, llegamos a la zona del defecto que no está en régimen inflacionario.

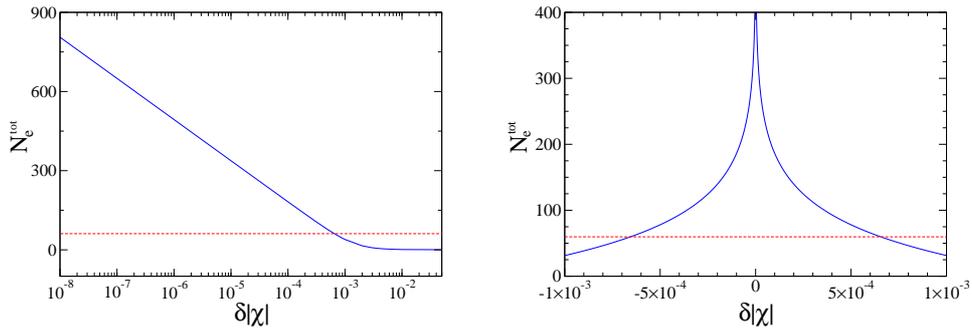


Figura 14: Duración del régimen inflacionario, N_e^{tot} , como función del valor inicial de $\delta|\chi|$ ($= \delta\chi_R$). La línea horizontal representa la cota experimental a nuestra posición dada por WMAP3

13. Conclusiones

En este trabajo hemos construido un modelo de inflación con régimen de *slow-roll* basado en el escenario propuesto en [18]. Hemos considerado la teoría SUGRA N=1 d=4 con grupo gauge $SU(N_c) \times U_X(1)$ cuya constante de acoplo f_X^G es proporcional al *modulus* de Kähler T . La dinámica del sistema viene determinada por el condensado de *gauginos* del $SU(N_c)$ y un parámetro de flujos W_0 . Además el *uplifting* del potencial necesario para tener vacíos dS se consigue gracias a un D-término del tipo de Fayet-Iliopoulos, lo cual impone la presencia de materia quiral transformándose bajo el $U_X(1)$. Parte del interés de este escenario reside en que el valor de la mayoría de los parámetros viene restringido por supersimetría e invariancia gauge, mejorando la capacidad de predicción.

El potencial escalar que resulta posee mínimos tipo dS o *Minkowski* para valores razonables del *modulus* T y del condensado de materia m , los cuales son candidatos naturales para el inicio de inflación. Sin embargo, tras un cuidadoso análisis, hemos concluido que el sistema, en su versión más sencilla (como fue formulado en [18]) no puede albergar un régimen inflacionario. Esto se debe sobre todo a la persistencia de problema η en las teorías de supergravedad. También hemos presentado este problema de forma genérica así como una forma de evitarlo a la hora de construir modelos.

A continuación hemos estudiado la extensión más natural y económica del escenario orientada a conseguir un régimen inflacionario manteniendo las propiedades que garantizaban la estabilización. Consiste en incluir en el modelo un singlete χ neutro bajo el $U_X(1)$ con una autointeracción en el superpotencial del tipo $W(\chi) = \sum_n \lambda_n \chi^n$. Esto es una modelización sencilla y general a modo de expansión en serie de potencias en torno a $\chi = 0$. Esta expansión es válida para $\frac{\chi}{M_P} < 1$. El potencial que resulta es bastante viable fenomenológicamente. Incorpora un régimen de inflación topológica y eterna evitando el problema de las condiciones iniciales y, además, permite fijar los parámetros de la autointeracción del singlete χ de tal manera que se satisfagan todas las cotas observacionales de WMAP. El papel de inflatón lo desarrolla este singlete, pero la dinámica responsable de la estabilización de los *moduli* (condensados de *gauginos*, flujos y D-*uplifting*) es determinante a la hora de conseguir vacíos de energía positiva.

Este tipo de escenario surgen pues de forma natural y de ahí resultan atractivos e interesantes. Sin embargo, como hemos comentado, fijar los parámetros de manera que tengamos *slow-roll* evitando el problema η su-

pone un ejemplo de ajuste fino en la construcción de modelos. Para el caso de inflación modular, es un problema genérico ya que los *moduli*, en principio, son direcciones planas del potencial. Podemos pensar que el ajuste fino en modelos de inflación basados en supergravedades (a partir de teoría de cuerdas) es una consecuencia del desconocimiento que aún tenemos de la materia. A pesar de esto, el hecho de que cada vez vayan apareciendo más mecanismos y modelos es un resultado alentador y un signo de progreso en la materia.

Por último, uno puede adoptar un punto de vista basado en la filosofía del "*landscape*" y el *principio antrópico*, en el que el ajuste fino que aparentemente necesita nuestro universo "*local*", sería una consecuencia de la necesidad de inflación para crear universos grandes y estables con materia, en los que ésta pueda evolucionar hacia la *vida*.

A. Métricas de Kähler y holonomía

En este apéndice se exponen resultados generales sobre extensión compleja de métricas reales y simétricas g así como los distintos pasos para construir variedades de Kähler. También se exponen algunos conceptos básicos sobre holonomía de variedades.

A.1. Métricas reales

Sea una variedad real X de dimensión n y sea su métrica $(g)_{ij}$ (real) un tensor $(0, 2)$, que aplica de forma lineal sobre la base $\{\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}\}$ de tensores $(2, 0)$ o sobre el doble producto $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\} \otimes \{\frac{\partial}{\partial x^j}\}$ de bases $(1, 0)$ (que actúan sobre el espacio de funciones reales)

$$g = (g)_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad (\text{A.1})$$

$$g[T_{(2,0)}] = (g)_{ij} T^{ij} \quad (\text{A.2})$$

$$g[P_{(1,0)}, Q_{(1,0)}] = (g)_{ij} P^i Q^j \quad (\text{A.3})$$

A la aplicación g sobre el producto de bases $(1, 0) \otimes (1, 0)$ siempre le exigiremos **conmutatividad**, esto es

$$g[P, Q] = g[Q, P] \quad (\text{A.4})$$

Esto se traduce en

$$g[P, Q] = (g)_{ij} P^i Q^j \quad (\text{A.5})$$

$$g[Q, P] = (g)_{ij} Q^i P^j = (g^t)_{ji} P^j Q^i \quad (\text{A.6})$$

Al ser, tanto i como j índices mudos (sumados), podemos extraer que

$$g = g^t \quad (\text{A.7})$$

Luego, conmutatividad de la aplicación $g[P, Q] = g[Q, P]$ implica simetricidad en la matriz de la aplicación $(g)_{ij} = (g^t)_{ij} = (g)_{ji}$

A.2. Transporte paralelo y grupo de holonomía de una variedad real

Uno de los conceptos principales en geometría es el de transporte paralelo de un vector en una variedad real X de dimensión n .

Si transportamos un vector V^i del espacio tangente $T_p X$ bajo un transporte paralelo infinitesimal a lo largo de la dirección x^k , se cumple que

$$(D_k V^i) dx^k = (\partial_k V^i) dx^k + \Gamma_{lk}^i V^l dx^k = 0 \quad (\text{A.8})$$

por lo que V^i varía debido a su dependencia en las coordenadas como

$$\delta V^i = -\Gamma_{lk}^i V^l dx^k \quad (\text{A.9})$$

Cuando V^i es trasladado paralelamente a lo largo de un ciclo cerrado infinitesimal en el plano (l, k) que encierra un área $\delta a^{lk} = -\delta a^{kl}$, su variación es

$$\delta V^i = -\frac{1}{2}(\delta a^{lk}) (R_{lk})^i{}_\rho V^\rho = (H)^i{}_\rho V^\rho \quad (\text{A.10})$$

donde

$$H = -\frac{1}{2}(\delta a^{lk}) (R_{lk}) \in \mathcal{H} \quad (\text{A.11})$$

siendo \mathcal{H} el grupo de holonomía de la variedad que da la variación del vector V^i .

Esto es, podemos escribir el tensor de Riemann (visto como una 2-forma), como una combinación lineal de los generadores del grupo de holonomía \mathcal{H} de la variedad X .

Bajo transporte paralelo, $|V|^2 \equiv g_{ij} V^i V^j$ no varía, ya que se cumple el postulado métrico $D_l g_{ij} = 0$.

En una variedad Riemanniana (real) X , $\mathcal{H} \subset O(n)^{22}$ y si la variedad tiene una orientación, $\mathcal{H} \subset SO(n)$

A.3. Extensión compleja de métricas reales. Métricas complejas

Si tenemos una variedad real X de dimensión par n dotada de una métrica (también real), podemos hacer un mapping entre esa variedad real X y una variedad compleja X^C de dimensión compleja $\frac{n}{2}$, resultado de la *extensión compleja*

$$g^C : T_p X^C \times T_p X^C \rightarrow \mathbb{C} \quad (\text{A.12})$$

²²Los generadores de $O(n)$, al igual que los de $SO(n)$, son $\frac{n(n-1)}{2}$ matrices **antisimétricas** e **imaginarias puras**, por lo que la identidad no es un elemento del álgebra aunque sí un elemento del grupo $M = e^{i\alpha_A T^A}$

y manteniendo

$$g : T_p X^C \times T_p X^C \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.13})$$

La extensión compleja de la métrica implica linealidad en g permitiendo coeficientes complejos. Sean dos vectores complejos $z_1, z_2 \in T_p X^C$

$$\begin{aligned} g^C[z_1, z_2] &= g[\operatorname{Re}\{z_1\} + i \operatorname{Im}\{z_1\}, \operatorname{Re}\{z_2\} + i \operatorname{Im}\{z_2\}] = \\ &= g[\operatorname{Re}\{z_1\}, \operatorname{Re}\{z_2\}] - g[\operatorname{Im}\{z_1\}, \operatorname{Im}\{z_2\}] + \\ &+ i (g[\operatorname{Im}\{z_1\}, \operatorname{Re}\{z_2\}] + g[\operatorname{Re}\{z_1\}, \operatorname{Im}\{z_2\}]) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} g^C[z_1, \bar{z}_2] &= g[\operatorname{Re}\{z_1\} + i \operatorname{Im}\{z_1\}, \operatorname{Re}\{z_2\} - i \operatorname{Im}\{z_2\}] = \\ &= g[\operatorname{Re}\{z_1\}, \operatorname{Re}\{z_2\}] + g[\operatorname{Im}\{z_1\}, \operatorname{Im}\{z_2\}] + \\ &+ i (g[\operatorname{Im}\{z_1\}, \operatorname{Re}\{z_2\}] - g[\operatorname{Re}\{z_1\}, \operatorname{Im}\{z_2\}]) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} g^C[\bar{z}_1, z_2] &= g[\operatorname{Re}\{z_1\} - i \operatorname{Im}\{z_1\}, \operatorname{Re}\{z_2\} + i \operatorname{Im}\{z_2\}] = \\ &= g[\operatorname{Re}\{z_1\}, \operatorname{Re}\{z_2\}] + g[\operatorname{Im}\{z_1\}, \operatorname{Im}\{z_2\}] - \\ &- i (g[\operatorname{Im}\{z_1\}, \operatorname{Re}\{z_2\}] - g[\operatorname{Re}\{z_1\}, \operatorname{Im}\{z_2\}]) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} g^C[\bar{z}_1, \bar{z}_2] &= g[\operatorname{Re}\{z_1\} - i \operatorname{Im}\{z_1\}, \operatorname{Re}\{z_2\} - i \operatorname{Im}\{z_2\}] = \\ &= g[\operatorname{Re}\{z_1\}, \operatorname{Re}\{z_2\}] - g[\operatorname{Im}\{z_1\}, \operatorname{Im}\{z_2\}] - \\ &- i (g[\operatorname{Im}\{z_1\}, \operatorname{Re}\{z_2\}] + g[\operatorname{Re}\{z_1\}, \operatorname{Im}\{z_2\}]) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Propiedades de (g^C)

- Como $g[P, Q] = g[Q, P]$

$$g^C[z_1, z_2] = g^C[z_2, z_1] ; g^C[\bar{z}_1, \bar{z}_2] = g^C[\bar{z}_2, \bar{z}_1] ; g^C[z_1, \bar{z}_2] = g^C[\bar{z}_2, z_1] \quad (\text{A.18})$$

- Como $g[P, Q] \in \mathbb{R}$

$$\{g^C[z_1, z_2]\}^* = g^C[\bar{z}_1, \bar{z}_2] ; \{g^C[z_1, \bar{z}_2]\}^* = g^C[\bar{z}_1, z_2] \quad (\text{A.19})$$

- Si g^C aplica sobre el mismo vector ($z_1 = z_2 \equiv z$)

$$g^C[z, \bar{z}] \in \mathbb{R} \quad ; \quad g^C[z, z] \in \mathbb{C} \quad (\text{A.20})$$

En la variedad real X de partida, la métrica $g \in \mathbb{R}$ aplica sobre dos vectores reales $[P, Q]$ en la base coordenada $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$. Al hacer la extensión compleja, hacemos un combinación lineal con coeficientes complejos de los elementos de la base coordenada

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1 \dots n} \in \mathbb{R} \implies \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{a;\bar{a}}} \pm i \frac{\partial}{\partial x^{\frac{n}{2}+a;\bar{a}}} \right\}_{a;\bar{a}=1 \dots \frac{n}{2}} \iff \left\{ \underbrace{\frac{\partial}{\partial z^a}}_{\text{holomorfa}}, \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^a}}_{\text{antiholomorfa}} \right\}_{a;\bar{a}=1 \dots \frac{n}{2}} \in \mathbb{C} \quad (\text{A.21})$$

Entonces vemos que, para $V, W \in T_p X^C$

$$g[V, W] \equiv g^C[V, W] + g^C[\bar{V}, W] + g^C[V, \bar{W}] + g^C[\bar{V}, \bar{W}] \quad (\text{A.22})$$

O lo que es lo mismo

$$g = (g)_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad (\text{A.23})$$

$$g = (g^C)_{ab} dz^a \otimes dz^b + (g^C)_{a\bar{b}} dz^a \otimes d\bar{z}^{\bar{b}} + (g^C)_{\bar{a}b} d\bar{z}^{\bar{a}} \otimes dz^b + (g^C)_{\bar{a}\bar{b}} d\bar{z}^{\bar{a}} \otimes d\bar{z}^{\bar{b}} \quad (\text{A.24})$$

Si exigimos **conmutatividad** en $g[P, Q] = g[Q, P]$

$$\{g[P, Q]\}^t = g[Q, P] \quad (\text{A.25})$$

$$\{g^C[z_1, z_2]\}^* = g^C[\bar{z}_1, \bar{z}_2]; \{g^C[z_1, \bar{z}_2]\}^* = g^C[\bar{z}_1, z_2] \quad (\text{A.26})$$

Hemos visto cómo la aplicación g^C aplica en los diferentes subespacios vectoriales de $T_p X^C \times T_p X^C$. Sean $V, W \in T_p X^C$

■ *holomorfo* \times *holomorfo*

$$g^C[V, W] = (g^C)_{ab} V^a W^b \quad (\text{A.27})$$

■ *holomorfo* \times *antiholomorfo*

$$g^C[V, \bar{W}] = (g^C)_{a\bar{b}} V^a \bar{W}^{\bar{b}} \quad (\text{A.28})$$

■ *antiholomorfo* \times *holomorfo*

$$g^C[\bar{V}, W] = (g^C)_{\bar{a}b} \bar{V}^{\bar{a}} W^b \quad (\text{A.29})$$

■ *antiholomorfo* \times *antiholomorfo*

$$g^C[\bar{V}, \bar{W}] = (g^C)_{\bar{a}\bar{b}} \bar{V}^{\bar{a}} \bar{W}^{\bar{b}} \quad (\text{A.30})$$

Utilizando las propiedades de simetricidad y conjugación que obtuvimos antes, vemos que, en notación indicial

- Como $g[P, Q] = g[Q, P]$

$$(g^C)_{ab} = (g^C)_{ba} ; (g^C)_{\bar{a}\bar{b}} = (g^C)_{\bar{b}\bar{a}} ; (g^C)_{a\bar{b}} = (g^C)_{\bar{b}a} ; (g^C)_{\bar{a}b} = (g^C)_{\bar{b}\bar{a}} \quad (\text{A.31})$$

- Como $g[P, Q] \in \mathbb{R}$

$$\{(g^C)_{ab}\}^* = (g^C)_{\bar{a}\bar{b}} ; \{(g^C)_{\bar{a}\bar{b}}\}^* = (g^C)_{ab} ; \{(g^C)_{a\bar{b}}\}^* = (g^C)_{\bar{a}b} ; \{(g^C)_{\bar{a}b}\}^* = (g^C)_{a\bar{b}} \quad (\text{A.32})$$

A.4. Métricas complejas hermíticas

Una métrica (g^C) se denomina hermítica si cumple que sus únicas componentes no nulas son las que mezclan las partes holomorfa y antiholomorfa

$$(g^c)_{ab} = (g^c)_{\bar{a}\bar{b}} = 0 \quad (\text{A.33})$$

eso es

$$g[VW] = g^C[V\bar{W}] + g^C[\bar{V}W] = g^C[V, \bar{W}] + \{g^C[V, \bar{W}]\}^* = 2Re \{g^C[V\bar{W}]\} \quad (\text{A.34})$$

$$g = (g^C)_{a\bar{b}} dz^a \otimes d\bar{z}^{\bar{b}} + (g^C)_{\bar{a}b} d\bar{z}^{\bar{a}} \otimes dz^b = 2Re \left\{ (g^C)_{a\bar{b}} dz^a \otimes d\bar{z}^{\bar{b}} \right\} \quad (\text{A.35})$$

Al pasarlo a notación indicial, podemos verlo de dos maneras:

$$g[VW] = (g^C)_{a\bar{b}} V^a \bar{W}^{\bar{b}} + (g^C)_{\bar{a}b} \bar{V}^{\bar{a}} W^b = (g^C)_{a\bar{b}} \left[V^a \bar{W}^{\bar{b}} + W^a \bar{V}^{\bar{b}} \right] \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} g[VW] &= (g^C)_{a\bar{b}} V^a \bar{W}^{\bar{b}} + (g^C)_{\bar{a}b} \bar{V}^{\bar{a}} W^b = (g^C)_{a\bar{b}} V^a \bar{W}^{\bar{b}} + \left[(g^C)_{a\bar{b}} V^a \bar{W}^{\bar{b}} \right]^* = \\ &= 2 Re \left\{ (g^C)_{a\bar{b}} V^a \bar{W}^{\bar{b}} \right\} \end{aligned}$$

Entonces, si g^C es hermítica:

$$g^C : T_p X^C \times T_p X^C \longrightarrow \mathbb{C} \quad (\text{A.37})$$

aunque

$$g : T_p X^C \times T_p X^C \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.38})$$

Esto también lo podemos ver como

$$g[z_1, z_2] = g^C[z_1, \bar{z}_2] + g^C[\bar{z}_1, z_2] = 2(g[Re\{z_1\}, Re\{z_2\}] + g[Im\{z_1\}, Im\{z_2\}]) \quad (\text{A.39})$$

Que una métrica compleja g^C sea hermítica es equivalente a decir que su métrica real origen g tiene como simetría a la aplicación

$$\mathfrak{S} : T_p X \rightarrow T_p X \quad (\text{A.40})$$

tal que

$$\mathfrak{S}^2 = -I \quad (\text{A.41})$$

Esto es

$$g[\mathfrak{S}P, \mathfrak{S}Q] = g[P, Q] \quad (\text{A.42})$$

A.5. Métricas complejas hermíticas de Kähler

Si tenemos una métrica compleja hermítica g^C , podemos construir la (1,1)-forma

$$\begin{aligned} J &= i \left[(g^C)_{a\bar{b}} dz^a \otimes d\bar{z}^b - (g^C)_{\bar{a}b} d\bar{z}^{\bar{a}} \otimes dz^b \right] = \\ &= i (g^C)_{a\bar{b}} \left[dz^a \otimes d\bar{z}^b - d\bar{z}^{\bar{b}} \otimes dz^a \right] = i (g^C)_{a\bar{b}} dz^a \wedge d\bar{z}^{\bar{b}} \quad (\text{A.43}) \end{aligned}$$

Una métrica hermítica g^C se dice de Kähler si la (1,1)-forma J construida a partir de ella es una forma cerrada. Esto es

$$dJ = (\partial + \bar{\partial})J = 0 \quad (\text{A.44})$$

La condición $dJ = 0$ implica

$$\frac{\partial(g^C)_{a\bar{b}}}{\partial z^m} = \frac{\partial(g^C)_{m\bar{b}}}{\partial z^a} ; \quad \frac{\partial(g^C)_{\bar{a}b}}{\partial \bar{z}^{\bar{m}}} = \frac{\partial(g^C)_{\bar{m}b}}{\partial \bar{z}^{\bar{a}}} \quad (\text{A.45})$$

Esta condición hace que se anulen todos los Christoffels de tipo

$$\Gamma_{ab}^{\bar{m}} = 0 ; \quad \Gamma_{\bar{a}b}^m = 0 ; \quad \Gamma_{ab}^m = 0 ; \quad \Gamma_{\bar{a}b}^{\bar{m}} = 0 ; \quad \Gamma_{ab}^{\bar{m}} = 0 ; \quad \Gamma_{\bar{a}b}^m = 0 \quad (\text{A.46})$$

y sólo sobrevivan los de los dos tipos siguientes:

$$\Gamma_{ab}^m = \frac{1}{2} (g^C)^{m\bar{t}} \left[\frac{\partial(g^C)_{\bar{t}b}}{\partial z^a} + \underbrace{\frac{\partial(g^C)_{a,\bar{t}}}{\partial z^b}}_{\frac{\partial(g^C)_{b,\bar{t}}}{\partial z^a}} - \underbrace{\frac{\partial(g^C)_{ab}}{\partial \bar{z}^{\bar{t}}}}_0 \right] \xrightarrow{(g^C)_{\bar{t}b} = (g^C)_{b\bar{t}}} = (g^C)^{m\bar{t}} \frac{\partial(g^C)_{b,\bar{t}}}{\partial z^a} \quad (\text{A.47})$$

$$\Gamma_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{m}} = \frac{1}{2}(g^C)^{\bar{m}t} \left[\frac{\partial(g^C)_{t\bar{b}}}{\partial\bar{z}^{\bar{a}}} + \underbrace{\frac{\partial(g^C)_{\bar{a}t}}{\partial\bar{z}^{\bar{b}}}}_{\frac{\partial(g^C)_{\bar{b}t}}{\partial\bar{z}^{\bar{a}}}} - \underbrace{\frac{\partial(g^C)_{\bar{a}\bar{b}}}{\partial z^t}}_0 \right] \xrightarrow{(g^C)_{t\bar{b}}=(g^C)_{\bar{b}t}} = (g^C)^{\bar{m}t} \frac{\partial(g^C)_{\bar{b},t}}{\partial\bar{z}^{\bar{a}}} \quad (\text{A.48})$$

Además, $dJ = 0$ también implica que las únicas componentes del tensor de Riemann asociado a una variedad de Kähler son

$$R_{\bar{a}\bar{b}c\bar{d}} = -\partial_a\partial_{\bar{b}}(g^C)_{c\bar{d}} + (g^C)^{s\bar{t}} (\partial_a(g^C)_{c\bar{t}}) (\partial_{\bar{b}}(g^C)_{s\bar{d}}) \quad (\text{A.49})$$

donde

$$[\nabla_a\nabla_{\bar{b}}]V_c = -R_{\bar{a}\bar{b}c}{}^dV_d \quad (\text{A.50})$$

siendo $[\nabla_a\nabla_{\bar{b}}]$ el conmutador de las derivadas covariantizadas con respecto a la conexión de Kähler.

El tensor de Ricci resulta

$$R_{\bar{a}\bar{b}} = (g^C)^{c\bar{d}}R_{\bar{a}\bar{b}c\bar{d}} = -\partial_a\partial_{\bar{b}}(\log \det(g^C)) \quad (\text{A.51})$$

Por último, la condición $dJ = 0$ implica que la métrica g^C se puede obtener a partir de una función K . Esta función $K(z^1, \dots, z^{\frac{n}{2}}; \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^{\frac{n}{2}})$ se conoce como potencial de Kähler y no tiene carácter de escalar, sino que es simplemente una función compleja del espacio de funciones complejas definidas en el parche de X^C cuyas coordenadas locales estamos usando.

$$(g^C)_{\bar{a}\bar{b}} = \frac{\partial K}{\partial z^a \partial \bar{z}^{\bar{b}}} \equiv (K)_{\bar{a}\bar{b}} ; (g^C)_{\bar{a}b} = \frac{\partial K}{\partial \bar{z}^{\bar{a}} \partial z^b} \equiv (K)_{\bar{a}b} \quad (\text{A.52})$$

- *Kähler real*: $K(z^1, \dots, z^{\frac{n}{2}}; \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^{\frac{n}{2}}) \in \mathbb{R}$

Si K pertenece (dentro del espacio de funciones complejas definidas sobre la variedad X^C) al subespacio de las funciones reales definidas sobre X^C , $K(z^1, \dots, z^{\frac{n}{2}}; \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^{\frac{n}{2}}) \in \mathbb{R}$

$$g[VW] = (g^C)_{\bar{a}\bar{b}}V^{\bar{a}}\bar{W}^{\bar{b}} + (g^C)_{\bar{a}b}\bar{V}^{\bar{a}}W^b = 2(g^C)_{\bar{a}\bar{b}} \operatorname{Re} \left\{ V^{\bar{a}}\bar{W}^{\bar{b}} \right\} \quad (\text{A.53})$$

donde

$$(g^C)_{\bar{a}\bar{b}} = (K)_{\bar{a}\bar{b}} ; (g^C)_{\bar{a}b} = (K)_{\bar{a}b} \quad (\text{A.54})$$

En términos de la métrica, si $(K)_{a\bar{b}} = (K)_{\bar{a}b}$

$$\begin{aligned} K &= (K)_{a\bar{b}} \left[dz^a \otimes d\bar{z}^{\bar{b}} + dz^{\bar{a}} \otimes dz^b \right] = \\ &= 2(K)_{a\bar{b}} \operatorname{Re} \left\{ dz^a \otimes d\bar{z}^{\bar{b}} \right\} = 2(K)_{a\bar{b}} \left[d\operatorname{Re} \{z^a\} \otimes d\operatorname{Re} \{z^b\} + d\operatorname{Im} \{z^a\} \otimes d\operatorname{Im} \{z^b\} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Resultando

$$(K)_{\operatorname{Re}\{z^a\}\operatorname{Re}\{z^b\}} = 2(K)_{a\bar{b}} \quad (\text{A.56})$$

$$(K)_{\operatorname{Im}\{z^a\}\operatorname{Im}\{z^b\}} = 2(K)_{a\bar{b}} \quad (\text{A.57})$$

A.6. Transporte paralelo y grupo de holonomía de una variedad de Kähler

Partiremos de una métrica de Kähler (K) resultado de la extensión compleja de una métrica real g . La variedad es ahora compleja X^C y de dimensión $m = \frac{n}{2}$. La condición de que sea Kähler, implica que al transportar paralelamente un vector, no se mezclen las componentes holomorfa y antiholomorfa.

Como la longitud de un vector V^a no varía al hacer transporte paralelo, $\mathcal{H} \subset U(m)$ ²³. En particular, V^a se transforma en la \mathbf{m} de $U(m)$ y \bar{V}^a en la $\bar{\mathbf{m}}$.

Cuando V^a es trasladado paralelamente a lo largo de un ciclo cerrado infinitesimal, su variación es

$$\delta V^a = (\delta a^{b\bar{c}}) (R_{b\bar{c}})^a_e V^e = (H)^a_e V^e \quad (\text{A.58})$$

donde

$$H = (\delta a^{b\bar{c}}) (R_{b\bar{c}}) \subset \mathcal{H} \quad (\text{A.59})$$

siendo $\mathcal{H} \subset U(m)$ el grupo de holonomía de la variedad que me da la variación del vector V^a .

²³Elegiremos la base de generadores de $U(m)$ como m^2 matrices **hermíticas**:

- $m - 1$ generadores (Casimires) diagonales (por tanto reales) y de traza nula.
- $\frac{m(m-1)}{2}$ generadores reales (por tanto simétricos) y sin elementos en la diagonal.
- $\frac{m(m-1)}{2}$ generadores imaginarios puros (por tanto antisimétricos) $\rightarrow SO(m)$
- La matriz identidad \mathbb{I} que absorbe toda la traza.

Si extraemos la matriz identidad del conjunto de generadores, nos quedamos sólo con los de traza nula, esto es, el subgrupo $SU(m)$

La traza $(R_{b\bar{c}})^e$ es proporcional al tensor de Ricci $R_{b\bar{c}}$ y genera la parte $U(1)$ de la descomposición $U(m) \simeq SU(m) \oplus U(1)$ asociada al generador \mathbb{I} presente en $U(m)$.

B. Compactificación y variedades de Calabi-Yau

B.1. Dimensiones extra, espinores de Killing y supersimetría

Dada una teoría en dimensión arbitraria D , una de las tareas que aparece es la de ver qué teoría d -dimensional resulta al compactificar $D - d$ coordenadas en una variedad que llamaremos *variedad interna* K_{D-d} .

Partiremos de una variedad X_D y asumiremos que factoriza²⁴ de forma

$$X_D = X_d \times K_{D-d} \quad (\text{B.1})$$

esto es, admite *compactificación espontánea*

$$G_{IJ}(x, y) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) & 0 \\ 0 & g_{ij}(y) \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

donde $I, J = 1, \dots, D$, $\mu, \nu = 1, \dots, d$ y $i, j = 1, \dots, D - d$

Como hemos visto al definir el grupo de holonomía para variedades reales, si tenemos signatura $(+, \underbrace{-, \dots, -}_{D-1})$ en $G_{IJ}(x, y)$, el grupo de holonomía de la variedad X_D es $SO(1, D - 1)$. Como tenemos signatura $(+, \underbrace{-, \dots, -}_{d-1})$ en $g_{\mu\nu}(x)$, el grupo de holonomía de la variedad X_d es $SO(1, d - 1)$. Por último, como la signatura de $g_{ij}(y)$ es $(\underbrace{+, \dots, +}_{D-d})$ el grupo de holonomía de la variedad K_{D-d} es $SO(D - d)$.

Entonces

$$X_D = X_d \times K_{D-d} \quad (\text{B.3})$$

$$SO(1, D - 1) \rightarrow SO(1, d - 1) \times SO(D - d) \quad (\text{B.4})$$

lo cual es perfectamente compatible con la métrica más general que reproduce la invariancia de Poincare d -dimensional

$$ds_D^2 = e^{-2A(y)} ds_d^2 + e^{2A(y)} g_{ij} dy^i dy^j \quad (\text{B.5})$$

²⁴La factorización ha de ser solución a la ecuación de movimiento de la métrica D -dimensional

donde $A(y)$ permite la posibilidad de un factor de "warping". Para nuestros propósitos en este trabajo, no vamos a considerar nunca esta posibilidad.

Trabajaremos en el límite de bajas energías de la teoría de cuerdas, esto es, *Supergravedad D-dimensional*. Para tener extensiones del Modelo Estándar fenomenológicamente viables, hemos de buscar teorías con $D-4$ dimensiones compactificadas y que preserven algún número de supersimetrías.

Entre el contenido fermiónico de las teorías de Supergravedad, siempre tendremos el *gravitino D-dimensional* Ψ_I en el multiplete gravitacional²⁵ el cual se transforma como

$$\delta_\zeta \Psi_I = \nabla_I \zeta + \dots \quad (\text{B.6})$$

donde ζ es el espinor que parametriza la transformación de supersimetría y ∇_I es la derivada covariantizada con la conexión de espín. Hemos omitido otros términos en los que aparecen otros campos bosónicos (dilatón, B_{IJ} y p-formas) tomando sus valores esperados nulos.

Para que se mantenga supersimetría,

$$\langle \delta_\zeta \psi_I \rangle = 0 \implies \nabla_I \zeta = 0 \quad (\text{B.7})$$

Los espinores que son covariantemente constantes reciben el nombre de *espinores de Killing*. La existencia de espinores de Killing, lo cual es una condición necesaria para tener compactificaciones que mantengan supersimetrías, restringe los tipos de variedades en los que podemos compactificar.

Una condición necesaria para que existan espinores de Killing *D-dimensionales* es que se anule el tensor de Ricci [11]

$$R_{IJ} = 0 \quad (\text{B.8})$$

que también es la ecuación de movimiento que se obtiene de la acción de supergravedad si apagamos todos los demás campos.

Debido a la factorización de la métrica *D-dimensional*

$$\nabla_I \zeta = 0 \implies \nabla_\mu \zeta = 0 \quad ; \quad \nabla_i \zeta = 0 \quad (\text{B.9})$$

Si asumimos el Ansatz

²⁵Si tenemos N supersimetrías en la teoría *D-dimensional*, tendremos N gravitinos en el multiplete gravitacional

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (\text{B.10})$$

resulta

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$\partial_\mu \zeta = 0 \quad (\text{B.12})$$

Entonces, asumiendo (B.10),

$$R_{ij} = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\zeta = \zeta(y) \quad (\text{B.14})$$

$$\nabla_i \zeta = 0 \quad (\text{B.15})$$

B.2. Variedades de Calabi-Yau

En la actualidad hay cinco teorías de supercuerdas: Tipo I, Heterótica $E_8 \times E_8$, Heterótica $SO(32)$, Tipo *IIA* y Tipo *IIB*. Todas se formulan en dimensión $D = 10$, luego

$$X_{10} = X_4 \times K_6 \quad (\text{B.16})$$

$$SO(1,9) \rightarrow SO(1,3) \times SO(6) \quad (\text{B.17})$$

En general, para la *variedad interna* K_6 tendremos

$$\mathcal{H} = SO(6) \simeq SU(4) \quad (\text{B.18})$$

Definiciones y resultados sobre holonomía se encuentran en los apéndices (A.2) y (A.6).

Hagamos la extensión compleja $g \Rightarrow g^C$ e impongamos sobre K_6 la condición de que sea una variedad hermítica y de Kähler

$$g_{ij} \implies K_{a\bar{b}} \equiv (g^C)_{a\bar{b}} \quad , \quad \text{donde } a, b = 1, 2, 3. \quad (\text{B.19})$$

Al habernos quedado con el subconjunto de variedades de Kähler, la holonomía es $U(3)$ y la condición (B.13) toma la forma

$$R_{a\bar{b}} = 0 \quad (\text{B.20})$$

Como se expone en el apéndice (A.6), la traza $(R_{a\bar{b}})_e^e$ es proporcional al tensor de Ricci $R_{a\bar{b}}$ y genera la parte $U(1)$ de la descomposición $U(m) \simeq SU(m) \oplus U(1)$ asociada al generador \mathbb{I} presente en $U(m)$. Esto supone que, si se cumple la condición (B.20), el grupo de holonomía para la *variedad interna* K_6 no es $U(3)$, sino $SU(3)$.

Variedad de Calabi-Yau:

Definiremos una variedad de *Calabi-Yau*, CY_m como aquella variedad Riemanniana compacta real de dimensión $2m$ cuya holonomía es $SU(m) \subset SO(2m)$. O lo que es lo mismo, como una variedad de Kähler con tensor de Ricci nulo.

Para $m = 1$ sólo hay un CY_1 que es el 2-toro T^2 . Para $m = 2$ el único CY_2 es la variedad $K3$. En cambio, para $m \geq 3$ hay una gran número de variedades.

Aceptando (B.10), si queremos que la compactificación mantenga supersimetría, hemos de tener espinores de Killing $\zeta(y)$ definidos sobre la *variedad interna* K_6 . Pero al hacer transporte paralelo sobre un ciclo en K_6 , el espinor sufrirá una rotación dada por el grupo de homología de K_6 , que, en general, vimos que es $SO(6) \simeq SU(4)$.

Si hacemos la compactificación escogiendo

$$K_6 = CY_3 \tag{B.21}$$

$$\mathcal{H} = SU(3) \tag{B.22}$$

entonces, bajo $SU(3)$, un espinor en la **4** de $SU(4)$ se descompone en un triplete y **un singlete**

$$\mathbf{4}_{SU(4)} = (\mathbf{3} + \mathbf{1})_{SU(3)} \tag{B.23}$$

por lo que, al haber un singlete que no se transforma (covariantemente constante), tendremos una vez la supersimetría inicial en dimensión $D = 10$.

Si hacemos la compactificación escogiendo

$$K_6 = CY_2 \times T^2 \tag{B.24}$$

$$\mathcal{H} = SU(2) \tag{B.25}$$

entonces, bajo $SU(2)$, un espinor en la **4** de $SU(4)$ se descompone en un doblete y **dos singletes**

$$\mathbf{4}_{SU(4)} = (\mathbf{2} + \mathbf{1} + \mathbf{1})_{SU(2)} \tag{B.26}$$

por lo que, al haber dos singletes que no se transforman (covariantemente constantes), tendremos dos veces la supersimetría inicial en dimensión $D = 10$.

Si hacemos la compactificación escogiendo

$$K_6 = CY_1 \times T^2 \times T^2 = T^2 \times T^2 \times T^2 \quad (\text{B.27})$$

$$\mathcal{H} = I \quad (\text{B.28})$$

entonces, bajo \mathbb{I} , un espinor en la $\mathbf{4}$ de $SU(4)$ se descompone en **cuatro singletes**

$$\mathbf{4}_{SU(4)} = (\mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1})_I \quad (\text{B.29})$$

por lo que, al haber cuatro singletes que no se transforman (covariantemente constantes), tendremos cuatro veces la supersimetría inicial en dimensión $D = 10$.

B.3. Clasificación de Calabi-Yau's: espacio de *moduli* geométricos

En general, hablaremos de *moduli* en el sentido de campos escalares sin masa que parametrizan familias continuas de vacíos. Pueden ser campos cargados o no bajo los grupos de simetría de la teoría, generalmente trataremos con escalares neutros cuya una interacción es la gravitacional. En las compactificaciones en variedades de *Calabi-Yau* tendremos *moduli* parametrizando la posición en el espacio de variedades de *Calabi-Yau*.

Partamos de una variedad interna real K_6 dotada de una métrica g_{ij} e impongamos que se anule su tensor de Ricci.

$$R_{ij} = 0 \quad (\text{B.30})$$

Si ahora deformamos la métrica

$$g \rightarrow g + \delta g \quad (\text{B.31})$$

la condición de que se anule el tensor de Ricci implica

$$R_{ij}(g) = R_{ij}(g + \delta g) = 0 \quad (\text{B.32})$$

Entonces, δg satisface la ecuación de Lichnerowicz

$$\nabla^k \nabla_k \delta g_{ij} + 2 R^l{}_i{}^m{}_j \delta g_{lm} = 0 \quad (\text{B.33})$$

Para variedades de Kähler, las soluciones a esta ecuación son independientes y están asociadas a dos clases de deformaciones de la métrica (en la base compleja) :

- *Deformaciones puras*

$$\delta K = \delta K_{\bar{a}\bar{b}} \quad (\text{B.34})$$

- *Deformaciones mixtas*

$$\delta K = \delta K_{a\bar{b}} \quad (\text{B.35})$$

Queremos clasificar las variaciones de la métrica. Para ello vamos a construir dos formas asociadas a cada uno de los tipos de variaciones

- *Deformaciones puras*

$$\delta K_{\bar{a}\bar{b}} \leftrightarrow \Omega_{cd}^{\bar{b}} \delta K_{\bar{a}\bar{b}} dz^c \wedge dz^d \wedge d\bar{z}^{\bar{a}} \in H^{(2,1)} \quad (\text{B.36})$$

- *Deformaciones mixtas*

$$\delta K_{a\bar{b}} \leftrightarrow \delta K_{a\bar{b}} dz^a \wedge d\bar{z}^{\bar{b}} \in H^{(1,1)} \quad (\text{B.37})$$

Las p -formas reales se clasifican según la clase de equivalencia (dentro del grupo de cohomología de De Rham H^p) a la que pertenecen. El número de clases de equivalencia para un grupo de cohomología dado viene definido por el número de Betti b_p y es el número de elementos independientes que tiene la base de p -formas. Podremos escribir cualquier p -forma como una combinación lineal de estos elementos.

Las (p,q) -formas son el análogo para las métricas complejas de Kähler. Los índices (p,q) denotan la parte holomorfa y antiholomorfa respectivamente. La dimensión del grupo de cohomología $H^{(p,q)}$ viene dada por el número Hodge $h^{(p,q)}$, que denota el número de elementos independientes que tiene la base de (p,q) -formas. Podremos escribir cualquier (p,q) -forma como una combinación lineal de estos elementos.

Expandamos cada tipo de deformación en elementos de su base de cohomología

$$\Omega_{cd}^{\bar{b}} \delta K_{\bar{a}\bar{b}} = \sum_1^{h(2,1)} s^\alpha(x) w_{(2,1)}^\alpha \quad (\text{B.38})$$

$$\delta K_{\bar{a}\bar{b}} = \sum_1^{h(1,1)} t^\alpha(x) w_{(1,1)}^\alpha \quad t^\alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{B.39})$$

Asumiendo eq.(B.2), los coeficientes $s^\alpha(x)$ y $t^\alpha(x)$ aparecen en la teoría en $d = 4$ como campos escalares sin masa, moduli.

- Kähler *moduli* $t^\alpha(x)$

Parametrizan las deformaciones mixtas $\delta K_{\bar{a}\bar{b}}$ de la métrica. Alteran la clase de Kähler de la variedad ya que alteran la forma de Kähler

$$J = iK_{\bar{a}\bar{b}} dz^a \wedge d\bar{z}^{\bar{b}} \longrightarrow i(K_{\bar{a}\bar{b}} + \delta K_{\bar{a}\bar{b}}) dz^a \wedge d\bar{z}^{\bar{b}} \quad (\text{B.40})$$

Los Kähler *moduli* parametrizan la clase de Kähler de la forma de Kähler.

- *moduli* de estructura compleja $s^\alpha(x)$

Parametrizan las deformaciones puras $\delta K_{\bar{a}\bar{b}}$ de la métrica por lo que no alteran la forma de Kähler J . Al no alterar la forma de Kähler, existirá un sistema de coordenadas en el que las componentes puras de la métrica deformada se anulen. Pero bajo una transformación general de coordenadas $z^a \rightarrow z^a + f^a(z)$,

$$\delta K_{\bar{a}\bar{b}} \longrightarrow \delta K_{\bar{a}\bar{b}} - \frac{\partial f^c}{\partial z^a} K_{\bar{c}\bar{b}} - \frac{\partial f^c}{\partial z^b} K_{\bar{a}\bar{c}} \quad (\text{B.41})$$

quedando de manifiesto que un cambio de coordenadas que respete holomorficidad $f = f(z)$ no va a eliminar las componentes puras de la métrica deformada. Para conseguirlo hay que hacer un cambio de coordenadas que no respete holomorficidad y por definición la estructura compleja de la variedad (atlas complejo).

Los *moduli* de estructura compleja parametrizan la estructura compleja de la variedad.

En las compactificaciones más sencillas, los *moduli* Φ son escalares neutros. Estos escalares son inconsistentes con los experimentos. Se acoplan gravitacionalmente a la materia ordinaria con un rango característico $R \sim$

$\mathcal{O}\left(\frac{1}{m_\Phi}\right)$

Para variedades de Kähler, los números *Hodge* $h^{(p,q)}$ y los de Betti b_r se relacionan mediante:

$$\sum_{p+q=r} h^{(p,q)} = b_r \quad (\text{B.42})$$

$$\sum_{p,q} (-1)^{p+q} h^{(p,q)} = \sum_r (-1)^r b_r = \mathcal{X}(K_6) \quad (\text{B.43})$$

$$h^{(p,p)} > 0 \quad \text{para } p = 0, \dots, m \quad (\text{B.44})$$

donde \mathcal{X} es el número de Euler de K_6 y m es la dimensión compleja de la variedad ($K_6 \rightarrow m = 3$)

Además, los números *Hodge* $h^{(p,q)}$ no son todos independientes

$$h^{(p,q)} = h^{(q,p)} \quad (\text{B.45})$$

$$h^{(p,q)} = h^{(m-q, m-p)} \quad (\text{B.46})$$

Para el caso en que la variedad interna es CY_m tenemos además las siguientes propiedades:

$$h^{(m,0)} = h^{(0,m)} = h^{(m-p,0)} \quad (\text{B.47})$$

$$h^{(p,0)} = h^{(0, m-p)} \quad (\text{B.48})$$

$$h^{(p,0)} = 0 \quad \text{para } 0 < p < m \quad (\text{B.49})$$

Para el caso de CY_3 , los únicos números *Hodge* independientes son $h^{(1,1)} \geq 1$ y $h^{(2,1)} \geq 0$ por lo que

$$\mathcal{X}(CY_3) = 2(h^{(1,1)} - h^{(1,2)}) \quad (\text{B.50})$$

y además existe la simetría de espejo entre una variedad (X) y su variedad espejo (\tilde{X}) por la cual

$$h^{(p,q)}(X) = h^{(3-p,q)}(\tilde{X}) \quad (\text{B.51})$$

con lo que ambas variedades se relacionan por un intercambio entre Kähler *moduli* y *moduli* de estructura compleja

$$h^{(1,1)}(X) = h^{(2,1)}(\tilde{X}) \quad (\text{B.52})$$

C. Parámetros de slow-roll para métricas hermíticas

Podemos utilizar el potencial escalar $V(z^1, \dots, z^{\frac{n}{2}}; \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^{\frac{n}{2}}) \in \mathbb{R}$ de la teoría SUGRA como función del espacio de funciones reales definidas sobre la variedad compleja X^C y así construir tensores que representen cantidades medibles en experimentos como WMAP3.

C.1. Tensor gradiente (espacio cotangente): ϵ

Comentemos antes que nada que el espacio tangente y el cotangente de X^C tienen un mapping a través de la métrica y que las contracciones invariantes (escalares) que calculemos no dependen de que estemos contrayendo en un espacio u otro. Tras esto, podemos definir la contracción del vector gradiente de V (*velocidad* cuadrática del potencial escalar)

$$D_a V = \frac{\partial V}{\partial z^a} = V_a \quad ; \quad D_{\bar{a}} V = \frac{\partial V}{\partial \bar{z}^{\bar{a}}} = V_{\bar{a}} \quad (\text{C.1})$$

Entonces, como los dos argumentos de $g[\ ; \]$ son el mismo covector, se cumple que

$$(g^C)[z, \bar{z}] \in \mathbb{R} \quad (\text{C.2})$$

y obtenemos

$$g[\nabla V, \nabla V] = g^C[\nabla V, \nabla V] + g^C[\nabla \bar{V}, \nabla V] = 2g^C[\nabla V, \nabla \bar{V}] = 2(g^C)^{a\bar{b}} V_a V_{\bar{b}} \quad (\text{C.3})$$

Podemos definir un parámetro $\epsilon \in \mathbb{R}$ sin dimensiones que cuantifique esta *velocidad cuadrática* y que esté normalizado

$$\epsilon \equiv (M_P^2) \frac{g[\nabla V, \nabla V]}{2V^2} \quad (\text{C.4})$$

- Si utilizamos la base compleja

$$g[\nabla V, \nabla V] = 2(g^C)^{a\bar{b}} V_a V_{\bar{b}} \quad (\text{C.5})$$

resultando,

$$\epsilon \equiv (M_P^2) \frac{(g^C)^{a\bar{b}} V_a V_{\bar{b}}}{V^2} \quad (\text{C.6})$$

- Si utilizamos la base real (sin extensión compleja)

$$D_i V = \frac{\partial V}{\partial x^i} = V_i \quad (\text{C.7})$$

Entonces

$$g[\nabla V, \nabla V] = (g)^{ij} V_i V_j \quad (\text{C.8})$$

resultando,

$$\epsilon \equiv (M_P^2) \frac{(g)^{ij} V_i V_j}{2V^2} \quad (\text{C.9})$$

C.2. Tensor Hessiano (cotangente \times cotangente): η

Vamos a desarrollar lo que sería la expresión del Hessiano manifiestamente covariante con una normalización igual que hicimos con el parámetro ϵ .

Para calcular el Hessiano, partiendo del gradiente (que es un tensor de orden 1 covariante), hemos de calcular su derivada covariantizada

$$D_b D_a V = D_b V_a = \partial_b V_a - \Gamma_{ba}^m V_m \quad (\text{C.10})$$

$$D_{\bar{b}} D_a V = D_{\bar{b}} V_a = \partial_{\bar{b}} V_a - \Gamma_{\bar{b}a}^m V_m \quad (\text{C.11})$$

$$D_b D_{\bar{a}} V = D_b V_{\bar{a}} = \partial_b V_{\bar{a}} - \Gamma_{b\bar{a}}^{\bar{m}} V_{\bar{m}} \quad (\text{C.12})$$

$$D_{\bar{b}} D_{\bar{a}} V = D_{\bar{b}} V_{\bar{a}} = \partial_{\bar{b}} V_{\bar{a}} - \Gamma_{\bar{b}\bar{a}}^{\bar{m}} V_{\bar{m}} \quad (\text{C.13})$$

Definamos las siguientes cantidades

$$\square_{\bar{a}}^{\bar{c}} = (g^C)^{\bar{c}b} D_b D_a V = D^{\bar{c}} V_a = (g^C)^{\bar{c}b} (\partial_b V_a - \Gamma_{ba}^m V_m) \quad (\text{C.14})$$

$$\square_a^c = (g^C)^{c\bar{b}} D_{\bar{b}} D_a V = D^c V_a = (g^C)^{c\bar{b}} (\partial_{\bar{b}} V_a - \Gamma_{\bar{b}a}^m V_m) \quad (\text{C.15})$$

$$\square_{\bar{a}}^{\bar{c}} = (g^C)^{\bar{c}b} D_b D_{\bar{a}} V = D^{\bar{c}} V_{\bar{a}} = (g^C)^{\bar{c}b} (\partial_b V_{\bar{a}} - \Gamma_{b\bar{a}}^{\bar{m}} V_{\bar{m}}) \quad (\text{C.16})$$

$$\square_{\bar{a}}^c = (g^C)^{c\bar{b}} D_{\bar{b}} D_{\bar{a}} V = D^c V_{\bar{a}} = (g^C)^{c\bar{b}} (\partial_{\bar{b}} V_{\bar{a}} - \Gamma_{\bar{b}\bar{a}}^{\bar{m}} V_{\bar{m}}) \quad (\text{C.17})$$

Podemos definir una matriz $\eta \in \mathbb{C}$ sin dimensiones que cuantifique esta *curvatura* y que esté normalizada

$$\eta \equiv (M_P^2) \frac{\square}{V} \quad (\text{C.18})$$

- Si utilizamos la base compleja

$$(\eta)_{\bar{a}}^{\bar{c}} \equiv (M_P^2) \frac{\square_{\bar{a}}^{\bar{c}}}{V} ; \quad (\eta)_a^c \equiv (M_P^2) \frac{\square_a^c}{V} ; \quad (\eta)_{\bar{a}}^{\bar{c}} \equiv (M_P^2) \frac{\square_{\bar{a}}^{\bar{c}}}{V} ; \quad (\eta)_a^c \equiv (M_P^2) \frac{\square_a^c}{V} \quad (\text{C.19})$$

$$(\eta)_{\bar{a}}^{\bar{c}} = [(\eta)_a^c]^* ; \quad (\eta)_{\bar{a}}^{\bar{c}} = [(\eta)_a^c]^* \quad (\text{C.20})$$

\Rightarrow Los autovalores de $(\eta)_{\bar{a}}^{\bar{c}}$ y $(\eta)_{\bar{a}}^c$ NO son invariantes frente a una transformación compleja (QUE RESPETE HOLOMORFICIDAD) de coordenadas complejas, ya que la transformación de uno de los índices es la INVERSA-CONJUGADA del otro. Los autovalores de $(\eta)_a^c$ y $(\eta)_{\bar{a}}^{\bar{c}}$ SÍ son invariantes. Sólo para el subconjunto de las transformaciones REALES de coordenadas complejas, los autovalores de las 4 matrices son independientes de la elección de coordenadas complejas.

- Si utilizamos la base real (sin extensión compleja, $\eta \in \mathbb{R}$)

$$\square_j^i = (g)^{ik} D_k D_j V = D^i V_j = (g)^{ik} (\partial_k V_j - \Gamma_{kj}^m V_m) \quad (C.21)$$

resultando

$$(\eta)^i_j \equiv (M_P^2) \frac{\square_j^i}{V} \quad (C.22)$$

\Rightarrow Los autovalores de esta matriz SÍ son invariantes frente a una transformación real de coordenadas reales, ya que la transformación de uno de los índices es la INVERSA del otro.

C.3. ϵ y η para $g^C \equiv (K)$ siendo hermítica y de Kähler

Ahora, para simplificar los parámetros ϵ y η , exigiremos, además de hermiticidad, que $g^C = (K)$ sea una métrica hermítica y de Kähler. Esto no simplifica la expresión de ϵ pero sí la de η ya que

$$\Gamma_{\bar{b}a}^m = 0 \quad ; \quad \Gamma_{\bar{b}\bar{a}}^{\bar{m}} = 0 \quad ; \quad \Gamma_{ba}^m = (K)^{m\bar{t}} \frac{\partial(K)_{a,\bar{t}}}{\partial z^b} \quad ; \quad \Gamma_{\bar{b}\bar{a}}^{\bar{m}} = (K)^{\bar{m}t} \frac{\partial(K)_{\bar{a},t}}{\partial \bar{z}^b} \quad (C.23)$$

Entonces, vemos que ahora

$$\square_a^{\bar{c}} = (K)^{\bar{c}b} \left(\partial_b V_a - (K)^{m\bar{t}} \frac{\partial(K)_{a,\bar{t}}}{\partial z^b} V_m \right) \quad (C.24)$$

$$\square_a^c = (K)^{c\bar{b}} (\partial_b V_a) \quad (C.25)$$

$$\square_{\bar{a}}^{\bar{c}} = (K)^{\bar{c}b} (\partial_b V_{\bar{a}}) \quad (C.26)$$

$$\square_{\bar{a}}^c = (K)^{c\bar{b}} \left(\partial_{\bar{b}} V_{\bar{a}} - (K)^{\bar{m}t} \frac{\partial(K)_{\bar{a},t}}{\partial \bar{z}^b} V_{\bar{m}} \right) \quad (C.27)$$

Recordando la definición de la matriz η

$$\eta \equiv (M_P^2) \frac{\square}{V} \quad (C.28)$$

- Si utilizamos la base compleja

$$(\eta)^{\bar{c}}_a \equiv (M_P^2) \frac{\square^{\bar{c}}_a}{V} \quad ; \quad (\eta)^c_a \equiv (M_P^2) \frac{\square^c_a}{V} \quad ; \quad (\eta)^{\bar{c}}_{\bar{a}} \equiv (M_P^2) \frac{\square^{\bar{c}}_{\bar{a}}}{V} \quad ; \quad (\eta)^c_{\bar{a}} \equiv (M_P^2) \frac{\square^c_{\bar{a}}}{V} \quad (\text{C.29})$$

- Si utilizamos la base real

$$\square^i_j = (K)^{ik} D_k D_j V = D^i V_j = (K)^{ik} (\partial_k V_j - \Gamma_{kj}^m V_m) \quad (\text{C.30})$$

resultando

$$(\eta)^i_j \equiv (M_P^2) \frac{\square^i_j}{V} \quad (\text{C.31})$$

Recordando la definición de ϵ

$$\epsilon \equiv (M_P^2) \frac{g[\nabla V, \nabla V]}{2V^2} \quad (\text{C.32})$$

- Si utilizamos la base compleja

$$K[\nabla V, \nabla V] = 2(K)^{a\bar{b}} V_a V_{\bar{b}} \quad (\text{C.33})$$

resultando,

$$\epsilon \equiv (M_P^2) \frac{(K)^{a\bar{b}} V_a V_{\bar{b}}}{V^2} \quad (\text{C.34})$$

- Si utilizamos la base real

$$D_i V = \frac{\partial V}{\partial x^i} = V_i \quad (\text{C.35})$$

Entonces

$$K[\nabla V, \nabla V] = (K)^{ij} V_i V_j \quad (\text{C.36})$$

resultando,

$$\epsilon \equiv (M_P^2) \frac{(K)^{ij} V_i V_j}{2V^2} \quad (\text{C.37})$$

D. Ecuaciones de movimiento para un conjunto de campos reales con métrica FRW

En este apartado vamos a considerar resultados generales para un conjunto de campos escalares reales φ 's presentes en el Lagrangiano de la teoría. Estos resultados los utilizaremos para las componentes reales (a excepción de la dirección plana Θ) del modelo que hemos planteado

$$t, |m|, |\chi|, \varphi_{np}, \Omega \quad (\text{D.1})$$

La idea es ver que, tras resolver las ecuaciones de movimiento, conseguimos estar en régimen inflacionario siendo el campo $|\chi|$ el que hace de inflatón.

D.1. Acción gravitacional y acción de materia

Partiendo de la acción gravitacional pura,

$$S_G = \frac{1}{\kappa} \int dx^4 \sqrt{g} R \quad (\text{D.2})$$

donde $R(x) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ y considerando transformaciones de la métrica $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ obtenemos una variación de la acción

$$\delta S_G = -\frac{1}{\kappa} \int dx^4 \sqrt{g} \left[\overbrace{R^{\lambda\epsilon} - \frac{1}{2} g^{\lambda\epsilon} R}^{G^{\lambda\epsilon}} \right] \delta g_{\lambda\epsilon} = -\frac{1}{\kappa} \int dx^4 \sqrt{g} G^{\lambda\epsilon} \delta g_{\lambda\epsilon} \quad (\text{D.3})$$

Luego, la ecuación que encontramos para el caso de gravedad pura es

$$\frac{\delta S_G}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \implies G^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{D.4})$$

Cuando incorporamos materia a la estructura espacio-temporal, ésta se acopla a la métrica, modificando así la ecuación de Einstein que habíamos deducido anteriormente.

Partiendo de

$$S_M = \int dx^4 \sqrt{g} [\lambda K_{ij} g^{\rho\sigma} (\partial_\rho \varphi^i) (\partial_\sigma \varphi^j) - V(\varphi)] \quad (\text{D.5})$$

y calculando la variación de la acción bajo transformaciones $g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, obtenemos

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int dx^4 \sqrt{g} [g^{\mu\nu} [\lambda K_{ij} g^{\rho\sigma} (\partial_\rho \varphi^i) (\partial_\sigma \varphi^j) - V(\varphi)] - 2 \lambda K_{ij} g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} (\partial_\rho \varphi^i) (\partial_\sigma \varphi^j)] (\delta g_{\mu\nu}) \quad (\text{D.6})$$

Atendiendo a la definición general del tensor energía momento

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int dx^4 \sqrt{g} T^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu}) \quad (\text{D.7})$$

podemos identificar

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} [\lambda K_{ij} g^{\rho\sigma} (\partial_\rho \varphi^i) (\partial_\sigma \varphi^j) - V(\varphi)] - 2 \lambda K_{ij} g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} (\partial_\rho \varphi^i) (\partial_\sigma \varphi^j) \quad (\text{D.8})$$

Si lo queremos con los índices abajo, hemos de multiplicar por $g_{\lambda\mu} g_{\epsilon\nu}$

$$T_{\lambda\epsilon} = g_{\lambda\epsilon} [\lambda K_{ij} g^{\rho\sigma} (\partial_\rho \varphi^i) (\partial_\sigma \varphi^j) - V(\varphi)] - 2 \lambda K_{ij} (\partial_\lambda \varphi^i) (\partial_\epsilon \varphi^j) \quad (\text{D.9})$$

donde hemos utilizado $g^{\rho\mu} g_{\lambda\mu} = \delta_\lambda^\rho$

Para tener la acción total

$$S = S_G + S_M \implies \delta S = \delta S_G + \delta S_M \quad (\text{D.10})$$

Esto es

$$\delta S = \int dx^4 \sqrt{g} \left[-\frac{1}{\kappa} R^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa} g^{\mu\nu} R + \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \right] (\delta g_{\mu\nu}) \quad (\text{D.11})$$

Lo que nos lleva a la ecuación de Einstein en presencia de materia

$$\frac{\delta S_G}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \implies G^{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} T^{\mu\nu} \quad (\text{D.12})$$

D.2. Ecuación de movimiento para la materia

Una vez que conocemos la acción para la materia, podemos obtener su ecuación de movimiento a partir del principio de mínima acción, esto es, las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$S_M = \int dx^4 L_M = \int dx^4 \sqrt{g} [\lambda K_{ij} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi^i) (\partial_\nu \varphi^j) - V(\varphi)] \quad (\text{D.13})$$

entonces

$$L_M = \sqrt{g} [\lambda K_{ij} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi^i) (\partial_\nu \varphi^j) - V(\varphi)] \quad (D.14)$$

Vamos a obtener la ecuación de movimiento:

$$\bullet \frac{\partial L_M}{\partial \varphi^k} = \sqrt{g} \left[\lambda g^{\mu\nu} \frac{\partial K_{ij}}{\partial \varphi^k} (\partial_\mu \varphi^i) (\partial_\nu \varphi^j) - \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k} \right] \quad (D.15)$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial L_M}{\partial (\partial_\sigma \varphi^k)} &= \sqrt{g} \lambda g^{\mu\nu} K_{ij} [\delta_\mu^\sigma \delta_k^i (\partial_\nu \varphi^j) + (\partial_\mu \varphi^i) \delta_\nu^\sigma \delta_k^j] = \\ &= \sqrt{g} \lambda [g^{\sigma\nu} K_{kj} (\partial_\nu \varphi^j) + g^{\mu\sigma} K_{ik} (\partial_\mu \varphi^i)] \end{aligned} \quad (D.16)$$

$$\begin{aligned} \bullet \partial_\sigma \left(\frac{\partial L_M}{\partial (\partial_\sigma \varphi^k)} \right) &= (\partial_\sigma \sqrt{g}) \lambda [g^{\sigma\nu} K_{kj} (\partial_\nu \varphi^j) + g^{\mu\sigma} K_{ik} (\partial_\mu \varphi^i)] + \\ &+ \sqrt{g} \lambda \left[(\partial_\sigma g^{\sigma\nu}) K_{kj} (\partial_\nu \varphi^j) + g^{\sigma\nu} \frac{\partial K_{kj}}{\partial \varphi^i} (\partial_\sigma \varphi^i) (\partial_\nu \varphi^j) + g^{\sigma\nu} K_{kj} (\partial_\sigma \partial_\nu \varphi^j) + \right. \\ &\left. + (\partial_\sigma g^{\mu\sigma}) K_{ik} (\partial_\mu \varphi^i) + g^{\mu\sigma} \frac{\partial K_{ik}}{\partial \varphi^j} (\partial_\sigma \varphi^j) (\partial_\mu \varphi^i) + g^{\mu\sigma} K_{ik} (\partial_\sigma \partial_\mu \varphi^i) \right] \end{aligned} \quad (D.17)$$

Podemos renombrar los índices mudos de tal manera que se vea más claramente la estructura de la ecuación de movimiento. Lo único que asumiremos en este paso es que la **métrica** $g_{\mu\nu}$ es **simétrica**:

$$\partial_\sigma \left(\frac{\partial L_M}{\partial (\partial_\sigma \varphi^k)} \right) - \frac{\partial L_M}{\partial \varphi^k} = 0 \quad (D.18)$$

Veamos,

$$\begin{aligned} \bullet & (\partial_\sigma \sqrt{g}) \lambda (K_{km} + K_{mk}) g^{\sigma\mu} (\partial_\mu \varphi^m) + \sqrt{g} \lambda [(K_{km} + K_{mk}) \square \varphi^m + \\ &+ (\partial_\sigma g^{\sigma\mu}) (K_{km} + K_{mk}) (\partial_\mu \varphi^m) + 2 \frac{1}{2} \left[\frac{\partial K_{ik}}{\partial \varphi^j} + \frac{\partial K_{kj}}{\partial \varphi^i} - \frac{\partial K_{ij}}{\partial \varphi^k} \right] g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi^i) (\partial_\nu \varphi^j) + \\ &+ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k}] = 0 \end{aligned} \quad (D.19)$$

Ahora vamos a suponer que la **métrica** K_{ij} es **simétrica**

$$\begin{aligned} \bullet & (\partial_\sigma \sqrt{g}) \lambda 2 K_{km} g^{\sigma\mu} (\partial_\mu \varphi^m) + \sqrt{g} \lambda [2 K_{km} \square \varphi^m + (\partial_\sigma g^{\sigma\mu}) 2 K_{km} (\partial_\mu \varphi^m) + \\ &+ 2 \frac{1}{2} \left[\frac{\partial K_{ki}}{\partial \varphi^j} + \frac{\partial K_{kj}}{\partial \varphi^i} - \frac{\partial K_{ij}}{\partial \varphi^k} \right] g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi^i) (\partial_\nu \varphi^j) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k}] = 0 \end{aligned} \quad (D.20)$$

Multiplicando a ambos lados por $\frac{1}{2} K^{qk}$ y teniendo en cuenta que

$$K^{qk} K_{km} = \delta_m^q \quad (\text{D.21})$$

$$\begin{aligned} & \bullet \left(\partial_\sigma \sqrt{g} \right) \lambda g^{\sigma\mu} (\partial_\mu \varphi^q) + \sqrt{g} \lambda \left[\square \varphi^q + (\partial_\sigma g^{\sigma\mu}) (\partial_\mu \varphi^q) + \right. \\ & \left. + \underbrace{\frac{1}{2} K^{qk} \left[\frac{\partial K_{ki}}{\partial \varphi^j} + \frac{\partial K_{kj}}{\partial \varphi^i} - \frac{\partial K_{ij}}{\partial \varphi^k} \right]}_{\Gamma_{ij}^q} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi^i) (\partial_\nu \varphi^j) + \frac{1}{2\lambda} K^{qk} \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

Ahora bien, operando un poco

$$(\partial_\sigma \sqrt{g}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_\sigma g) = \sqrt{g} \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{g} (\partial_\sigma g)}_{\Gamma_{\epsilon\sigma}^\epsilon} = \sqrt{g} \Gamma_{\epsilon\sigma}^\epsilon \quad (\text{D.23})$$

Entonces, la ecuación de movimiento reza

$$\sqrt{g} \lambda \left[\square \varphi^q + [(\partial_\sigma g^{\sigma\mu}) + \Gamma_{\epsilon\sigma}^\epsilon g^{\sigma\mu}] (\partial_\mu \varphi^q) + \Gamma_{ij}^q g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi^i) (\partial_\nu \varphi^j) + \frac{1}{2\lambda} K^{qk} \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k} \right] = 0 \quad (\text{D.24})$$

o lo que es lo mismo²⁶

$$\square \varphi^q + [(\partial_\sigma g^{\sigma\mu}) + \Gamma_{\epsilon\sigma}^\epsilon g^{\sigma\mu}] (\partial_\mu \varphi^q) + \Gamma_{ij}^q g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi^i) (\partial_\nu \varphi^j) + \frac{1}{2\lambda} K^{qk} \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k} = 0 \quad (\text{D.25})$$

Para llegar a este resultado lo único que hemos asumido es que tanto la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$, como la métrica de Kähler K_{ij} son **simétricas**.

D.3. Métrica de FRW en coordenadas comóviles

- Reescalamos el tiempo de tal manera que $g_{00} = +1$

²⁶En la ecuación $\Gamma_{\beta\delta}^\alpha$ es la conexión afín espacio-temporal mientras que Γ_{ij}^q es la conexión de Kähler.

- Elegimos unas coordenadas espaciales tal que no haya términos $dt dx^i$ en ds^2

Entonces,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \gamma_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j \quad (\text{D.26})$$

Vamos a ver las cantidades geométricas que aparecerán utilizando esta elección de coordenadas

$$\Gamma_{tt}^t = 0 \quad ; \quad \Gamma_{nt}^n = \frac{a'(t)}{a(t)} \quad (\text{D.27})$$

$$G_{00} = 3 \left(\frac{a'(t)}{a(t)} \right)^2 \quad ; \quad G_{mn} = - (a'(t)^2 + 2 a(t)a''(t)) \gamma_{mn} \quad (\text{D.28})$$

donde $\gamma_{mn} = \text{diag} \left(\frac{1}{1-Kr^2}, r^2, r^2 \text{sen}^2(\theta) \right)$.

Si suponemos los campos homogéneos, esto es, en todos los puntos del espacio tridimensional de cada sección espacial, el campo toma es mismo valor para un instante del tiempo,

$$\varphi^q = \varphi^q(t) \quad (\text{D.29})$$

la ecuación de movimiento se simplifica bastante

$$g^{00} = +1 \quad (\text{D.30})$$

$$[(\partial_\sigma g^{\sigma\mu}) + \Gamma_{\epsilon\sigma}^\epsilon g^{\sigma\mu}] (\partial_\mu \varphi^q) \Rightarrow [(\partial_0 g^{00}) + \Gamma_{\epsilon 0}^\epsilon g^{00}] (\partial_0 \varphi^q) = 3 \left(\frac{\partial_t a(t)}{a(t)} \right) \partial_t \varphi(t)^q \quad (\text{D.31})$$

Entonces

$$\partial_t^2 \varphi^q + 3 \left(\frac{\partial_t a(t)}{a(t)} \right) \partial_t \varphi^q + \Gamma_{ij}^q (\partial_t \varphi^i) (\partial_t \varphi^j) + \frac{1}{2\lambda} K^{qk} \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k} = 0 \quad (\text{D.32})$$

Si resolvemos las ecuaciones de Einstein para ver cómo evoluciona la métrica de Minkowski (toda la información está en el factor de escala)

- Componente $(0, 0) \implies G_{00} = \frac{\kappa}{2} T_{00}$

$$G_{00} = 3 \left(\frac{\partial_t a(t)}{a(t)} \right)^2 \quad (\text{D.33})$$

$$T_{00} = - [\lambda K_{ij} (\partial_t \varphi^i) (\partial_t \varphi^j) + V(\varphi)] \quad (\text{D.34})$$

Entonces

$$\left(\frac{\partial_t a(t)}{a(t)} \right)^2 = -\frac{\kappa}{6} [\lambda K_{ij} (\partial_t \varphi^i) (\partial_t \varphi^j) + V(\varphi)] \quad (\text{D.35})$$

- Componente $(m, n) \implies G_{mn} = \frac{\kappa}{2} T_{mn}$

$$G_{mn} = - [(\partial_t a(t))^2 + 2 (\partial_t^2 a(t)) a(t)] \gamma_{mn} \quad (\text{D.36})$$

$$T_{mm} = -a^2(t) \gamma_{mn} [\lambda K_{ij} (\partial_t \varphi^i) (\partial_t \varphi^j) - V(\varphi)] \quad (\text{D.37})$$

si además utilizamos el resultado anterior

$$\left(\frac{\partial_t a(t)}{a(t)} \right)^2 = -\frac{\kappa}{6} [\lambda K_{ij} (\partial_t \varphi^i) (\partial_t \varphi^j) + V(\varphi)] \quad (\text{D.38})$$

obtenemos

$$\left(\frac{\partial_t^2 a(t)}{a(t)} \right) = \frac{\kappa}{6} [2 \lambda K_{ij} (\partial_t \varphi^i) (\partial_t \varphi^j) - V(\varphi)] \quad (\text{D.39})$$

D.4. Número de *e-folds* y coordenadas espaciales comóviles

Haciendo un cambio $t \longrightarrow N_e(t)$ tal que

$$a(t) \longrightarrow e^{N_e(t)} \quad (\text{D.40})$$

$$H = \frac{dN_e(t)}{dt} \longrightarrow e^{-A[t(N_e)]} \quad (\text{D.41})$$

podemos rehacerlo todo con la métrica expresada en función del número de *e-folds* y suponiendo de nuevo homogeneidad

$$ds^2 = e^{2A(N_e)} dN_e^2 - e^{2N_e} \gamma_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j \quad (\text{D.42})$$

Vamos a ver las cantidades geométricas que aparecerán utilizando esta elección de coordenadas

$$\Gamma_{N_e N_e}^{N_e} = A'(N_e) \quad ; \quad \Gamma_{n N_e}^n = 1 \quad (\text{D.43})$$

$$G_{00} = 3 \quad ; \quad G_{mn} = e^{2[N_e - A(N_e)]} (2 A'(N_e) - 3) \gamma_{mn} \quad (\text{D.44})$$

donde $\gamma_{mn} = \text{diag} \left(\frac{1}{1-Kr^2}, r^2, r^2 \text{sen}^2(\theta) \right)$.

$$g^{00} = e^{-2A(N_e)} \longrightarrow \partial_{N_e} g^{00} = -2 (\partial_{N_e} A) g^{00} \quad (\text{D.45})$$

$$[(\partial_\sigma g^{\sigma\mu}) + \Gamma_{\epsilon\sigma}^\epsilon g^{\sigma\mu}] (\partial_\mu \varphi^q) \Rightarrow [(\partial_0 g^{00}) + \Gamma_{\epsilon 0}^\epsilon g^{00}] (\partial_0 \varphi^q) = e^{-2A(N_e)} (3 - \partial_{N_e} A) (\partial_{N_e} \varphi^q) \quad (\text{D.46})$$

Entonces, sacando factor común g^{00} en el lado izquierdo de la ecuación

$$\partial_{N_e}^2 \varphi^q + (3 - \partial_{N_e} A) \partial_{N_e} \varphi^q + \Gamma_{ij}^q (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j) + \frac{1}{2\lambda} e^{2A(N_e)} K^{qk} \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k} = 0 \quad (\text{D.47})$$

Si resolvemos las ecuaciones de Einstein para ver cómo evoluciona la métrica de Minkowski (toda la información está en $A(N_e)$)

- Componente $(0, 0) \implies G_{00} = \frac{\kappa}{2} T_{00}$

$$G_{00} = 3 \quad (\text{D.48})$$

$$T_{00} = - [\lambda K_{ij} (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j) + e^{2A(N_e)} V(\varphi)] \quad (\text{D.49})$$

Entonces

$$3 = -\frac{\kappa}{2} [\lambda K_{ij} (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j) + e^{2A(N_e)} V(\varphi)] \quad (\text{D.50})$$

de donde podemos extraer

$$V(\varphi) = -e^{-2A(N_e)} \left[\frac{6}{\kappa} + \lambda K_{ij} (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j) \right] \quad (\text{D.51})$$

- Componente $(m, n) \implies G_{mn} = \frac{\kappa}{2} T_{mn}$

$$G_{mn} = e^{2[N_e - A(N_e)]} (2 \partial_{N_e} A(N_e) - 3) \gamma_{mn} \quad (\text{D.52})$$

$$T_{mn} = (-e^{2N_e} \gamma_{mn}) [\lambda K_{ij} e^{-2A(N_e)} (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j) - V(\varphi)] \quad (\text{D.53})$$

Entonces

$$(2 \partial_{N_e} A(N_e) - 3) = -\frac{\kappa}{2} [\lambda K_{ij} (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j) - e^{2A(N_e)} V(\varphi)] \quad (\text{D.54})$$

Si además utilizamos el resultado anterior para la componente $(0, 0)$, obtenemos

$$\partial_{N_e} A(N_e) = -\frac{\kappa}{2} \lambda K_{ij} (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j) \quad (\text{D.55})$$

Sustituyendo directamente en la ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} & \bullet \partial_{N_e}^2 \varphi^q + \left[3 + \frac{\kappa}{2} \lambda K_{ij} (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j) \right] \partial_{N_e} \varphi^q + \Gamma_{ij}^q (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j) - \\ & - \frac{1}{2\lambda} K^{qk} \frac{1}{V(\varphi)} \left(\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k} \right) \left[\frac{6}{\kappa} + \lambda K_{ij} (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j) \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.56})$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} & \bullet \partial_{N_e}^2 \varphi^q + \left[1 + \frac{\lambda \kappa}{6} K_{ij} (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j) \right] \left[3 \partial_{N_e} \varphi^q - \frac{3}{\lambda \kappa} K^{qk} \frac{1}{V(\varphi)} \left(\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k} \right) \right] + \\ & + \Gamma_{ij}^q (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j) = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.57})$$

Para que todo sea consistente, λ y κ han de tener signos opuestos y para que además sea consistente con tener una métrica tipo $(+, -, -, -) \rightarrow g_{00} > 0, \quad \kappa < 0$. En realidad lo que determina las cosas es el producto $\lambda \kappa$.

Un criterio es

$$\kappa = -2 \quad (\text{D.58})$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad (\text{D.59})$$

Resultando en unidades de la masa de Planck reducida ($M_{pl} \rightarrow 1$)

$$\begin{aligned} & \bullet \partial_{N_e}^2 \varphi^q + \left[1 - \frac{1}{6} K_{ij} (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j) \right] \left[3 \partial_{N_e} \varphi^q + 3 K^{qk} \frac{1}{V(\varphi)} \left(\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k} \right) \right] + \\ & + \Gamma_{ij}^q (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j) = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.60})$$

D.5. Espectro de potencias $P(k)$ e índice espectral n_s

Por último vamos a obtener expresiones generales para el $P(k)$ sin aproximación de ningún tipo y en la aproximación de *slow roll*.

$$P(k) = \frac{1}{50\pi^2} \left(\frac{H^4}{L_{kin}} \right) \quad (D.61)$$

donde para el caso FRW y en coordenadas comóviles (con el número de *e-folds*)

$$H = e^{-A(N_e)} \quad (D.62)$$

$$L_{kin} = \lambda K_{ij} (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j) \quad (D.63)$$

Si suponemos que los campos son homogéneos, obtenemos

$$P(k) = \frac{1}{50\pi^2} \left(\frac{e^{-2A(N_e)}}{\lambda K_{ij} (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j)} \right) \quad (D.64)$$

Utilizando la ecuación de Einstein para la componente (0,0), obtenemos

$$P(k) = \frac{1}{150\pi^2} \frac{V}{\frac{-2}{\kappa} [\lambda K_{ij} (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j)] - \frac{1}{3} [\lambda K_{ij} (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j)]^2} \quad (D.65)$$

Si asumimos *slow-roll*, esto es, despreciamos los términos de aceleración y las velocidades cuadráticas de los campos en las ecuaciones de movimiento

$$\partial_{N_e} \varphi^a = \frac{1}{\lambda \kappa} K^{ak} \frac{1}{V(\varphi)} \left(\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k} \right) \quad (D.66)$$

obtenemos

$$\lambda K_{ij} (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j) = \frac{1}{\lambda \kappa^2} \frac{1}{V^2} K^{mn} V_m V_n = \frac{1}{\lambda \kappa^2} 2 \epsilon \quad (D.67)$$

Entonces

$$P(k) = \frac{1}{150\pi^2} \frac{V}{\frac{-4}{\lambda \kappa^3} \epsilon - \frac{4}{3} \frac{1}{\lambda^2 \kappa^4} \epsilon^2} \quad (D.68)$$

Si mantenemos el criterio de $\kappa = -2$ y $\lambda = \frac{1}{2}$ obtenemos (en unidades de masa de Planck reducida)

$$P(k) = \frac{1}{150\pi^2} \frac{V}{\epsilon - \frac{1}{3} \epsilon^2} \quad (D.69)$$

Esto es **asumiendo *slow-roll***. Si no lo asumimos y mantenemos el criterio de las constantes,

$$P(k) = \frac{1}{150\pi^2} \frac{V}{\left[\frac{1}{2} K_{ij} (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j)\right] - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} K_{ij} (\partial_{N_e} \varphi^i) (\partial_{N_e} \varphi^j)\right]^2} \quad (\text{D.70})$$

La cantidad que utilizaremos como cota experimental es el índice espectral, el cual se define como

$$n_s = 1 + \frac{d \ln(P(k))}{d \ln(k)} \quad (\text{D.71})$$

En el régimen inflacionario, $\ln(k) \sim N_e$, con lo que

$$n_s \simeq 1 + \frac{d \ln(P_k(N_e))}{d N_e} \quad (\text{D.72})$$

E. Potencial generado dinámicamente para n condensados y un *modulus* T

Vamos a considerar la presencia de n condensados de squarks asociados a n grupos gauge $SU(N_\alpha)$ existentes en el grupo de simetría gauge de la teoría

$$\mathcal{G} = \left[\prod_{\alpha=1}^n SU(N_\alpha) \right] \times U_X(1) \quad (\text{E.1})$$

donde el índice α corre sobre los distintos grupos $SU(N_\alpha)$.

El superpotencial total de la teoría tendrá una contribución con origen en flujos y una suma de superpotenciales no perturbativos generados dinámicamente debido al regimen de confinamiento en el infrarrojo de los grupos gauge $SU(N_\alpha)$

$$W = W_0 + \sum_{\alpha=1}^n W_\alpha^{np} \quad (\text{E.2})$$

que reescribiremos de una forma más compacta como

$$W = \sum_{\alpha=0}^n W_\alpha \quad (\text{E.3})$$

donde W_0 es el superpotencial que aparece al considerar flujos.

Si escribimos el contenido de materia como campos escalares complejos que poseen dos índices, α que designa el grupo gauge SU en el que el campo se transforma en la fundamental (siendo singlete para el resto de los grupos SU) y i_α que designa el número de familias (réplicas de *flavours*) que posee el α -ésimo grupo SU, llegamos a un Kahler de la forma

$$K = -3 \text{Log} (T + T^\dagger) + (\phi^\dagger)^{\alpha i_\alpha} (\phi)_{\alpha i_\alpha} + (\bar{\phi}^\dagger)^{\alpha i_\alpha} (\bar{\phi})_{\alpha i_\alpha} \quad (\text{E.4})$$

donde $\alpha = 1, \dots, n$ y $i_\alpha = 1, \dots, N_{f_\alpha}$ Entonces

$$W = W_0 + \sum_{\alpha=1}^n W_\alpha \left((\phi)_{\alpha i_\alpha}, (\bar{\phi})_{\alpha i_\alpha}, T \right) \quad (\text{E.5})$$

Utilizando la expresión del superpotencial no perturbativo generado dinámicamente para un único condensado de squarks, podemos generalizarla imponiendo índices como

$$W_\alpha|_{\alpha \neq 0} = (N_\alpha - N_{f_\alpha}) \left(\frac{1}{\prod_{i_\alpha=1}^{N_{f_\alpha}} (\overline{\phi\phi})_{\alpha i_\alpha}} \right)^{\frac{1}{N_\alpha - N_{f_\alpha}}} e^{-C_\alpha T} \quad (\text{E.6})$$

donde $C_\alpha = \frac{4\pi K_{N_\alpha}}{N_\alpha - N_{f_\alpha}}$

Ahora bien, como estamos en la fase confinante, sabemos que $\langle \phi_{\alpha i_\alpha} \rangle = \langle \overline{\phi}_{\alpha i_\alpha} \rangle$ lo que se traduce en

$$K = -3 \text{Log} (T + T^\dagger) + 2 (\phi^\dagger)^{\alpha i_\alpha} (\phi)_{\alpha i_\alpha} \quad (\text{E.7})$$

Redefiniremos (normalización) los campos de tal manera que no arrastremos el factor 2 durante todo el cálculo. Esto tiene consecuencias en la forma del superpotencial generado dinámicamente y en el cálculo de los D-términos que veremos al final. La redefinición que hacemos es

$$\phi \implies \frac{\varphi}{\sqrt{2}} \quad (\text{E.8})$$

lo que hace que el superpotencial resulte ahora, para el caso de *flavours* degenerados en cada grupo gauge que es el que nos interesa,

$$W = W_0 + \sum_{\alpha=1}^n W_\alpha ((\varphi)_\alpha, T) \quad (\text{E.9})$$

con

$$W_\alpha|_{\alpha \neq 0} = (N_\alpha - N_{f_\alpha}) \left(\frac{2^{N_{f_\alpha}}}{(\varphi_\alpha^2)^{N_{f_\alpha}}} \right)^{\frac{1}{N_\alpha - N_{f_\alpha}}} e^{-C_\alpha T} \quad (\text{E.10})$$

E.1. F-términos para el caso $\mathcal{G} = [\prod_{\alpha=1}^n SU(N_\alpha)] \times U_X(1)$

Vamos a hacer un análisis sistemático de todos los *moduli* que tenemos en la teoría. Para ello, utilizaremos las siguientes cantidades

$$\bullet \frac{\partial W}{\partial T} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial W_\alpha}{\partial T} = \sum_{\alpha=1}^n (-C_\alpha) W_\alpha \quad (\text{E.11})$$

$$\bullet \frac{\partial W}{\partial (\varphi_{\alpha i_\alpha})} = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial W_\beta}{\partial \varphi_{\alpha i_\alpha}} = \left(\frac{-2}{(N_\alpha - N_{f_\alpha})} \right) \frac{1}{\varphi_{\alpha i_\alpha}} W_\alpha \quad (\text{E.12})$$

■ modulus T

$$\begin{aligned}
D_T W &= \frac{\partial W}{\partial T} + K_T W = \sum_{\alpha=1}^n (-C_\alpha) W_\alpha + K_T \left(W_0 + \sum_{\alpha=1}^n W_\alpha \right) = \\
&= K_T W_0 + \sum_{\alpha=1}^n (K_T - C_\alpha) W_\alpha = K_T W_0 + \sum_{\alpha=1}^n \chi_T^\alpha W_\alpha = \\
&= \sum_{\alpha=0}^n \chi_T^\alpha W_\alpha \tag{E.13}
\end{aligned}$$

donde $\chi_T^\alpha = K_T - C_\alpha$ y $C_0 = 0$.

■ moduli $\varphi_{\alpha i_\alpha}$

$$\begin{aligned}
D_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})} W &= \frac{\partial W}{\partial(\varphi_{\alpha i_\alpha})} + K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})} W = \\
&= \left(\frac{-2}{(N_\alpha - N_{f_\alpha})} \right) \frac{1}{\varphi_{\alpha i_\alpha}} W_\alpha + K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})} \left(W_0 + \sum_{\beta=1}^n W_\beta \right) = \\
&= \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{-2}{(N_\beta - N_{f_\beta})} \right) \frac{\delta_\alpha^\beta}{\varphi_{\beta i_\beta}} W_\beta + K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})} \left(W_0 + \sum_{\beta=1}^n W_\beta \right) = \\
&= K_{\varphi_{\alpha i_\alpha}} W_0 + \sum_{\beta=1}^n \left(K_{\varphi_{\alpha i_\alpha}} + \left(\frac{-2}{(N_\beta - N_{f_\beta})} \right) \frac{\delta_\alpha^\beta}{\varphi_{\beta i_\beta}} \right) W_\beta = \\
&= K_{\varphi_{\alpha i_\alpha}} W_0 + \sum_{\beta=1}^n \chi_{\varphi_{\alpha i_\alpha}}^\beta W_\beta = \\
&= \sum_{\beta=0}^n \chi_{\varphi_{\alpha i_\alpha}}^\beta W_\beta \tag{E.14}
\end{aligned}$$

donde

$$\chi_{\varphi_{\alpha i_\alpha}}^\beta = \left(K_{\varphi_{\alpha i_\alpha}} + \left(\frac{-2}{(N_\beta - N_{f_\beta})} \right) \frac{\delta_\alpha^\beta}{\varphi_{\beta i_\beta}} \right) \tag{E.15}$$

Entonces, hemos llegado a las expresiones compactas

$$D_T W = \sum_{\beta=0}^n \chi_T^\beta W_\beta \tag{E.16}$$

$$D_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})} W = \sum_{\beta=0}^n \chi_{\varphi_{\alpha i_\alpha}}^\beta W_\beta \tag{E.17}$$

El potencial escalar debido a F-términos es

$$V_F = e^K \left[(K^{-1})_{TT^\dagger} |D_T W|^2 + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i_\alpha=1}^{N_{f_\alpha}} (K^{-1})_{\varphi_{\alpha i_\alpha} \varphi_{\alpha i_\alpha}^\dagger} |D_{\varphi_{\alpha i_\alpha}} W|^2 - 3|W|^2 \right] \quad (\text{E.18})$$

Tenemos que calcular de forma general

$$|D_T W|^2 = \sum_{\gamma=0}^n \sum_{\delta=0}^n \chi_T^\gamma \chi_{T^\dagger}^{\dagger\delta} W_\gamma W_\delta^\dagger \quad (\text{E.19})$$

$$|D_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})} W|^2 = \sum_{\gamma=0}^n \sum_{\delta=0}^n \chi_{\varphi_{\alpha i_\alpha}}^\gamma \chi_{\varphi_{\alpha i_\alpha}^\dagger}^{\dagger\delta} W_\gamma W_\delta^\dagger \quad (\text{E.20})$$

$$|W|^2 = \sum_{\gamma=0}^n \sum_{\delta=0}^n W_\gamma W_\delta^\dagger \quad (\text{E.21})$$

Si pasamos a polares $W_\sigma = |W| e^{i\theta_\sigma}$

$$|D_T W|^2 = \sum_{\gamma=0}^n \sum_{\delta=0}^n \chi_T^\gamma \chi_{T^\dagger}^{\dagger\delta} |W_\gamma| |W_\delta| e^{i(\theta_\gamma - \theta_\delta)} \quad (\text{E.22})$$

$$|D_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})} W|^2 = \sum_{\gamma=0}^n \sum_{\delta=0}^n \chi_{\varphi_{\alpha i_\alpha}}^\gamma \chi_{\varphi_{\alpha i_\alpha}^\dagger}^{\dagger\delta} |W_\gamma| |W_\delta| e^{i(\theta_\gamma - \theta_\delta)} \quad (\text{E.23})$$

$$\begin{aligned} |W|^2 &= \sum_{\gamma=0}^n \sum_{\delta=0}^n |W_\gamma| |W_\delta| e^{i(\theta_\gamma - \theta_\delta)} = \\ &= \sum_{\sigma=0}^n |W_\sigma|^2 + \sum_{\gamma < \delta}^n 2 \cos(\theta_\gamma - \theta_\delta) |W_\gamma| |W_\delta| \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

donde

$$\theta_\alpha = \frac{-2}{N_\alpha - N_{f_\alpha}} \left[2\pi k_{N_\alpha} \tau + \sum_{i_\alpha=1}^{N_{f_\alpha}} \vartheta_{\alpha i_\alpha} \right] \quad (\text{E.25})$$

Estamos haciendo

$$\varphi_{\alpha i_\alpha} = |\varphi_{\alpha i_\alpha}| e^{i\vartheta_{\alpha i_\alpha}} \quad (\text{E.26})$$

$$T = t + i\tau \quad (\text{E.27})$$

Estas expresiones son para el caso más general que podemos tener.
Veamos de forma explícita

$$K_T = \frac{-3}{(T + T^\dagger)} = K_{T^\dagger} \quad (\text{E.28})$$

$$K_{TT^\dagger} = \frac{3}{(T + T^\dagger)^2} \quad (\text{E.29})$$

$$K_{(\varphi_{\alpha i \alpha})} = (\varphi_{\alpha i \alpha})^\dagger \quad ; \quad K_{(\varphi_{\alpha i \alpha}^\dagger)} = (\varphi_{\alpha i \alpha}) \quad (\text{E.30})$$

$$K_{(\varphi_{\alpha i \alpha})(\varphi_{\alpha i \alpha}^\dagger)} = 1 \quad (\text{E.31})$$

Teniendo en cuenta que $k_{N_\alpha} \in \mathbb{R} \rightarrow C_\zeta = C_\zeta^* \rightarrow \chi_T^\sigma = \chi_{T^\dagger}^\sigma$ vemos que

$$\chi_T^\gamma \chi_{T^\dagger}^{\dagger\delta} = \chi_T^\delta \chi_{T^\dagger}^{\dagger\gamma} \quad (\text{E.32})$$

con lo que podemos escribir un coseno en la expresión de $D_T W$ debido a la simetría.

$$|D_T W|^2 = \sum_{\sigma=0}^n (\chi_T^\sigma)^2 |W_\sigma|^2 + \sum_{\gamma < \delta}^n 2 \chi_T^\gamma \chi_T^\delta \cos(\theta_\gamma - \theta_\delta) |W_\gamma| |W_\delta| \quad (\text{E.33})$$

$$\begin{aligned} |D_{(\varphi_{\alpha i \alpha})} W|^2 &= \sum_{\gamma=0}^n \sum_{\delta=0}^n \chi_{\varphi_{\alpha i \alpha}}^\gamma \chi_{\varphi_{\alpha i \alpha}^\dagger}^{\dagger\delta} |W_\gamma| |W_\delta| e^{i(\theta_\gamma - \theta_\delta)} \quad (\text{E.34}) \\ &= \sum_{\sigma=0}^n |\chi_{\varphi_{\alpha i \alpha}}^\sigma|^2 |W_\sigma|^2 + \sum_{\gamma \neq \delta}^n \chi_{\varphi_{\alpha i \alpha}}^\gamma \chi_{\varphi_{\alpha i \alpha}^\dagger}^{\dagger\delta} |W_\gamma| |W_\delta| e^{i(\theta_\gamma - \theta_\delta)} \end{aligned}$$

$$|W|^2 = \sum_{\sigma=0}^n |W_\sigma|^2 + \sum_{\gamma < \delta}^n 2 \cos(\theta_\gamma - \theta_\delta) |W_\gamma| |W_\delta| \quad (\text{E.35})$$

Si utilizamos la forma explícita del Kahler obtenemos

$$|D_T W|^2 = \sum_{\sigma=0}^n (K_T - C^\sigma)^2 |W_\sigma|^2 + \sum_{\gamma < \delta}^n 2 ((K_T - C^\gamma)(K_T - C^\delta)) \cos(\theta_\gamma - \theta_\delta) |W_\gamma| |W_\delta| \quad (\text{E.36})$$

$$\begin{aligned}
|D_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}W|^2 &= \sum_{\sigma=0}^n \left(|K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}|^2 + \frac{4}{(N_\sigma - N_{f_\sigma})^2} \frac{\delta_\alpha^\sigma}{|\varphi_{\sigma i_\sigma}|^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\delta_\alpha^\sigma}{(N_\sigma - N_{f_\sigma})} \left(\frac{K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}}{(\varphi_{\sigma i_\sigma}^\dagger)} + \frac{K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha}^\dagger)}}{(\varphi_{\sigma i_\sigma})} \right) \right) |W_\sigma|^2 + \\
&\quad + \sum_{\gamma \neq \delta}^n \left(|K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}|^2 + \frac{4}{(N_\gamma - N_{f_\gamma})(N_\delta - N_{f_\delta})} \frac{\delta_\alpha^\gamma \delta_\alpha^\delta}{(\varphi_{\gamma i_\gamma})(\varphi_{\delta i_\delta}^\dagger)} - \right. \\
&\quad \left. - 2 \left(\frac{\delta_\alpha^\gamma}{(N_\gamma - N_{f_\gamma})} \frac{K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}}{(\varphi_{\gamma i_\gamma}^\dagger)} + \frac{\delta_\alpha^\delta}{(N_\delta - N_{f_\delta})} \frac{K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha}^\dagger)}}{(\varphi_{\delta i_\delta})} \right) \right) e^{i(\theta_\gamma - \theta_\delta)} |W_\gamma| |W_\delta| = \\
&= |K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}|^2 \sum_{\sigma=0}^n |W_\sigma|^2 + \frac{4}{(N_\alpha - N_{f_\alpha})^2} \frac{1}{|\varphi_{\alpha i_\alpha}|^2} |W_\alpha|^2 - \frac{4}{(N_\alpha - N_{f_\alpha})} |W_\alpha|^2 + \\
&\quad + |K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}|^2 \sum_{\gamma < \delta}^n 2 \cos(\theta_\gamma - \theta_\delta) |W_\gamma| |W_\delta| - \\
&\quad - \frac{2}{(N_\alpha - N_{f_\alpha})} |W_\alpha| \sum_{\sigma \neq \alpha}^n 2 \cos(\theta_\sigma - \theta_\alpha) |W_\sigma| \tag{E.37}
\end{aligned}$$

Entonces ya tenemos todo para construir V_F para nuestro caso general

$$\begin{aligned}
V_F &= e^K \left[(K^{-1})_{TT^\dagger} |D_T W|^2 + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i_\alpha=1}^{N_{f_\alpha}} (K^{-1})_{\varphi_{\alpha i_\alpha} \varphi_{\alpha i_\alpha}^\dagger} |D_{\varphi_{\alpha i_\alpha}} W|^2 - 3|W|^2 \right] = \\
&= e^{\left(-3 \log(2t) + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i_\alpha=1}^{N_{f_\alpha}} |\varphi_{\alpha i_\alpha}|^2 \right)} \left[\left(\frac{4t^2}{3} \right) \left(\sum_{\sigma=0}^n \left(\left(\frac{-3}{2t} \right) - C^\sigma \right)^2 |W_\sigma|^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{\gamma < \delta}^n 2 \left(\left(\left(\frac{-3}{2t} \right) - C^\gamma \right) \left(\left(\frac{-3}{2t} \right) - C^\delta \right) \right) \cos(\theta_\gamma - \theta_\delta) |W_\gamma| |W_\delta| \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i_\alpha=1}^{N_{f_\alpha}} \left(|\varphi_{\alpha i_\alpha}|^2 \sum_{\sigma=0}^n |W_\sigma|^2 + \frac{4}{(N_\alpha - N_{f_\alpha})^2} \frac{1}{|\varphi_{\alpha i_\alpha}|^2} |W_\alpha|^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{4}{(N_\alpha - N_{f_\alpha})} |W_\alpha|^2 + |\varphi_{\alpha i_\alpha}|^2 \sum_{\gamma < \delta}^n 2 \cos(\theta_\gamma - \theta_\delta) |W_\gamma| |W_\delta| - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2}{(N_\alpha - N_{f_\alpha})} |W_\alpha| \sum_{\sigma \neq \alpha}^n 2 \cos(\theta_\sigma - \theta_\alpha) |W_\sigma| \right) \right] - \tag{E.38}
\end{aligned}$$

$$- 3 \left(\sum_{\sigma=0}^n |W_\sigma|^2 + \sum_{\gamma < \delta}^n 2 \cos(\theta_\gamma - \theta_\delta) |W_\gamma| |W_\delta| \right) \Bigg]$$

donde para el caso de *flavours* degenerados en cada grupo gauge

$$W_\alpha|_{\alpha \neq 0} = (N_\alpha - N_{f_\alpha}) \left(\frac{2^{N_{f_\alpha}}}{(\varphi_\alpha^2)^{N_{f_\alpha}}} \right)^{\frac{1}{N_\alpha - N_{f_\alpha}}} e^{-C_\alpha t} e^{i\theta_\alpha} \quad (\text{E.39})$$

$$\theta_\alpha = \frac{-2}{N_\alpha - N_{f_\alpha}} [2\pi k_{N_\alpha} \tau + N_{f_\alpha} \vartheta_\alpha] \quad (\text{E.40})$$

$$C_\alpha = \frac{4\pi k_{N_\alpha}}{N_\alpha - N_{f_\alpha}} \quad (\text{E.41})$$

Estamos haciendo

$$\varphi_\alpha = |\varphi_\alpha| e^{i\vartheta_\alpha} \quad (\text{E.42})$$

$$T = t + i\tau \quad (\text{E.43})$$

Vemos que, para el caso de que cada grupo esté degenerado, el número de fases que tendremos es $\frac{n(n+1)}{2}$.

- Caso $n = 1$ con los *flavours* degenerados

$$A = \frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2}}{8t^3} N_{f_1} |\varphi_1|^2 |W_0|^2 \quad (\text{E.44})$$

$$B = \frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2}}{8t^3} \left(\frac{2^{N_{f_1}}}{|\varphi_1|^{2N_{f_1}}} \right)^{\frac{2}{N_1 - N_{f_1}}} e^{-\frac{8\pi k_{N_1}}{N_1 - N_{f_1}}} \left[\frac{(8\pi k_{N_1} t)^2}{3} + (16\pi k_{N_1} t)(N_1 - N_{f_1}) + \frac{N_{f_1}}{|\varphi_1|^2} (|\varphi_1|^2(N_1 - N_{f_1}) - 2)^2 \right] \quad (\text{E.45})$$

$$C = \frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2}}{8t^3} \left(\frac{2^{N_{f_1}}}{|\varphi_1|^{2N_{f_1}}} \right)^{\frac{1}{N_1 - N_{f_1}}} e^{-\frac{4\pi k_{N_1}}{N_1 - N_{f_1}}} 2 |W_0| [8\pi k_{N_1} t + N_{f_1} |\varphi_1|^2 (N_1 - N_{f_1}) - 2N_{f_1}] \quad (\text{E.46})$$

- Caso $n = 2$ con los *flavours* degenerados

$$A = \frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2 + N_{f_2}|\varphi_2|^2}}{8t^3} (N_{f_1} |\varphi_1|^2 + N_{f_2} |\varphi_2|^2) |W_0|^2 \quad (\text{E.47})$$

$$B = \frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2 + N_{f_2}|\varphi_2|^2}}{8t^3} \left(\frac{2^{N_{f_1}}}{|\varphi_1|^{2N_{f_1}}} \right)^{\frac{2}{N_1 - N_{f_1}}} e^{-\frac{8\pi k_{N_1}}{N_1 - N_{f_1}}} \left[\frac{(8\pi k_{N_1} t)^2}{3} + (16\pi k_{N_1} t)(N_1 - N_{f_1}) + \frac{N_{f_1}}{|\varphi_1|^2} (|\varphi_1|^2(N_1 - N_{f_1}) - 2)^2 + (N_1 - N_{f_1})^2 N_{f_2} |\varphi_2|^2 \right] \quad (\text{E.48})$$

$$C = \frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2 + N_{f_2}|\varphi_2|^2}}{8t^3} \left(\frac{2^{N_{f_2}}}{|\varphi_2|^{2N_{f_2}}} \right)^{\frac{2}{N_2 - N_{f_2}}} e^{-\frac{8\pi k_{N_2}}{N_2 - N_{f_2}}} \left[\frac{(8\pi k_{N_2} t)^2}{3} + (16\pi k_{N_2} t)(N_2 - N_{f_2}) + \frac{N_{f_2}}{|\varphi_2|^2} (|\varphi_2|^2(N_2 - N_{f_2}) - 2)^2 + (N_2 - N_{f_2})^2 N_{f_1} |\varphi_1|^2 \right] \quad (\text{E.49})$$

$$D = \frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2 + N_{f_2}|\varphi_2|^2}}{8t^3} \left(\frac{2^{N_{f_1}}}{|\varphi_1|^{2N_{f_1}}} \right)^{\frac{1}{N_1 - N_{f_1}}} e^{-\frac{4\pi k_{N_1}}{N_1 - N_{f_1}}} 2 |W_0| [(8\pi k_{N_1} t) + (N_1 - N_{f_1})(N_{f_1} |\varphi_1|^2 + N_{f_2} |\varphi_2|^2) - 2N_{f_1}] \quad (\text{E.50})$$

$$\begin{aligned}
F &= \frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2 + N_{f_2}|\varphi_2|^2}}{8t^3} \left(\frac{2^{N_{f_2}}}{|\varphi_2|^{2N_{f_2}}} \right)^{\frac{1}{N_2 - N_{f_2}}} e^{-\frac{4\pi k_{N_2}}{N_2 - N_{f_2}}} 2 |W_0| [(8\pi k_{N_2} t) + \\
&+ (N_2 - N_{f_2})(N_{f_1}|\varphi_1|^2 + N_{f_2}|\varphi_2|^2) - 2N_{f_2}] \quad (E.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2 + N_{f_2}|\varphi_2|^2}}{8t^3} \left(\frac{2^{N_{f_1}}}{|\varphi_1|^{2N_{f_1}}} \right)^{\frac{1}{N_1 - N_{f_1}}} e^{-\frac{4\pi k_{N_1}}{N_1 - N_{f_1}}} \left(\frac{2^{N_{f_2}}}{|\varphi_2|^{2N_{f_2}}} \right)^{\frac{1}{N_2 - N_{f_2}}} e^{-\frac{4\pi k_{N_2}}{N_2 - N_{f_2}}} 2 \cdot \\
&\cdot [(8\pi k_{N_1} t)(N_2 - N_{f_2}) + (8\pi k_{N_2} t)(N_1 - N_{f_1}) + \\
&+ (N_1 - N_{f_1})(N_2 - N_{f_2})(N_{f_1}|\varphi_1|^2 + N_{f_2}|\varphi_2|^2) - \\
&- 2N_{f_1}(N_2 - N_{f_2}) - 2N_{f_2}(N_1 - N_{f_1}) + \frac{(8\pi t)^2 k_{N_1} k_{N_2}}{3}] \quad (E.52)
\end{aligned}$$

Entonces, para estos dos casos que son los que nos interesan

- Caso $n = 1$

$$V_F = (A + B) + C \cos(\theta_0 - \theta_1) \quad (E.53)$$

- Caso $n = 2$

$$V_F = (A + B + C) + D \cos(\theta_0 - \theta_1) + F \cos(\theta_0 - \theta_2) + G \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (E.54)$$

E.2. D-términos para el caso $\mathcal{G} = [\prod_{\alpha=1}^n SU(N_\alpha)] \times U_X(1)$

Vamos a suponer que cada campo de materia transformándose en la fundamental de $SU(N_\alpha)$ es singlete de $SU(N_\beta)|_{\beta \neq \alpha}$ y que el *modulus* T no se transforma bajo ninguno de los $SU(N_\alpha) \forall \alpha$.

Además, como los grupos gauge están en la fase confinante (I.R), vimos que $\langle \phi_{\alpha i_\alpha} \rangle = \langle \bar{\phi}_{\alpha i_\alpha} \rangle$, lo que hace que, al transformarse en las representaciones fundamental y antifundamental (respectivamente), no se generen D-términos para los $SU(N_\alpha)$.

Todo queda pues a calcular los D-términos que genere el $U_X(1)$ anómalo de la teoría, bajo el cual, todos los campos (incluido el *modulus* T) están cargados

$$D = D_X = -i \left[\sum_{\alpha=1}^n \sum_{i_\alpha=1}^{N_{f_\alpha}} K_{(\phi_{\alpha i_\alpha})} \eta_{(\phi_{\alpha i_\alpha})}^X + K_T \eta_T^X \right] \quad (E.55)$$

Ahora bien, como el $U_X(1)$ no transforma $\varphi_{\alpha i_\alpha}$ y $\bar{\varphi}_{\alpha i_\alpha}$ con cargas opuestas, habrá que tener en cuenta que el Kahler a tener en cuenta **NO** es

$$K = -3\text{Log}(T + T^\dagger) + 2(\phi^\dagger)^{\alpha i_\alpha} (\phi)_{\alpha i_\alpha} \quad (\text{E.56})$$

sino

$$K = -3\text{Log}(T + T^\dagger) + (\phi^\dagger)^{\alpha i_\alpha} (\phi)_{\alpha i_\alpha} + (\bar{\phi}^\dagger)^{\alpha i_\alpha} (\bar{\phi})_{\alpha i_\alpha} \quad (\text{E.57})$$

Definiremos la transformación de los campos bajo el $U_X(1)$ como

$$\eta_{(\phi_{\alpha i_\alpha})}^X = iq_{(\alpha i_\alpha)} \phi_{(\alpha i_\alpha)} \quad (\text{E.58})$$

$$\eta_{(\bar{\phi}_{\alpha i_\alpha})}^X = i\bar{q}_{(\alpha i_\alpha)} \bar{\phi}_{(\alpha i_\alpha)} \quad (\text{E.59})$$

$$\eta_T^X = i \frac{\delta_{GS}}{2} \quad (\text{E.60})$$

Los D-términos que tenemos son

$$D_{(\phi_{\alpha i_\alpha})} = -iK_{(\phi_{\alpha i_\alpha})} \eta_{(\phi_{\alpha i_\alpha})}^X = q_{(\alpha i_\alpha)} |\phi_{(\alpha i_\alpha)}|^2 \quad (\text{E.61})$$

$$D_{(\bar{\phi}_{\alpha i_\alpha})} = -iK_{(\bar{\phi}_{\alpha i_\alpha})} \eta_{(\bar{\phi}_{\alpha i_\alpha})}^X = \bar{q}_{(\alpha i_\alpha)} |\bar{\phi}_{(\alpha i_\alpha)}|^2 \quad (\text{E.62})$$

$$D_T = -iK_T \eta_T^X = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{-3\delta_{GS}}{2t}\right) \quad (\text{E.63})$$

Entonces

$$V_D = \frac{1}{2} \frac{1}{\text{Re}\{f_x\}} D^2 = \frac{\pi}{k_x t} \left[\sum_{\alpha=1}^n \sum_{i_\alpha=1}^{N_{f_\alpha}} q_{(\alpha i_\alpha)} |\phi_{(\alpha i_\alpha)}|^2 + \bar{q}_{(\alpha i_\alpha)} |\bar{\phi}_{(\alpha i_\alpha)}|^2 - \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3\delta_{GS}}{2t}\right) \right]^2 \quad (\text{E.64})$$

y como $\langle \phi_{\alpha i_\alpha} \rangle = \langle \bar{\phi}_{\alpha i_\alpha} \rangle$,

$$V_D = \frac{\pi}{k_x t} \left[\sum_{\alpha=1}^n \sum_{i_\alpha=1}^{N_{f_\alpha}} (q_{(\alpha i_\alpha)} + \bar{q}_{(\alpha i_\alpha)}) |\phi_{(\alpha i_\alpha)}|^2 - \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3\delta_{GS}}{2t}\right) \right]^2 \quad (\text{E.65})$$

Haciendo de nuevo el cambio de variable (normalización) que hicimos en el cálculo de los F-términos $\phi \implies \frac{\varphi}{\sqrt{2}}$, obtenemos la expresión definitiva de

los D-términos como expresión de los mismos campos que teníamos en los F-términos

$$V_D = \frac{\pi}{4k_x t} \left[\sum_{\alpha=1}^n \sum_{i_\alpha=1}^{N_{f_\alpha}} (q_{(\alpha i_\alpha)} + \bar{q}_{(\alpha i_\alpha)}) |\varphi_{(\alpha i_\alpha)}|^2 - \left(\frac{3\delta_{GS}}{2t} \right) \right]^2 \quad (\text{E.66})$$

Referencias

- [1] A. H. Guth, “The Inflationary Universe: A Possible Solution To The Horizon And Flatness Problems,” *Phys. Rev. D* **23** (1981) 347.
- [2] A. D. Linde, “A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems,” *Phys. Lett. B* **108** (1982) 389.
- [3] A. D. Linde, “Chaotic Inflation,” *Phys. Lett. B* **129** (1983) 177.
- [4] A. Vilenkin, “Topological inflation,” *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 3137 [arXiv:hep-th/9402085].
- [5] A. D. Linde, “Monopoles as big as a universe,” *Phys. Lett. B* **327** (1994) 208 [arXiv:astro-ph/9402031].
- [6] A. D. Linde and D. A. Linde, “Topological defects as seeds for eternal inflation,” *Phys. Rev. D* **50** (1994) 2456 [arXiv:hep-th/9402115].
- [7] S. R. Coleman and F. De Luccia, “Gravitational Effects On And Of Vacuum Decay,” *Phys. Rev. D* **21** (1980) 3305.
- [8] Sidney Coleman, “Aspects of Symmetry”, Cambridge University Press 1985.
- [9] M. Cvetič, S. Griffies and S. J. Rey, “Static domain walls in N=1 supergravity,” *Nucl. Phys. B* **381** (1992) 301 [arXiv:hep-th/9201007].
- [10] B. Chibisov and M. A. Shifman, “BPS-saturated walls in supersymmetric theories,” *Phys. Rev. D* **56** (1997) 7990 [Erratum-ibid. *D* **58** (1998) 109901] [arXiv:hep-th/9706141].
- [11] A. Font and S. Theisen, “Introduction To String Compactification,” *Lect. Notes Phys.* **668** (2005) 101.
- [12] M. R. Douglas and S. Kachru, “Flux compactification,” arXiv:hep-th/0610102.
- [13] J. P. Conlon, “Moduli stabilisation and applications in IIB string theory,” arXiv:hep-th/0611039.
- [14] S. Gukov, C. Vafa and E. Witten, “CFT’s from Calabi-Yau four-folds,” *Nucl. Phys. B* **584** (2000) 69 [Erratum-ibid. *B* **608** (2001) 477] [arXiv:hep-th/9906070].

- [15] S. B. Giddings, S. Kachru and J. Polchinski, “Hierarchies from fluxes in string compactifications,” *Phys. Rev. D* **66** (2002) 106006 [arXiv:hep-th/0105097].
- [16] S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde and S. P. Trivedi, “De Sitter vacua in string theory,” *Phys. Rev. D* **68**, 046005 (2003) [arXiv:hep-th/0301240].
- [17] C. P. Burgess, R. Kallosh and F. Quevedo, “de Sitter string vacua from supersymmetric D-terms,” *JHEP* **0310** (2003) 056 [arXiv:hep-th/0309187].
- [18] A. Achucarro, B. de Carlos, J. A. Casas and L. Doplicher, “de Sitter vacua from uplifting D-terms in effective supergravities from realistic strings” *JHEP* **0606**, 014 (2006) [arXiv:hep-th/0601190].
- [19] D. Krefl and D. Lust, “On supersymmetric Minkowski vacua in IIB orientifolds,” *JHEP* **0606** (2006) 023 [arXiv:hep-th/0603166].
- [20] K. Choi, A. Falkowski, H. P. Nilles and M. Olechowski, “Soft supersymmetry breaking in KKLT flux compactification,” *Nucl. Phys. B* **718** (2005) 113 [arXiv:hep-th/0503216].
- [21] K. Choi and K. S. Jeong, “Supersymmetry breaking and *moduli* stabilization with anomalous U(1) gauge symmetry,” *JHEP* **0608** (2006) 007 [arXiv:hep-th/0605108].
- [22] M. Haack, D. Krefl, D. Lust, A. Van Proeyen and M. Zagermann, “Gaugino condensates and D-terms from D7-branes,” *JHEP* **0701** (2007) 078 [arXiv:hep-th/0609211].
- [23] C. P. Burgess, J. M. Cline, H. Stoica and F. Quevedo, “Inflation in realistic D-brane models,” *JHEP* **0409** (2004) 033 [arXiv:hep-th/0403119].
- [24] G. R. Dvali and S. H. H. Tye, “Brane inflation,” *Phys. Lett. B* **450** (1999) 72 [arXiv:hep-ph/9812483].
- [25] J. J. Blanco-Pillado *et al.*, “Racetrack inflation,” *JHEP* **0411** (2004) 063 [arXiv:hep-th/0406230].
- [26] J. J. Blanco-Pillado *et al.*, “Inflating in a better racetrack,” *JHEP* **0609** (2006) 002 [arXiv:hep-th/0603129].
- [27] B. de Carlos, J. A. Casas, A. Guarino, J. M. Moreno and O. Seto, “Inflation in uplifted Supergravities,” arXiv:hep-th/0702103.

- [28] E. J. Copeland, A. R. Liddle, D. H. Lyth, E. D. Stewart and D. Wands, “False vacuum inflation with Einstein gravity,” *Phys. Rev. D* **49**, 6410 (1994) [arXiv:astro-ph/9401011].
- [29] D.N. Spergel *et al.*, “Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: Implications for cosmology,” arXiv:astro-ph/0603449.
- [30] D. Bailin and A. Love, “Supersymmetric Gauge Field Theory And String Theory”, Institute of Physics Publishing, 1996.
- [31] R. Bohm, H. Gunther, C. Herrmann and J. Louis, “Compactification of type IIB string theory on Calabi-Yau threefolds,” *Nucl. Phys. B* **569** (2000) 229 [arXiv:hep-th/9908007].
- [32] T. W. Grimm and J. Louis, “The effective action of $N = 1$ Calabi-Yau orientifolds,” *Nucl. Phys. B* **699** (2004) 387 [arXiv:hep-th/0403067].
- [33] N. Seiberg, “The power of duality: Exact results in 4D SUSY field theory,” *Int. J. Mod. Phys. A* **16** (2001) 4365 [arXiv:hep-th/9506077].
- [34] P. Binetruy, G. Dvali, R. Kallosh and A. Van Proeyen, “Fayet-Iliopoulos terms in supergravity and cosmology,” *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 3137 [arXiv:hep-th/0402046].
- [35] K. A. Intriligator and N. Seiberg, “Phases of $N = 1$ supersymmetric gauge theories and electric-magnetic triality,” arXiv:hep-th/9506084.
- [36] N. Sakai, H. A. Shinkai, T. Tachizawa and K. i. Maeda, “Dynamics Of Topological Defects And Inflation,” *Phys. Rev. D* **53** (1996) 655 [Erratum-ibid. *D* **54** (1996) 2981] [arXiv:gr-qc/9506068].
- [37] N. Sakai, “Generality of topological inflation,” *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 281 [arXiv:gr-qc/0307092].