2. Funciones especiales

I. Las funciones gamma y beta

* La función $\Gamma(\alpha)$: Es una función que extiende la idea de factorial a valores $\alpha \notin \mathbb{N}$. Se define como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad , \quad \alpha > 0$$

NOTA: $x = y^2 \Rightarrow \Gamma(\alpha) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2\alpha-1} dy \equiv\!> $ Integral Gaussiana

con lo cual

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1 .$$

Integrando por partes

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha} dx = \underbrace{\left[-e^{-x}x^{\alpha}\right]_0^\infty}_{0} + \alpha\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

$$= \alpha\,\Gamma(\alpha) \equiv\!> 0 < \alpha < 1 \text{ es el rango independiente.}$$

El factorial se recupera para $\alpha = n \in \mathbb{N}$ con lo que

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n(n-1)\,\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\cdots 3\times 2\times 1\;\Gamma(1)$$

$$= n!$$

Fórmula útil : $\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$

[reflexión de Euler] $\Rightarrow$ Si $\alpha = \frac{1}{2}$: $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi \csc(\frac{\pi}{2}) = \pi$

$$\Rightarrow \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Para valores $\alpha < 0$ la función $\Gamma(\alpha)$ está definida por medio de la relación de recurrencia $\alpha\,\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$

Ex: Muestra que $\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$

$-\frac{3}{2}\Gamma(-\frac{3}{2}) = \Gamma(-\frac{1}{2})$ y $-\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$\Rightarrow \Gamma(-\frac{3}{2}) = -\frac{2}{3}\Gamma(-\frac{1}{2}) = +\frac{2}{3}\,2\sqrt{\pi} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$.

Ejercicio : Muéstrese que una solución de la ecuación diferencial

$$2x(x-1)\,y'' + (4x-1)\,y' - 24\,y = 0$$

es la serie

$$y_1(x) = \overset{\text{cte}}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\frac{9}{2})\,\Gamma(n-\frac{5}{2})}{\Gamma(n+\frac{3}{2})\,\Gamma(n+1)}\, x^{n+\frac{1}{2}}$$

Muéstrese que la segunda solución es

$$y_2(x) = \underset{\text{cte}}{B}\,(1 - 24x + 80x^2 - 64x^3)$$

Remarca : No satisface ninguna ec. dif. con coeficientes racionales

Fórmulas útiles:

i) Duplicación : $\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2\alpha}\sqrt{\pi}\;\Gamma(2\alpha)$

ii) Multiplicación : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(\alpha+\frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}\; n^{\frac{1}{2}-n\alpha}\;\Gamma(n\alpha)$

iii) $\displaystyle\lim_{n\to 0^+} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)\; n^{\alpha}} = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

iv) $\displaystyle\lim_{n\to 0^+} \frac{\Gamma(n-\alpha)\,\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n-\beta)\,\Gamma(n+\beta)} = 1 \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

v) $\displaystyle\frac{d^n}{d\alpha^n}\,\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, (\mathrm{Ln}\, x)^n\; x\; dx \qquad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

Otras definiciones :

1) Gauss : $\displaystyle\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\; n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}$

2) Euler : $\displaystyle\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}}{1+\frac{\alpha}{n}}$

3) Wierstrass : $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\, e^{\gamma\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) e^{-\frac{\alpha}{n}}\right]$

[Euler - Mascheroni] $\displaystyle\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \mathrm{Ln}(n)\right] \simeq 0.5772156649\ldots$

* La función $B(p,q)$: La función beta se define como

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1}\, dt \quad , \quad p>0,\ q>0$$

Haciendo el cambio de variable $t = \dfrac{\sigma}{1+\sigma}$ se encuentra

$$B(p,q) = \int_0^\infty \sigma^{p-1} (1+\sigma)^{-(p+q)}\, d\sigma$$

la cual es una definición útil para expresar $B(p,q)$ en función de $\Gamma(p)$ y $\Gamma(q)$

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Demostración : Comencemos por la definición de $\Gamma(\alpha)$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx = a^\alpha \int_0^\infty e^{-at} t^{\alpha-1}\, dt$$

$x = at \ (a>0)$

$$\Longrightarrow \frac{\Gamma(p+q)}{(1+\sigma)^{p+q}} = \int_0^\infty e^{-(1+\sigma)t}\, t^{p+q-1}\, dt$$

$\alpha = p+q$
$a = 1+\sigma$

Multiplicando por σ^{p-1} e integrando respecto a σ entre 0 e ∞ se obtiene

$$\Gamma(p+q)\int_0^\infty \sigma^{p-1}(1+\sigma)^{-(p+q)}\,d\sigma = \int_0^\infty \sigma^{p-1}d\sigma \int_0^\infty e^{-(1+\sigma)t}\, t^{p+q-1}\,dt$$

Cambiando el orden de integración en la integral doble

$$\Gamma(p+q)\,B(p,q) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{p+q-1}dt \int_0^\infty e^{-t\sigma}\sigma^{p-1}\,d\sigma$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}\, t^{p+q-1}\,\frac{\Gamma(p)}{t^p}\,dt = \Gamma(p)\int_0^\infty e^{-t}t^{q-1}dt$$

ver nota

$$= \Gamma(p)\,\Gamma(q).$$

NOTA: $\frac{\Gamma(\alpha)}{a^\alpha} = \int_0^\infty e^{-at}\, t^{\alpha-1}\,dt$

La función $B(p,q)$ aparece como resultado de una integral de funciones trigonométricas.

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\,\cos^{2q-1}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$t=\sin^2\theta$

$dt = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

Función $B(p,q)$ y fórmula de Stirling: El punto de partida es

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\left(\frac{n+1}{2}\right)-1}(x)\,\sin^{2\left(\frac{1}{2}\right)-1}(x)\,dx = \frac{1}{2}\,B\left[\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\overbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}^{\sqrt{\pi}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

II. La función hipergeométrica ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$

Esta función especial se obtiene a partir de una solución en serie de potencias de la ecuación diferencial

$$\overbrace{x(1-x)}^{P(x)}\,y'' + \overbrace{[\gamma-(1+\alpha+\beta)x]}^{Q(x)}\,y' \overbrace{-\alpha\beta}^{R(x)}\,y = 0$$

con $\alpha,\beta,\gamma = \text{cte}$. Esta función ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ es la "navaja suiza" de las funciones especiales. Muchas de las ecuaciones diferenciales que aparecen en problemas físicos pueden, por un cambio de variable o por un límite, transformarse en ecuaciones de este tipo.

La ec. dif. hipergeométrica tiene puntos singulares regulares en $P(x) = x(1-x) = 0 \implies x=0$ y $x=1$.

* Punto singular regular $x=0$: Aplicando el método de Frobenius con

$$y(x) = x^{\rho}\left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\right]$$

se obtiene la ecuación indicial

$$\rho(\rho-1)+\gamma\rho = \rho\left[\rho-(1-\gamma)\right] = 0 \quad \begin{cases} \rho = 0 \\ \rho = 1-\gamma \end{cases}$$

y la relación de recurrencia

$$\left[(\rho+n+1)(\rho+n)+\gamma(\rho+n+1)\right]a_{n+1} - \left[(\rho+n)(\rho+n-1)+(1+\alpha+\beta)(\rho+n)+\alpha\beta\right]a_n = 0$$

con lo cual

$$a_{n+1} = \frac{(\rho+n+\alpha)(\rho+n+\beta)}{(\rho+n+1)\ (\rho+n+\gamma)}\ a_n$$

i) Caso $\rho=0$: En este caso se encuentra que

$$a_{n+1} = \frac{(n+\alpha)\ (n+\beta)}{(n+1)\ \ (n+\gamma)}\ a_n \qquad (i)$$

de donde

$$a_0 = \text{arbitrario}, \quad a_1 = \frac{\alpha\ \beta}{\gamma}, \quad a_2 = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\gamma+1)}\ a_1 = \frac{\alpha(\alpha+1)\ \beta(\beta+1)}{2!\ \gamma\ (\gamma+1)}\ a_0$$

$$, \ldots$$

La solución con $\rho=0$ viene dada por

$$y_1(x) = A\left[1 + \frac{\alpha\beta}{1!\ \gamma}\ x + \frac{\alpha(\alpha+1)\ \beta(\beta+1)}{2!\ \gamma\ (\gamma+1)}\ x^2 + \ldots\right]$$

la cual se denota ${}_2F_1(\alpha, \beta\ ;\gamma\ ; x)$

NOTA : ${}_2F_1$ → # de constantes en los denominadores (γ)

→ # de constantes en los numeradores (α, β)

ii) Caso $\rho = 1-\gamma$: En este caso se encuentra que

$$a_{n+1} = \frac{(n+\alpha-\gamma+1)\ (n+\beta-\gamma+1)}{(n+2-\gamma)(n+1)}\ a_n \qquad (ii)$$

La relación de recurrencia (ii) es equivalente a (i) si se reemplaza en (i)

$$\alpha \to \alpha-\gamma+1 \quad , \quad \beta \to \beta-\gamma+1 \quad , \quad \gamma \to 2-\gamma$$

por lo tanto

$$y_2(x) = B\ x^{1-\gamma}\ {}_2F_1\ (\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\gamma; x)$$

La solución general se construye a partir de estas dos soluciones independientes y viene dada por

$$y(x) = A\ {}_2F_1\ (\alpha,\beta;\gamma;x) + B\ x^{1-\gamma}\ {}_2F_1\ (\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\gamma; x)$$

NOTA: El método anterior para obtener $y(x)$ falla si $(1-\gamma)=0$ ó $(1-\gamma) = K \in \mathbb{Z}$ en cuyo caso habría que encontrar la segunda solución por otros métodos.

* Punto singular regular $x=1$: Aplicando un cambio de variable $x=1-t$ la ec. dif original queda de la forma

$$t(1-t)y'' + \left[\underbrace{\alpha+\beta-\gamma+1}_{\gamma} - (\alpha+\beta+1)t\right] y' - \alpha\beta\ y = 0$$

la cual es idéntica a la original si se sustituye

(original) $\gamma \to \alpha+\beta-\gamma+1$ (nueva en variable t)

Recordando que $t = 1-x$ y utilizando la solución original se tiene que

$$y(x) = A \; {}_2F_1(\alpha,\beta;\alpha+\beta-\gamma+1;1-x) + B(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \, {}_2F_1(\gamma-\beta,\gamma-\alpha;\gamma-\alpha-\beta+1;1-x)$$

* Propiedades de la función hipergeométrica ${}_2F_1$: Empezaremos introduciendo el símbolo de Pochhammer

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \quad , \quad (\alpha)_0 \equiv 1$$

tal que
$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! \; (\gamma)_n} x^n$$

NOTA: Si $\alpha = -K$ (con $K \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow (\alpha)_n$ se trunca $\Rightarrow {}_2F_1 =$ polinomio

Convergencia: La serie converge absolutamente para

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} \, x}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(\alpha+n)\,(\beta+n)}{(n+1)\,(\gamma+n)} x \right| = |x| < 1$$

Propiedades elementales : De la propia definición en serie de potencias tenemos que

- ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;0) = 1$

- ${}_2F_1(\beta,\alpha;\gamma,x) = {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$

- $\dfrac{d}{dx}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(n-1)!\,(\gamma)_n} x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+1}\,(\beta)_{m+1}}{m!\,(\gamma)_{m+1}} x^m$

$$= \frac{\alpha\beta}{\gamma} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_m \quad (\beta+1)_m}{m! \quad (\gamma+1)_m} x^m = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \, {}_2F_1(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; x)$$

<u>NOTE:</u> $(\alpha)_{n+1} = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)(\alpha+n)$

$$= \alpha \left[(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots \underbrace{(\alpha+n)}_{\alpha+1+n-1}\right] = \alpha \, (\alpha+1)_n$$

<u>Ex:</u> Sea la ecuación diferencial $y'' + n^2 y = 0$ tal que $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Haciendo $t = \sin^2 x$ dedúzcase que $\cos nx = {}_2F_1(\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n; \frac{1}{2}; \sin^2 x)$ con $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

$$y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = 2 \sin x \cos x \, \dot{y}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \dot{y} + 4 \sin^2 x \cos^2 x \, \ddot{y}$$

$$= 2(1 - 2\sin^2 x) \dot{y} + 4 \sin^2 x \, (1 - \sin^2 x) \ddot{y}$$

$$= 2 \, (1 - 2t) \dot{y} + 4t(1-t) \ddot{y}$$

En consecuencia se tiene que

$$y'' + n^2 y = 0 \implies t(1-t)\ddot{y} + (\tfrac{1}{2} - t)\dot{y} + \frac{n^2}{4} y = 0$$

que es la ec. hipergeométrica con $\alpha = \frac{n}{2}$, $\beta = -\frac{n}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

Su solución es válida para $-1 < t < 1$ y toma la forma

$$y = A\ {}_2F_1\left(\tfrac{n}{2}, -\tfrac{n}{2}; \tfrac{1}{2}; \sin^2 x\right) + B \sin x\ {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}(1+n), \tfrac{1}{2}(1-n); \tfrac{3}{2}; \sin^2 x\right)$$

Los coeficientes se determinan por las condiciones de contorno:

$$\underbrace{y(0) = 1}_{y(0)=A}, \quad \underbrace{y'(0) = 0}_{y'(0)=B} \quad \Rightarrow \quad A = 1,\ B = 0$$

$$\Rightarrow y = {}_2F_1\left(\tfrac{n}{2}, -\tfrac{n}{2}; \tfrac{1}{2}; \sin^2 x\right)$$

con $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Ejemplos de funciones elementales: Algunos ejemplos son

- $(1-x)^n = {}_2F_1(-n, \beta; \beta; x)$
- $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = {}_2F_1(1, 1; 2; -x)$
- $\dfrac{\csc(x)}{x} = {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}; x^2\right)$
- $\dfrac{\cot g(x)}{x} = {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}, 1; \tfrac{3}{2}; -x^2\right)$

Integrales elípticas completas: Se expresan en términos de ${}_2F_1$

- $K(k) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(1-k^2\sin^2\phi)^{1/2}} = \frac{\pi}{2}\ {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; k^2\right)$
- $E(k) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-k^2\sin^2\phi)^{1/2}\, d\phi = \frac{\pi}{2}\ {}_2F_1\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; k^2\right)$

con $k^2 < 1$.

Fórmula de recurrencia: Fórmula de recurrencia de Gauss

$$(\alpha-\beta)\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \alpha\ {}_2F_1(\alpha+1,\beta;\gamma;x) - \beta\ {}_2F_1(\alpha,\beta+1;\gamma;x)$$

Representación integral: Asumiendo $\gamma>\beta>0$ se tiene que

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}\,dt$$

Ex: Demuéstrese que si $\gamma>\beta>0$ se tiene que

$$(1-x)^{-\alpha}\ {}_2F_1\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{x}{x-1}\right) = {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$$

Utilizando la representación integral con $t=1-u$ se tiene

ver nota

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 (1-u)^{\beta-1}u^{\gamma-\beta-1}(1-x)^{-\alpha}\left[1-\left(\frac{x}{x-1}\right)u\right]^{-\alpha}du$$

$$= \frac{(1-x)^{-\alpha}\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\underbrace{\int_0^1 u^{\gamma-\beta-1}(1-u)^{\beta-1}\left[1-\left(\frac{x}{x-1}\right)u\right]^{-\alpha}du}_{\frac{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}\,{}_2F_1\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{x}{x-1}\right)}$$

$$= \frac{(1-x)^{-\alpha}\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} \; {}_2F_1\left(\alpha, \gamma-\beta; \gamma; \frac{x}{x-1}\right)$$

$$= (1-x)^{-\alpha} \; {}_2F_1\left(\alpha, \gamma-\beta; \gamma; \frac{x}{x-1}\right)$$

NOTA: $1-(1-u)x = (1-x)\left[1-\left(\frac{x}{x-1}\right)u\right]$

III. La función hipergeométrica confluyente ${}_1F_1(\alpha;\gamma;x)$

Esta función especial se obtiene a partir de una solución en serie de potencias de la ecuación diferencial

$$\underbrace{x}_{P(x)}\, y'' + \underbrace{(\gamma - x)}_{Q(x)}\, y' \underbrace{-\alpha}_{R(x)}\, y = 0 \qquad (i)$$

con $\alpha, \gamma = \text{cte}$. Esta ecuación diferencial tiene un punto singular regular en $P(x) = x = 0$.

Tomando una solución en serie de potencias tipo Frobenius se encuentra una ecuación indicial y unas relaciones de recurrencia de la forma

$$\underbrace{\rho(\rho+\gamma-1) = 0} \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = \frac{\rho+\alpha+n}{(\rho+\gamma+n)(\rho+1+n)}\, a_n$$

$\rho = 0$

$\rho = 1-\gamma$

Si $\gamma \notin \mathbb{Z}$ se tiene la solución general de la forma

$$y(x) = A\, y_1(x) + B\, y_2(x)$$

$$= A\ {}_1F_1(\alpha;\gamma;x) + B\, x^{1-\gamma}\ {}_1F_1(\alpha+1-\gamma;2-\gamma;x)$$

donde ${}_1F_1(\alpha;\gamma;x)$ denota la serie de potencias

$${}_1F_1(\alpha;\gamma;x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}\frac{x^n}{n!}$$

Relación con ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$: Cambiando de variable $x = \frac{\tilde{x}}{\beta}$, la función ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;\frac{\tilde{x}}{\beta})$ es una solución de la ecuación hipergeométrica en la nueva variable $\tilde{x}$ $[\,\dot{y} = \frac{dy}{d\tilde{x}}$, etc.$]$

$$\tilde{x}\left(1-\frac{\tilde{x}}{\beta}\right)\ddot{y} + \left[\gamma - (\alpha+\beta+1)\frac{\tilde{x}}{\beta}\right]\dot{y} - \alpha y = 0 \qquad (ii)$$

Tomando el límite $\beta \to \infty$ el punto singular regular $\tilde{x} = \beta \to \infty$ y la ecuación (ii) se reduce a (i). Tenemos pues que

$${}_1F_1(\alpha;\gamma;x) = \lim_{\beta\to\infty}\left[{}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma;\frac{x}{\beta}\right)\right]$$

Representación integral : Asumiendo $\gamma > \alpha > 0$ se tiene que

$${}_1F_1(\alpha;\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}e^{xt}\,dt$$

IV. Polinomios de Legendre

Son solución a la ecuación diferencial de Legendre

$$(1-x^2)\,y'' - 2x\,y' + \nu(\nu+1)\,y = 0$$

donde $\nu = \text{cte} > 0$.

* Caso $\nu = n \in \mathbb{N}$: En este caso los polinomios de Legendre se obtienen mediante la fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \underbrace{\frac{1}{2^n\, n!}}\, D^n\left[(x^2-1)^n\right]$$

donde $D^n \equiv \dfrac{d^n}{dx^n}$. Normalización : $P_n(1) = 1 \quad \forall n$

- Fórmula de Rodrigues (demostración) : Definamos la función prueba

$$y_1 = (x^2-1)^n \implies Dy_1 = 2nx\,(x^2-1)^{n-1}$$

por lo que $(x^2-1)\,Dy_1 - 2nx\,y_1 = 0$

NOTA : Teorema de Leibnitz : $D^n[f(x)\,g(x)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{(n-k)} f(x)\, D^k g(x)$

Derivando $(n+1)$ veces

$$(1-x^2)\,D^{n+2}y_1 - 2x\,D^{n+1}y_1 + n(n+1)\,D^n y_1 = 0$$

con lo cual $D^n y_1$ es solución de la ec. de Legendre con $\nu = n$.

Se tiene entonces que

$$P_0(x) = 1 \quad , \quad P_1(x) = x \quad , \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x) \quad , \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

. . . . . .

* Caso $\nu \notin \mathbb{N}$: En este caso se aplica el cambio de variable $t = \frac{1}{2}(1-x)$ dando lugar a una ec. dif. de la forma

$$\left.\begin{array}{l} t=0 \Rightarrow x=1 \\ t=1 \Rightarrow x=-1 \end{array}\right\} \quad t(1-t)\,y'' + (1-2t)\,y' + \nu(\nu+1)\,y = 0$$

la cual es de la forma hipergeométrica con $\alpha = \nu+1$, $\beta = -\nu$, $\gamma = 1$.

La solución en torno a $t=0$ $(x=1)$ es

$$P_\nu(x) = {}_2F_1\Big(\nu+1, -\nu; 1; \underbrace{\tfrac{1}{2}(1-x)}_{\text{converge: } |t|<1}\Big) \Rightarrow \text{Func. Legendre de 1ª clase de orden } \nu$$

teniendo un rango de validez de $-1 < x < 3$.

• Existe una extensión válida para $|x|>1$ dada por

$$P_\nu(x) = \frac{\Gamma(2\nu+1)}{2^\nu\,\Gamma^2(\nu+1)}\, x^\nu \; {}_2F_1\left(-\tfrac{1}{2}\nu, \tfrac{1}{2}(1-\nu); \tfrac{1}{2}-\nu; \tfrac{1}{x^2}\right)$$

Una segunda solución válida para $|x|>1$ viene dada por

$$Q_\nu(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\nu+1)}{2^{\nu+1}\,\Gamma(\nu+\frac{3}{2})}\, x^{-(1+\nu)} \; {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}(1+\nu), 1+\tfrac{1}{2}\nu; \tfrac{3}{2}+\nu; \tfrac{1}{x^2}\right)$$

$\Rightarrow$ Func. Legendre 2ª clase de orden ν

Por lo tanto

$$y = A\,P_\nu(x) + B\,Q_\nu(x) \quad , \quad |x|>1 .$$

Propiedades de los polinomios de Legendre. Algunas propiedades útiles de los polinomios de Legendre son las siguientes:

- Fórmula de Murphy: $P_n(x) = {}_2F_1(n+1, -n; 1; \frac{1}{2}(1-x))$

- Fórmulas de recurrencia: [Las mismas aplican a $Q_n(x)$]

$$(n+1)\, P_{n+1}(x) - (2n+1)\, x\, P_n(x) + n\, P_{n-1}(x) = 0$$

$$x\, P_n'(x) - P_{n-1}'(x) - n\, P_n(x) = 0$$

$$P_{n+1}'(x) - (2n+1)\, P_n(x) - P_{n-1}'(x) = 0$$

$$(x^2-1)\, P_n'(x) - n\, x\, P_n(x) + n\, P_{n-1}(x) = 0$$

- Función generatriz de $P_n(x)$:

$$g(x,t) = \underbrace{(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{Función generatriz}} = (1-t(2x-t))^{-1/2}$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} t\,(2x-t) + \tfrac{3}{8} t^2 (2x-t)^2 + \dots$$

$$= 1 + tx + \tfrac{1}{2} t^2 (3x^2-1) + \dots$$

$$= P_0(x) + t\, P_1(x) + t^2 P_2(x) + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n\, P_n(x).$$

NOTE:

$$(1-\lambda)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{3}{8}\lambda^2 + \dots$$

- Integrales definidas: Con frecuencia se necesita calcular integrales de la forma

$$I(n) = \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx$$

que pueden evaluarse utilizando la fórmula de Rodrigues

$$I(n) = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} dx\, f(x)\, D^n\left[(x^2-1)^n\right] \overset{\text{Integ por partes}}{=} \underbrace{\frac{1}{2^n n!}\left[f(x)\, D^{n-1}\left[(x^2-1)^n\right]\right]_{-1}^{1}}$$

$$- \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f'(x)\, D^{n-1}\left[(x^2-1)^n\right] dx$$

0 porque al tomar D^{n-1} siempre sobrevive un factor (x^2-1) que se anula en $x=\pm 1$

Iterando este proceso n veces se obtiene

$$I(n) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n f^{(n)}(x)\, dx$$

NOTA: $(-1)^n (x^2-1)^n = (1-x^2)^n$

- Ortogonalidad de los polinomios de Legendre: Utilizando el resultado anterior y tomando $f(x) = P_m(x)$ con $m<n$ resulta

$$f^{(n)}(x) = D^n P_m(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

Por otro lado, tomando $f(x) = P_n(x)$ resulta

$$f^{(n)}(x) = D^n\left[\frac{1}{2^n n!} D^n\left[(x^2-1)^n\right]\right] = \frac{1}{2^n n!} D^{2n}\left[(x^2-1)^n\right] = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

NOTE: $D^4\left[(x^2-1)^2\right] = D^3\left[2(x^2-1)2x\right] = D^2\left[4(x^2-1) + 4x\, 2x\right]$
$= D\left[8x + 16x\right] = 24 = 4!$

con lo cual resulta

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\,dx = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!\,n!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx$$

$x = 2t-1$

$dx = 2dt$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!\,n!}\int_{0}^{1}(2t)^n\,(2-2t)^n\,2\,dt$$

$$= \frac{2\,(2n)!}{n!\,n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt = \frac{2\,(2n)!}{n!\,n!}\,\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)}$$

$$= \frac{2}{2n+1} = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^{-1}$$

NOTA: $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \dfrac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p>0,\ q>0)$

De aquí se ve que los polinomios de Legendre normalizados como

$$F_n(x) \equiv \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(x)$$

satisfacen:

$$\int_{-1}^{1} F_n(x)\,F_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n\neq m \\ 1 & \text{si } n = m\end{cases}$$

- Desarrollos en términos de polinomios de Legendre: Las propiedades de ortogonalidad y normalización de los polinomios de Legendre hace que se puedan utilizar como base para expandir funciones reales en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$

$$f(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \ldots + a_n P_n(x)$$

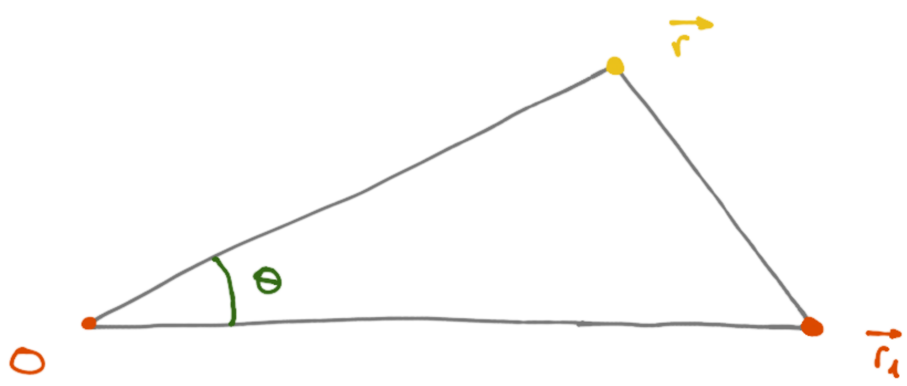
Los coeficientes se extraen de la relación

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx = a_n \int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = a_n \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow a_n = \left(n+\tfrac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx$$

Comentario : Esto es análogo a los desarrollos en serie de Fourier para las funciones periódicas.

• Aplicación de los polinomios de Legendre : Los polinomios de Legendre aparecen de manera natural en gravitación cuando se calcula el potencial gravitatorio.



El potencial de Newton generado por una masa $m=1$ situada en $\vec{r}_1$ viene dado por

$$V(r) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} = |\vec{r}_1 - \vec{r}|^{-1} = \left(|\vec{r}_1|^2 - 2|\vec{r}_1||\vec{r}|\cos\theta + |\vec{r}|^2\right)^{-1/2}$$

$$= |\vec{r}_1|^{-1} \underbrace{\left[1 - 2\overbrace{\cos\theta}^{x} \underbrace{\frac{|\vec{r}|}{|\vec{r}_1|}}_{t} + \underbrace{\frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{r}_1|^2}}_{t^2}\right]^{-1/2}}_{\text{Función generatriz}}$$

$$= \frac{1}{|\vec{r}_1|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|\vec{r}|}{|\vec{r}_1|}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

V. Polinomios asociados de Legendre

Son solución a la ecuación diferencial asociada de Legendre

$$(1-x^2)\, y'' - 2x\, y' + \left[n(n+1) - \underbrace{\frac{m^2}{1-x^2}}_{}\right] y = 0$$

Ecuación de Legendre para $m=0$.

Nos centraremos en el caso $n, m \in \mathbb{Z}$.

- Conexión con los polinomios de Legendre: Definamos la función prueba

$$y = (x^2-1)^{\frac{m}{2}}\, u$$

con la cual

$$Dy = (x^2-1)^{\frac{m}{2}}\, Du + m\, x\, (x^2-1)^{\frac{m}{2}-1}\, u$$

$$D^2y = (x^2-1)^{\frac{m}{2}}\, D^2u + 2\, m\, x\, (x^2-1)^{\frac{m}{2}-1}\, Du$$
$$+ \left[m\, (x^2-1)^{\frac{m}{2}-1} + m\,(m-2)\,x^2\,(x^2-1)^{\frac{m}{2}-2} \right] u$$

Sustituyendo en la ec. inicial y multiplicando por $(x^2-1)^{-\frac{m}{2}}$ resulta

$$(1-x^2)\, D^2u - 2\,(1+m)\, x\, Du + (n-m)\,(n+m+1)\, u = 0 \qquad (i)$$

Sea ahora una función $v(x)$ la cual satisface la ecuación ordinaria de Legendre

$$(1-x^2)\, D^2 v - 2x\, Dv + n\,(n+1)\, v = 0$$

y tomemos m derivadas de esta ecuación

$$(1-x^2)\, D^{m+2} v - 2x\, D^{m+1} v + n\,(n+1)\, D^m v$$
$$- 2\, m\, x\, D^{m+1} v - m\,(m-1)\, D^m v - 2m\, D^m v = 0$$

de donde

$$(1-x^2)\, D^{m+2} v - 2\,(1+m)\, x\, D^{m+1} v + (n-m)\,(n+m+1)\, D^m v = 0 \qquad (ii)$$

Comparando (i) con (ii) se concluye que

$$u = D^m \sigma \quad \Rightarrow \quad y = (x^2-1)^{\frac{m}{2}} D^m \sigma$$

es solución de la ecuación asociada de Legendre si $\sigma(x)$ es solución de la ecuación ordinaria de Legendre.

Se tiene pues que [$m \leq n$, si no $P_n^m = 0$]

- $P_n^m(x) = (x^2-1)^{\frac{m}{2}} D^m P_n(x) \Rightarrow$ 1ª clase
- $Q_n^m(x) = (x^2-1)^{\frac{m}{2}} D^m Q_n(x) \Rightarrow$ 2ª clase

* Armónicos esféricos: Son un tipo de función especial que aparece al resolver la ec. de Laplace en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0$$

La solución a esta ecuación es

$$f(r,\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \overbrace{c_{\ell,m}}^{\text{cte}}\, r^\ell \underbrace{Y_\ell^m(\theta,\varphi)}_{\text{Armónicos esféricos}}$$

donde

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\; \underbrace{e^{im\varphi}}_{\text{complex}}\, P_\ell^m(\cos\theta) \qquad \left.\begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array}\right\} S^2$$

son una base completa de funciones en la esfera S^2 de radio unidad.

- Propiedades de $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$:

* $\overline{Y_\ell^m} = (-1)^m\, Y_\ell^{-m}$ $\Rightarrow$ Conjugación

* $Y_\ell^m(\pi-\theta, \varphi+\pi) = (-1)^\ell\, Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ $\Rightarrow$ Simetría

* $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \left[\sin\theta\, \overline{Y_k^n}\, Y_\ell^m \right] = \delta_{k\ell}\, \delta^{nm}$ $\Rightarrow$ base ortonormal de funciones en S^2

* $\displaystyle\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \ell(\ell+1)\, Y = 0$

$\Rightarrow$ Ec. diferencial

* Propiedades de los polinomios asociados de Legendre

i) Forma explícita :

$P_0^0 = 1$, $P_1^0 = x$, $P_1^1 = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $P_2^0 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_2^1 = -3x\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $P_2^2 = x\,(1-x^2)$, ...

(ii) Ortogonalidad en $[-1,1]$

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_k^m(x)\, P_\ell^m(x)\, dx = \frac{2\,(\ell+m)!}{(2\ell+1)\,(\ell-m)!}\, \delta_{k\ell}$

- $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x^2} P_\ell^n(x)\, P_\ell^m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{(\ell+m)!}{m\,(\ell-m)!}\, \delta^{nm} & \text{si } m \neq 0, n \neq 0 \\ \infty & \text{si } m = n = 0 \end{cases}$$

iii) Relaciones de recurrencia

- $$(\ell+m+1)\, P_{\ell+1}^m(x) = (2\ell+1)\, x\, P_\ell^m(x) - (\ell+m)\, P_{\ell-1}^m(x)$$

- $$2\, m\, x\, P_\ell^m(x) = -\sqrt{1-x^2}\left[P_\ell^{m+1}(x) + (\ell+m)(\ell-m+1)\, P_\ell^{m-1}(x) \right]$$

VI. Funciones de Bessel

Son solución a la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

donde $\nu =$ cte. La ecuación de Bessel tiene un punto singular regular en $x = 0$.

* Punto singular regular $x = 0$: Aplicando el método de Frobenius con

$$y(x) = x^\rho \left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \right]$$

se obtiene la ecuación indicial

$$\rho(\rho-1)+\rho-\nu^2=0 \implies \rho^2-\nu^2=0 \quad \begin{cases}\rho=\nu\\ \rho=-\nu\end{cases}$$

y la relación de recurrencia

$$\Big[\underbrace{(\rho+n+2)(\rho+n+1)+(\rho+n+2)}_{(\rho+n+2)(\rho+n+2)}-\nu^2\Big]a_{n+2}+a_n=0$$

con lo cual

$$a_{n+2}=-\frac{a_n}{(\rho+n+2+\nu)(\rho+n+2-\nu)}$$

Igualando a cero el coeficiente de $x^{\rho+1}$ se encuentra

$\nu\neq\pm\frac{1}{2}$ ≈> estudio por separado

$$\underbrace{\Big[(\rho+1)\rho+\rho+1-\nu^2\Big]}\,a_1=0 \implies a_1=0$$

$$\implies a_3=a_5=\cdots=0$$

$\rho=\nu$: $\nu(\nu+1)+\nu+1-\nu^2 \Rightarrow (1+2\nu)\,a_1$

$\rho=-\nu$: $\nu(\nu-1)-\nu+1-\nu^2 \Rightarrow (1-2\nu)\,a_1$

i) Caso $\rho=\nu$: En este caso se encuentra que

$$a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+2)\underbrace{(n+2+2\nu)}_{n+2(1+\nu)}} \qquad \text{(i)}$$

de donde

$$a_0 = \text{arbitrario} \ , \quad a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)} \ , \quad a_4 = \frac{-a_2}{2^2 2(\nu+2)} = \frac{a_0}{2^4 2(\nu+1)(\nu+2)}$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{2^2 3(\nu+3)} = \frac{-a_0}{2^6 3!(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} \ , \quad \ldots$$

La solución con $\rho = \nu$ viene dada por

$$y_1(x) = A x^\nu \left[1 - \frac{x^2}{2^2 1!(\nu+1)} + \frac{x^4}{2^4 2!(\nu+1)(\nu+2)} - \ldots \right]$$

Tomando $A = \left[2^\nu \Gamma(\nu+1)\right]^{-1}$ encontramos la función de Bessel de primera clase de orden ν

$$J_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left[1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!(\nu+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!(\nu+1)(\nu+2)} - \ldots \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}$$

ii) Caso $\rho = -\nu$: En este caso se encuentra que

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)\underbrace{(n+2-2\nu)}_{n+2(1-\nu)}} \qquad (ii)$$

La relación de recurrencia (ii) es inequivalente a (i) si $\nu \notin \mathbb{Z}$. En este caso la segunda raíz conduce a una solución independiente

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2n}}{n!\, \Gamma(-\nu+n+1)}$$

La solución general se construye a partir de estas dos soluciones independientes y viene dada por

$$y(x) = A\, J_\nu(x) + B\, J_{-\nu}(x) \qquad , \qquad A, B = cte$$

* Casos especiales :

a) $\nu \in \mathbb{N}$: En este caso (ii) no tiene sentido para $n+2(1-\nu) = 0 \Rightarrow n = 2(\nu-1) \Rightarrow$ 2ª solución por otro método

b) $\nu = 0$: En este caso $\rho_1 = \rho_2 = 0 \Rightarrow$ 2ª solución por otro método

* Funciones de Bessel esféricas :

Teorema: $J_\nu(x)$ puede expresarse en forma finita por medio de funciones algebraicas y trigonométricas de x siempre que $\nu = \pm \frac{2K+1}{2}$ con $K \in \mathbb{N}$:

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin x$$

$$J_{3/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

$$J_{-\frac{5}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{3 \sin x}{x} + \left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \cos x \right]$$

* Funciones de Bessel con $\nu = 0$: La primera solución está dada por

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\, n!}$$

"Bessel 1ª clase orden cero"

$$= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

La segunda solución ha de calcularse por otro método. Asumamos una solución del tipo

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right] J_0(x) - V_0(x)$$

siendo $\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.5772$ la constante de Euler y

$$V_0(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \underbrace{b_r}_{\text{coeficientes a determinar}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}$$

A partir de $Y_0(x)$ resuelta

$$Y_0'(x) = \frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right] J_0'(x) + \frac{2}{\pi x} J_0(x) - V_0'(x)$$

$$Y_0''(x) = \frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right] J_0''(x) + \frac{4}{\pi x} J_0'(x) - \frac{2}{\pi x^2} J_0(x) - V_0''(x)$$

y sustituyendo en la ec. dif. original se obtiene

$$\frac{2}{\pi}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right)\overbrace{\left[J_0''(x) + \frac{1}{x} J_0'(x) + J_0(x)\right]}^{\text{ec. Bessel orden cero} \Rightarrow 0} + \frac{4}{\pi x} J_0'(x)$$

$$- \left[V_0''(x) + \frac{1}{x} V_0'(x) + V_0(x)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad V_0''(x) + \frac{1}{x} V_0'(x) + V_0(x) = \frac{4}{\pi x} J_0'(x)$$

Usando $J_0(x)$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-2}}{r!\,(r-1)!} \qquad (iii)$$

que es una ec. de Bessel de orden cero inhomogénea. Utilizando la expansión de $V_0(x)$

$$V_0(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} b_r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}$$

$$\frac{1}{x} V_0'(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2} r\, b_r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-2}$$

$$V_0''(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} r\left(r-\frac{1}{2}\right) b_r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-2}$$

Por lo tanto

$$V_0''(x) + \frac{1}{x} V_0'(x) + V_0(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} (r^2 b_r + b_{r-1}) \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-2}$$

Sustituyendo en (iii) se obtiene la relación

$$r^2 b_r + b_{r-1} = \frac{(-1)^r}{r!\,(r-1)!} \quad , \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

Los coeficientes b's quedan de la forma

$$b_1 + b_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad b_1 = -(1 + b_0)$$

$$4 b_2 + b_1 = \frac{1}{2!} \quad \Rightarrow \quad b_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2!} + (1 + b_0)\right)$$

$$9 b_3 + b_2 = -\frac{1}{3!\,2!} \quad \Rightarrow \quad b_3 = \frac{1}{9}\left[-\frac{1}{3!\,2!} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2!} + (1 + b_0)\right)\right]$$

$$16 b_4 + b_3 = \frac{1}{4!\,3!} \quad \Rightarrow \quad \dots$$

$$\dots\dots\dots$$

Tomando $b_0 = 0$ [contribución proporcional a $J_0(x)$] se obtiene

$$b_1 = -1 \;,\quad b_2 = \frac{1}{(2!)^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \;,\quad b_3 = -\frac{1}{(3!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \;, \dots$$

y en general

$$b_r = \frac{(-1)^r}{(r!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r}\right)$$

con lo cual

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}_{x>0} + \gamma\right) J_0(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r!\,r!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\frac{1}{r}\right)$$

"Bessel 2ª clase orden cero"

La solución general viene dada por

$$y(x) = A\,J_0(x) + B\,Y_0(x)$$

* Funciones de Bessel con $\nu \in \mathbb{N}$: La primera solución está dada por

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!}$$

"Bessel 1ª clase orden n"

La segunda solución se puede obtener de una manera similar al caso $\nu=0$ visto anteriormente. El resultado es

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right) J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)$$

"Bessel 2ª clase orden n"

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}}{r!\,(n+r)!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{r}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n+r}\right)$$

La solución general viene dada por

$$y(x) = A\,J_n(x) + B\,Y_n(x)$$

* Tratamiento general de las funciones de Bessel

Hemos visto dos situaciones diferentes :

i) $y = A\, J_\nu(x) + B\, J_{-\nu}(x)$: $\nu \neq 0$, $\nu \notin \mathbb{N}$

ii) $y = A\, J_\nu(x) + B\, Y_\nu(x)$: $\nu = 0$, $\nu \in \mathbb{N}$

En el caso i) podemos definir la segunda solución como

Func. Neumann

$$N_\nu(x) = Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

[linealmente independiente de $J_\nu(x)$]

lo cual se puede probar que es consistente con $Y_\nu(x)$ en el caso ii)

$$N_n(x) = Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad , \; n \in \mathbb{N}$$

De esta manera se tiene que

$$y(x) = A\, J_\nu(x) + B\, Y_\nu(x) \quad , \quad \nu \in \mathbb{R}$$

Propiedades de las funciones de Bessel. Algunas propiedades útiles de las funciones de Bessel son :

- Fórmulas de recurrencia :

  - $$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

  - $$J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) = -2\, J_\nu'(x)$$

$$J_0'(x) = -J_1(x)$$

- $$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)\right) = x^{\nu+1} J_\nu(x)$$

- $$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

- $$\int_0^r x^{\nu+1} J_\nu(x)\, dx = r^{\nu+1} J_{\nu+1}(r)$$

- $$\int_0^r x\, J_0(x)\, dx = r\, J_1(r)$$

NOTE: Las mismas relaciones se cumplen para $Y_\nu(x)$.

- Función generatriz de $J_{\pm n}(x)$:

$$g(x,t) = e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

- Paridad: $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$
- $x \gg 1$: $J_n(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$
- Raíces: Infinitas raíces (o ceros) α_n en $(0,\infty)$ [Numéricamente]
- Integral de Bessel:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(n\theta - x\sin\theta\right) d\theta \quad , \quad n = 0,1,2,\dots$$

- Relación de cierre: $$\int_0^\infty J_\nu(xy)\, J_\nu(x_0 y)\, y\, dy = \frac{1}{x}\,\delta(x-x_0) \quad , \nu > -\frac{1}{2}$$

- Función hipergeométrica confluyente límite ${}_0F_1$:

$$J_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\, {}_0F_1\left(\,;\nu+1; -\frac{x^2}{4}\right)$$

VII. Funciones de Bessel modificadas

Son solución a la ecuación diferencial de Bessel modificada

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(-1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

signo − con respecto al + de Bessel

la cual se obtiene de la ec. de Bessel original cambiando $x \to ix$. Siguiendo el mismo método que antes se obtiene la primera solución

$$I_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2r}}{r!\,\Gamma(\nu+r+1)} = (i)^{-\nu} J_\nu(ix)$$

"Bessel modificada de 1ª clase"

La segunda solución se obtiene de manera similar al caso de Bessel ordinario y resulta

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \csc(\nu\pi) \left(I_{-\nu}(x) - I_\nu(x) \right).$$

"Bessel modificada de 2ª clase"

Se puede ver que

$$K_0(x) = -\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right) I_0(x) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r!\,r!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r}\right)$$

$$K_n(x) = (-1)^{n+1} \left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right) I_n(x) + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n}}{n!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$n = 1, 2, \dots$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(-1)^r (n-r-1)!}{r!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n}$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}}{r!\,(n+r)!} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{r} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+r}\right)$$

La solución modificada de Bessel general viene dada por

$$y(x) = A\; I_\nu(x) + B\; K_\nu(x)$$

- Relaciones de recurrencia :

$$I_0'(x) = I_1(x)$$

$$I_{\nu+1}(x) - I_{\nu-1}(x) = -\frac{2\nu}{x} I_\nu(x)$$

- Raíces : No tienen ceros para valores reales de x

VIII. Funciones de Hankel

Forman una base complexificada de soluciones de Bessel y se definen como

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i\; Y_\nu(x)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i\; Y_\nu(x)$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = A\; H_\nu^{(1)}(x) + B\; H_\nu^{(2)}(x)$$

Las funciones de Hankel son a las de Bessel lo mismo que $e^{\pm i\nu x}$ es a las funciones trigonométricas

$$e^{\pm i\nu x} = \cos(\nu x) \pm i \sin(\nu x)$$

IX. Funciones de Airy

Empezando con la ecuación de Bessel ordinaria de orden ν y haciendo un cambio de variable

$$x = \underbrace{\beta}_{\text{cte}} t^{\overset{\text{cte}}{\gamma}} \quad \Rightarrow \quad t \frac{d}{dt}\left(t \frac{dy}{dt}\right) + (\beta^2\gamma^2 t^{2\gamma} - \nu^2\gamma^2) y = 0$$

Haciendo ahora una redefinición de la función

$$y = t^{\alpha} u \quad \Rightarrow \quad t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + (2\alpha+1) t \frac{du}{dt} + (\beta^2\gamma^2 t^{2\gamma} + \alpha^2 - \nu^2\gamma^2) u = 0$$

Fijando $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{2}{3} i$, $\gamma = \frac{3}{2}$, $\nu = \frac{1}{3}$ obtenemos

$$\frac{d^2u}{dt^2} - t u = 0 \qquad \text{"Ecuación de Airy"}$$

y como $\nu \notin \mathbb{Z}$ y $\beta \in$ imaginario tenemos

$$u(t) = t^{\frac{1}{2}} \left[A \, I_{\frac{1}{3}} \left(\tfrac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right) + B \, I_{-\frac{1}{3}} \left(\tfrac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right) \right]$$

X. Polinomios de Jacobi

Los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ son solución de la ecuación diferencial

$$(1-x^2) y'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2) x] y' + n(n+\alpha+\beta+1) y = 0 \qquad (i)$$

con $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta > -1$ (reales) y $x \in [-1,1]$.

Son una generalización de los polinomios de Legendre

$$\underbrace{P_n(x)}_{\text{Legendre}} = \underbrace{P_n^{(0,0)}(x)}_{\text{Jacobi } (\alpha,\beta)=(0,0)}$$

La ecuación diferencial (i) es de tipo hipergeométrica con

$$\alpha \to -n \quad , \quad \beta \to n+\alpha+\beta+1 \quad , \quad \gamma \to \alpha+1 \quad , \quad x \to \tfrac{1}{2}(1-x)$$

de tal manera que

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \; {}_2F_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1, \tfrac{1}{2}(1-x)\right)$$

- Grado : Como $\alpha = -n$ el polinomio $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ es de grado n.

- Fórmula de Rodrigues generalizada : $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ se puede obtener a partir de

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} D^n\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]$$

- Propiedades de ortogonalidad : Se puede demostrar que

$$\mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^{\frac{\alpha}{2}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

satisface

$$\int_{-1}^{1} \mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, \mathcal{P}_m^{(\alpha,\beta)}(x)\, dx = 0 \qquad \text{si} \quad n \neq m$$

• Definición alternativa : Algunos autores definen los polinomios de Jacobi como

$$\mathcal{F}_n(\alpha,\beta,x) = {}_2F_1(-n, \alpha+n; \beta; x)$$

siendo $\beta>0$ y $\alpha>\beta-1$. Se tiene entonces la relación

$$(\beta)_n \, \mathcal{F}_n(\alpha,\beta,x) = n! \, P_n^{(\beta-1,\alpha-\beta)}(1-2x)$$

donde $\mathcal{F}_n(\alpha,\beta,x)$ satisface

$$x(1-x)y'' + [\beta-(1+\alpha)x]y' + n(\alpha+n)y = 0$$

XI. Polinomios de Gegenbauer

Son un caso particular de los polinomios de Jacobi y se definen como

$$C_n^{\lambda}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda+\frac{1}{2})_n} P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})}(x) \qquad (\lambda\neq 0)$$

(i)

$$C_n^{0}(x) = \frac{2(n-1)!}{(\frac{1}{2})_n} P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x) \qquad (\lambda=0)$$

y se expresan en términos de la función hipergeométrica ${}_2F_1$ con $\alpha=\beta=\lambda-\frac{1}{2}$ en (i) como

$$C_n^{\lambda}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{n!} \, {}_2F_1\left(-n, n+2\lambda; \lambda+\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}(1-x)\right)$$

satisfaciendo la ecuación diferencial

$$(1-x^2)\, y'' - (2\lambda+1)\, x\, y' + n(n+2\lambda)\, y = 0$$

Se reducen a los polinomios de Legendre si $\lambda = \frac{1}{2}$.

XII. Polinomios de Tchebichef

Son un subconjunto importante de los polinomios de Gegenbauer

- $T_n(x) = \frac{1}{2}\, n\, C_n^{0}(x) = {}_2F_1\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1-x)\right)$
- $U_n(x) = C_n^{1}(x) = (n+1)\, {}_2F_1\left(-n, n+2; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}(1-x)\right)$

y satisfacen la ecuación diferencial

- $T_n(x)$: $(1-x^2)\, y'' - x\, y' + n^2 y = 0$
- $U_n(x)$: $(1-x^2)\, y'' - 3x\, y' + n(n+2)\, y = 0$

Tanto $T_n(x)$ como $U_n(x)$ son polinomios de grado n.

NOTA: Aplicaciones en aerodinámica y análisis numérico.

El polinomio $T_n(x)$ aparece con mucha frecuencia en aplicaciones física y algunas de sus propiedades más notables son:

- Función generatriz: $g(x,t) = \dfrac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\, t^n$

- Fórmula de Rodrigues : $T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2}\, D^n \left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right]$

- Relaciones de recurrencia : $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x\, T_n(x)$

- Paridad :

$$T_n(-x) = (-1)^n\, T_n(x) \quad , \quad \begin{array}{l} T_n(1) = 1 \quad , \quad T_n(-1) = (-1)^n \\ T_{2n}(0) - (-1)^n \, , \; T_{2n+1}(0) = 0 \end{array}$$

- Raíces y extremos :

Raíces de $T_n(x)$: $\cos\left[\frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2}\right]$ con $k = 1, 2, \dots, n$

Extremos de $T_n(x)$: $\cos\left[\frac{2k}{n} \frac{\pi}{2}\right]$ con $k = 1, 2, \dots, n$

- Ortogonalidad : Rango $[-1, 1]$ con peso $\omega(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\langle T_n(x), T_m(x) \rangle = \int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} \pi\, \delta_{nm} & (n=0) \\ \frac{\pi}{2}\, \delta_{nm} & (n \neq 0) \end{cases}$$

XIII. Polinomios de Laguerre

Se definen en Matemáticas aplicadas como

$$L_n(x) = n!\; {}_1F_1(-n; 1; x)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$ y son polinomios de grado n.

Satisfacen la ecuación diferencial

$$x\,y'' + (1-x)\,y' + n y = 0$$

- Fórmula de Rodrigues : $L_n(x) = e^{x} D^{n}\left[x^{n} e^{-x}\right]$

- Función generatriz : $g(x,t) = \frac{1}{1-t}\, e^{-\frac{t}{1-t}x} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\,\frac{t^n}{n!}$

- Relaciones de recurrencia :

$$L_{n+1}(x) + n^2 L_{n-1}(x) = (2n+1-x)\,L_n(x)$$

$$L'_n(x) = n\left(L'_{n-1}(x) - L_{n-1}(x)\right)$$

- Paridad : $L_n(-x) = (-1)^n L_n(x)$

- Expresión en serie de potencias : $L_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!\,k!\,k!}\, x^k$

- Ortogonalidad : Rango $[0,\infty)$ con peso $\omega(x) = e^{-x}$

$$\left\langle L_n(x), L_m(x)\right\rangle = \int_0^{\infty} L_n(x)\, L_m(x)\, e^{-x}\, dx = (n!)^2\, \delta_{nm}$$

XIV. Polinomios asociados de Laguerre

Son una generalización de los polinomios de Laguerre de la forma

$$L_n^{m}(x) = \frac{(-1)^m (n!)^2}{m!\,(n-m)!}\; {}_1F_1\big(\underbrace{-n+m}_{\text{Polinomio de grado } n-m};\, m+1;\, x\big)$$

donde $n, m = 0, 1, 2, \ldots$ y con $n \geq m$. Satisfacen la ecuación diferencial

$$x\, y'' + (m+1-x)\, y' + (n-m)\, y = 0 \qquad (i)$$

Se reducen a los polinomios de Laguerre si $m=0$.

- Fórmula de Rodrigues: $L_n^m(x) = D^m L_n(x) = D^m\left[e^x D^n (x^n e^{-x})\right]$

- Aplicación en Física: Funciones de onda del átomo de hidrógeno. La parte radial $R(r)$ de la función de onda satisface

depende de e, m_e, m_p

$$R'' + \frac{2}{r} R' - \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{\nu}{r} + \frac{1}{4} \right) R = 0$$

Esta ecuación se reduce a (i) redefiniendo

$$m = 2\ell + 1 \,, \quad n = \nu + \ell \,, \quad y = e^{\frac{r}{2}}\, r^{-\ell} R$$

con lo cual

$$R(r) = e^{-\frac{r}{2}}\, r^{\ell}\, L_{\nu+\ell}^{2\ell+1}(r)$$

xv. Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite se definen por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n\left[e^{-x^2}\right] \qquad \text{[Fórmula de Rodrigues]}$$

con $n = 0, 1, 2, \ldots$ Son polinomios de grado n que solucionan

La ecuación diferencial

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

- Función generatriz : $g(x,t) = e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$

- Relaciones de recurrencia :

$$H_{n+1}(x) + 2n\, H_{n-1}(x) = 2x\, H_n(x)$$

$$H_n'(x) = 2n\, H_{n-1}(x)$$

$$H_{n+1}(x) = 2x\, H_n(x) - H_n'(x)$$

- Paridad : $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$

$$H_{2n-1}(0) = 0 \quad , \quad H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$$

- Expresión alternativa : $H_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{n!}{k!\,(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$

- Ortogonalidad : Rango $(-\infty,\infty)$ con peso $\omega(x) = e^{-x^2}$

$$\langle H_n(x), H_m(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)\, H_m(x)\, e^{-x^2} dx = n!\, 2^n \sqrt{\pi}\, \delta_{nm}$$

- Relación con ${}_1F_1$: $H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}\, {}_1F_1(-n; \tfrac{1}{2}; x^2)$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!}\, 2x\, {}_1F_1(-n; \tfrac{3}{2}; x^2)$$

- Aplicación a la Física: Redefiniendo la función $y(x)$ como

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\psi \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + (2n+1-x^2)\psi = 0$$

$$\Rightarrow \quad \psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$$

Ex: Ecuación Schrödinger para el oscilador armónico:

$$\psi'' - x^2\psi = -\underbrace{(2n+1)}_{E}\psi = -E\psi$$

$$\Rightarrow \quad \psi'' + (2n+1-x^2)\psi = 0$$

tiene como solución

$$\psi(x) = \frac{H_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}}{\underbrace{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}_{\text{normalización}}}$$