

Física Estadística – Hoja de Problemas 3

Problema 1

A partir de la función

$$\Omega(E, x_\alpha) \equiv \text{Número de micro-estados con energía entre } E \text{ y } E + \delta E \quad (1)$$

$$\text{y parámetros externos } x_\alpha \quad (2)$$

deducir las relaciones de Maxwell

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} \quad , \quad \frac{\bar{P}}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} \quad , \quad \frac{\bar{\mu}}{T} = \frac{\partial S}{\partial N} \quad , \quad (3)$$

para un sistema con parámetros externos $x_\alpha = (V, N)$.

Problema 2

Considérese un gas A que interacciona con un *dispositivo mecánico* (sin grados de libertad) A' compuesto de un pistón unido a un muelle con constante k cuya energía potencial elástica E' es función de un parámetro externo de desplazamiento x , *i.e.* $E' = E'(x) = \frac{1}{2} k x^2$.

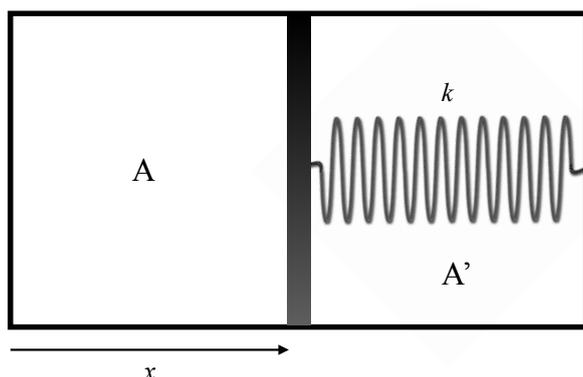


Figure 1: Esquema del dispositivo mecánico: sistemas A y A' .

Muéstrese que, en el equilibrio, la fuerza media por unidad de área del pistón (presión \bar{P}) ejercida por el gas debe ser igual a la fuerza ejercida por el muelle (ley de Hooke).

Problema 3

Sea un sistema compuesto por N átomos magnéticos con espín $s = \frac{1}{2}$, del cual sabemos que tiene un comportamiento ferromagnético. Esto es:

- $T \rightarrow 0$: todos los espines están alineados
- $T \rightarrow \infty$: los espines están orientados aleatoriamente con igual probabilidad de estar en cualquiera de sus dos micro-estados $|\uparrow\rangle$ o $|\downarrow\rangle$.

Calcular ΔS cuando el sistema evoluciona de $T \rightarrow 0$ a $T \rightarrow \infty$. ¿Depende el resultado de los detalles del proceso?

Problema 4

Sea un sistema estadístico compuesto de $N \gg 1$ partículas independientes y distinguibles. Cada una de estas partículas tiene únicamente dos niveles de energía: $E_0 = 0$ y $E_1 = \varepsilon > 0$. Utilizando la Termodinámica Estadística:

- i) Determinar la entropía $S(m, N)$ donde m es el número de partículas con energía ε .
- ii) Determinar la expresión de la energía total del sistema $E(T)$ en función de la temperatura T .
- iii) Discutir razonadamente los límites $T \rightarrow 0$ y $T \rightarrow \infty$.

Nota: Fórmula de Stirling: $\ln N! \approx N \ln N - N$ para $N \gg 1$.

Problema 5

Sea un sistema compuesto de $N \gg 1$ osciladores armónicos unidimensionales clásicos. El Hamiltoniano del sistema viene dado por

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x_i^2 \right], \quad (4)$$

donde (p_i, x_i) denotan el momento y la posición del oscilador i -ésimo, m es la masa de los osciladores y ω es la frecuencia de oscilación (la misma para todos).

Estudiando el sistema dentro del marco de la Termodinámica Estadística:

- i) Calcular el número de microestados $\Omega(E)$ en función de la energía E del sistema.

Nota: En el límite $N \rightarrow \infty$, las integrales restringidas a una corteza esférica (de anchura infinitesimal δE) en el espacio de fases $2N$ -dimensional, se pueden aproximar por integrales en el volumen de la esfera sólida (bola) $2N$ -dimensional contenida. Esto es:

$$\int_{E \leq H \leq E + \delta E} dx_1 \cdots dx_N dp_1 \cdots dp_N \approx \int_{0 \leq H \leq E} dx_1 \cdots dx_N dp_1 \cdots dp_N. \quad (5)$$

El error cometido al hacer esta aproximación decrece como $\frac{1}{N}$.

Nota: El volumen de una esfera sólida (bola) $2N$ -dimensional de radio R viene dado por la fórmula $V_{2N}(R) = \frac{\pi^N}{N!} R^{2N}$.

- ii) Calcular la entropía de Boltzmann del sistema y la expresión de la energía en función de la temperatura $E(T)$.

Nota: Fórmula de Stirling: $\ln N! \approx N \ln N - N$ para $N \gg 1$.

- iii) Comparar el resultado obtenido para $E(T)$ en el apartado anterior con el que se obtiene al tomar el límite clásico del resultado para N osciladores armónicos unidimensionales cuánticos

$$E(T) = N \hbar \omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \right). \quad (6)$$

Nota: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Problema 6

Un sistema aislado está formado por dos cajas cúbicas de lado L que están en contacto por una de sus caras.

- i) En el instante inicial la caja I contiene dos partículas distinguibles con $E_{\text{tot}}^{\text{I}} = 12E_0$ mientras que la caja II contiene una partícula con $E_{\text{tot}}^{\text{II}} = 9E_0$, donde $E_0 \equiv \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$ y siendo m la misma masa para las tres partículas. Calcular el número de microestados del sistema si la pared que separa las dos cajas es adiabática, fija e impermeable.
- ii) Calcular el número de microestados del sistema si se retira la pared que separa las dos cajas.

Nota: En física cuántica, el problema de una partícula en una caja de lados L_x , L_y y L_z tiene soluciones etiquetadas por tres enteros $n_x > 0$, $n_y > 0$ y $n_z > 0$. El valor de la energía para estas soluciones viene dado por $E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right)$.