1. RESOLUCIÓN DE EC. DIF. MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS

I. Introducción y motivación

Hay ecuaciones diferenciales que no se pueden resolver de manera exacta en término de funciones elementales como exponenciales, funciones trigonométricas, logarítmicas, etc. Por ejemplo:

$$y' = x^2 + y^2 \qquad o \qquad xy'' + y' + xy = 0$$

Para resolverlas hay que utilizar métodos alternativos como son los métodos numéricos o método de series de potencias.

Idea central: La idea central es asumir que la solución se puede expandir en serie como

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \qquad (1)$$

Esto pasa con muchas funciones como $\sin(x), e^x, \dots$

Ex 1: Consideremos la ecuación diferencial sencilla de 1er orden

$$y' - y = 0$$

tal que

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Así que

$$y' - y = (a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \dots = 0$$

Como la ec. anterior ha de ser una identidad $\forall x$, todos los coeficientes han de anularse para todas las potencias de x

$$a_1 = a_0 \ , \quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2} \ , \quad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3 \cdot 2} \ , \ \dots$$

Esto implica que

$$y(x) = a_0 \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) = a_0 e^x$$

Reconstrucción de la serie

El método de serie de potencias nos ha permitido encontrar la solución aun sin que conociéramos la función e^x.

Ex 2 : Consideremos la ec. dif. de 2^{nd} orden

$$y'' + y = 0$$

tal que

$$y'' = 2a_2 + 2 \times 3\, a_3 x + 3 \times 4\, a_4 x^2 + \dots$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Así que

$$y'' + y = (2a_2 + a_0) + (2 \times 3\, a_3 + a_1)x + (3 \times 4\, a_4 + a_2)x^2 + \dots$$

Igualando todas las potencias a cero obtenemos

$$a_2 = -\frac{a_0}{2}, \quad a_3 = -\frac{a_1}{3\times 2}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{3\times 4} = \frac{a_0}{3\times 4\times 2}, \ldots$$

Esto implica que

$$y(x) = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)$$

$$= a_0 \cos(x) + a_1 \sin(x)$$

$\Rightarrow$ Las dos soluciones independientes con a_0 y a_1 son de la forma asumida en (1)

$\downarrow$
Reconstrucción de la serie

Ex 3: Consideremos la ec. dif de 2^{nd} orden

$$x y'' + y' + x y = 0$$

tal que

$$\begin{aligned}
x y'' &= \phantom{a_1 +{}} 2a_2 x + 6a_3 x^2 + 12 a_4 x^3 + 20 a_5 x^4 + 30 a_6 x^5 + \ldots \\
y' &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4 a_4 x^3 + 5 a_5 x^4 + 6 a_6 x^5 + \ldots \\
x y &= \phantom{a_1 +{}} a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + a_4 x^5 + \ldots
\end{aligned}$$

Así que

$$x y'' + y' + x y = a_1 + (4a_2 + a_0)x + (9a_3 + a_1)x^2 + (16 a_4 + a_2)x^3$$
$$+ (25 a_5 + a_3)x^4 + (36 a_6 + a_4)x^5 + \ldots$$

Igualando todas las potencias a cero obtenemos

$$a_1 = 0 \,, \quad a_2 = -\frac{a_0}{4} \,, \quad a_3 = -\frac{a_1}{9} = 0 \,, \quad a_4 = -\frac{a_2}{16} = \frac{a_0}{16 \times 4}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{25} = 0 \,, \quad a_6 = -\frac{a_4}{36} = -\frac{a_0}{36 \times 16 \times 4} \,, \quad \dots$$

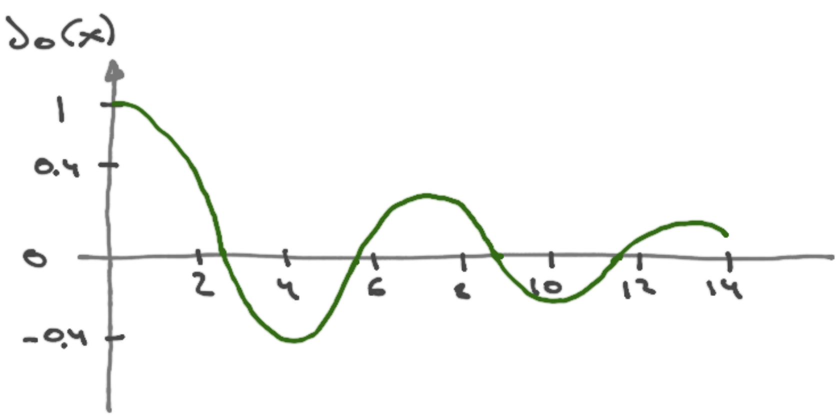
Esto implica que

$$y(x) = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16 \times 4} - \frac{x^6}{36 \times 16 \times 4} + \dots \right)$$

$$= a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\, 4^2} - \frac{x^6}{2^2\, 4^2\, 6^2} + \dots \right) = a_0 J_0(x)$$

Reconstrucción de la serie

NOTE: $J_0(x)$ es la función de Bessel de orden 0



[1784 - 1846]

Recibe el nombre del astrónomo alemán Friedrich Wilhelm Bessel y juegan un papel crucial para describir oscilaciones amortiguadas.

Es importante destacar que sólo hemos encontrado una solución basada en la forma (1). Pero una ec. de 2^{nd} orden tiene otra solución independiente. Lo que ocurre es que la segunda solución no es de la forma (1) y por eso no la encontramos. Más adelante presentaremos un método para obtener la segunda solución partiendo de $J_0(x)$.

Remark : A veces puede incluso ocurrir que ninguna de las soluciones sea del tipo (1) con lo cual sólo encontramos $y=0$.

II. Puntos ordinarios y singulares de una ecuación diferencial

Una forma general de una ec. dif. lineal de 2^{nd} orden es

$$y'' + q(x)\, y' + r(x)\, y = 0$$

donde haber elegido el prefactor de y'' igual a $+1$ no supone ninguna pérdida de generalidad.

* Punto ordinario $x=a$: Ambas funciones $q(x)$ y $r(x)$ admiten desarrollo en serie de Taylor en la vecindad de $x=a$

Siempre que los desarrollos de $q(x)$ y $r(x)$ sean válidos para

$$|x-a| < R$$

entonces el desarrollo de Taylor de la solución

$$y(x) = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \ldots \qquad (i)$$

es válido para $|x-a|<R$. El punto $x=a$ se dice ordinario.

Teorema: Si se deriva término a término una serie de potencias como (i) cierto número de veces, la serie resultante es convergente dentro del intervalo de convergencia de la serie original.

* Punto singular $x=a$: Alguna de las funciones $q(x)$ o $r(x)$ no admite desarrollo en serie de Taylor en la vecindad de $x=a$. Si ocurre que

$$(x-a)\,q(x) = \tilde{q}(x) \quad y \quad (x-a)^2\, r(x) = \tilde{r}(x) \qquad (ii)$$

$\tilde{q}(x)$ y $\tilde{r}(x)$ admitiendo desarrollos en serie de Taylor en la vecindad $|x-a|<R$, entonces el punto $x=a$ es una singularidad regular.

* Punto singular regular $x=a$: Si $q(x)$ y $r(x)$ son de la forma dada en (ii) existe al menos una solución de la forma

$$y(x) = a_0\,(x-a)^{\rho} + a_1\,(x-a)^{\rho+1} + a_2\,(x-a)^{\rho+2} + \dots$$

con $a_0 \neq 0$ y $\rho = cte$ que es válida para $|x-a|<R$ siempre que las series de Taylor para $\tilde{q}(x)$ y $\tilde{r}(x)$ tengan radio de convergencia $|x-a|<R$.

Ex: Consideremos la ec. dif. de 2^{nd} orden en Ex 3 anterior

$$x y'' + y' + x y = 0 \rightarrow y'' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{q(x)=\frac{1}{x}} y' + \underbrace{y}_{r(x)=1} = 0 \Rightarrow$$ Punto singular $x = 0$

con lo que

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{q}(x) = x\, q(x) = 1 \\ \tilde{r}(x) = x^2\, r(x) = x^2 \end{array}\right\}$$ Ambas son convergentes para todos los valores $\underbrace{\text{finitos}}_{\tilde{r}(x) = x^2}$ de $x \Rightarrow$ singular regular

Es corriente obtener soluciones en serie de ec. dif. en series de potencias en relación a puntos singulares regulares en lugar de puntos ordinarios. Las razones son:

- El rango de convergencia es a veces mayor que para los desarrollos relativos a puntos ordinarios.

- Las características esenciales de la solución las indican la forma de los desarrollos relacionados con puntos singulares.

- Las soluciones relacionadas con puntos singulares suelen ser válidas en radios que solapan y esto permite describir la solución a todo x 

- Las relaciones de recurrencia de a_n suelen ser más sencillas

III. Métodos para hallar soluciones en series de potencias

En esta sección vamos a presentar dos métodos para encontrar soluciones en serie de potencias

III.1 Método de Taylor

: Supongamos que $y(x)$ admite un desarrollo en serie de Taylor en la vecindad de $x=a$

$$y(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + \frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{y'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Es posible obtener la solución $y(x)$ de una ec. dif cuando se pueden hallar las derivadas $y'(a)$, $y''(a)$, etc.

Ex: Encontra la solución a $y' = x+y+1$ en relación al punto $x=0$.

Partiendo de la ec. dif. calculamos sus derivadas

$$y' = x+y+1 \;, \quad y'' = 1+y' \;, \quad \underbrace{y''' = y'' \;, \quad y^{(4)} = y^{(3)} \;, \dots}_{y^{(n+1)} = y^{(n)} \text{ para } n \geq 2}$$

Denotando $y(0) \equiv c$ encontramos

$$y'(0) = c+1 \;, \quad y''(0) = 2+c \;, \quad y''' = 2+c \;, \dots$$

con lo que

$$y(x) = c + (c+1)\,x + \frac{c+2}{2!}\,x^2 + \frac{c+2}{3!}\,x^3 + \ldots$$
$$= c + (c+1)\,x + (c+2)\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)$$
$$= c + (c+1)x + (c+2)(e^x - 1 - x) = (c+2)\,e^x + (c+1-c-2)x$$
$$+ (c-c-2)$$
$$= (c+2)\,e^x - x - 2\,.$$

Vamos a estudiar ahora el caso de ec. dif. para la que no existen soluciones del tipo

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \qquad (1)$$

III. 2 Método de Frobenius: Es una generalización del método anterior que supone la existencia de una solución del tipo

$$y(x) = x^{\rho}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\right) \qquad (2)$$

la cual generaliza (1) y se reduce a ésta para $\rho = 0$.
Una serie de tipo (2) se denomina de tipo Frobenius.
Por ejemplo, la serie

$$x^{1/2} + x^{3/2} + x^{5/2} + x^{7/2} + \ldots = x^{1/2}\,(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$$

es de tipo (2) y no de tipo (1).

Las series de tipo Frobenius son muy útiles para hallar soluciones a la ecuación diferencial

$$P(x)\, y'' + Q(x)\, y' + R(x)\, y = 0 \qquad (3)$$

donde $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son polinomios en x.

Ex 1: Encontrar las soluciones de

$$\underset{(-1)}{4x y''} + \underset{(-1)}{2y'} + \underset{(0)}{y} = 0 \rightarrow y'' + \frac{y'}{2x} + \frac{y}{4x} = 0 \Rightarrow$$

Pesos: (-1) (-1) (0)

$x=0$ es un punto sing. regular

Asumimos la solución tipo Frobenius

$$y = x^{\rho}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\right)$$

con lo que

$$y' = \rho a_0 x^{\rho-1} + (\rho+1) a_1 x^{\rho} + (\rho+2) a_2 x^{\rho+1} + (\rho+3) a_3 x^{\rho+2} + (\rho+4) a_4 x^{\rho+3} + \dots$$

$$y'' = \rho(\rho-1) a_0 x^{\rho-2} + (\rho+1)\rho a_1 x^{\rho-1} + (\rho+2)(\rho+1) a_2 x^{\rho} + (\rho+3)(\rho+2) a_3 x^{\rho+1} + (\rho+4)(\rho+3) a_4 x^{\rho+2} + \dots$$

y uno encuentra

$$4xy'' = 4\rho(\rho-1) a_0 x^{\rho-1} + 4(\rho+1)\rho a_1 x^{\rho} + 4(\rho+2)(\rho+1) a_2 x^{\rho+1} + 4(\rho+3)(\rho+2) a_3 x^{\rho+2} + 4(\rho+4)(\rho+3) a_4 x^{\rho+3} + \dots$$

$$2y' = 2\rho a_0 x^{\rho-1} + 2(\rho+1)a_1 x^{\rho} + 2(\rho+2)a_2 x^{\rho+1} + 2(\rho+3)a_3 x^{\rho+2}$$
$$+ 2(\rho+4)a_4 x^{\rho+3} + \dots$$

$$y = a_0 x^{\rho} + a_1 x^{\rho+1} + a_2 x^{\rho+2} + a_3 x^{\rho+3} + \dots$$

Sustituyendo en la ecuación original encontramos

$$\left.\left[4\rho(\rho-1) + 2\rho\right] a_0 x^{\rho-1} \right\} \text{Potencia más baja con } x^{\rho-1}$$

$$+ \left[4(\rho+1)\rho\, a_1 + 2(\rho+1)a_1 + a_0\right] x^{\rho}$$

$$+ \left[4(\rho+2)(\rho+1)a_2 + 2(\rho+2)a_2 + a_1\right] x^{\rho+1}$$

$$+ \left[4(\rho+3)(\rho+2)a_3 + 2(\rho+3)a_3 + a_2\right] x^{\rho+2} + \dots = 0$$

Igualando cada potencia a cero se obtiene

$$(4\rho(\rho-1) + 2\rho)\,a_0 = 0 \rightarrow \text{"Ecuación indicial"} \quad [a_0 \neq 0]$$

$$4(\rho+1)\rho\, a_1 + 2(\rho+1)a_1 + a_0 = 0$$

$$4(\rho+2)(\rho+1)a_2 + 2(\rho+2)a_2 + a_1 = 0$$

etc

Resolviendo la ecuación indicial encontramos

$$4\rho(\rho-1) + 2\rho = 4\rho^2 - 2\rho = 2\rho(2\rho-1) = 0 \Rightarrow \rho = 0, \tfrac{1}{2}$$

Estos valores se denominan raíces indiciales.

De las otras dos ecuaciones obtenemos

$$a_1 = -\frac{a_0}{4(\rho+1)\rho + 2(\rho+1)} \quad , \quad a_2 = -\frac{a_1}{4(\rho+2)(\rho+1)+2(\rho+2)}$$

con lo cual vemos que la relación de recurrencia es

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{4(\rho+n)(\rho+n-1) + 2(\rho+n)}$$

- Caso $\rho = 0$: En este caso se encuentra que

$$a_0 = \text{arbitrario} \, , \; a_1 = -\frac{a_0}{2} \, , \; a_2 = -\frac{a_1}{12} = \frac{a_0}{24}$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{30} = -\frac{a_0}{720} \, , \ldots$$

con lo que

$$y(x) = a_0 \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \ldots\right)$$

- Caso $\rho = 1/2$: En este caso se encuentra que

$$a_0 = \text{arbitrario} \, , \; a_1 = -\frac{a_0}{6} \, , \; a_2 = -\frac{a_1}{20} = \frac{a_0}{120}$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{42} = -\frac{a_0}{5040} \, , \ldots$$

con lo que

$$y(x) = a_0 \, x^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \ldots\right)$$

Como cada solución es independiente, la solución general viene dada por

$$y(x) = A\left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \dots\right) + B\left(x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + \frac{x^{5/2}}{5!} - \dots\right)$$

$$= A \cos\sqrt{x} + B \sin\sqrt{x}$$

Ex 2: Encontrar las soluciones de

$$\underset{(-2)}{y''} + \underset{(0)}{x y'} + \underset{(0)}{y} = 0 \implies x = 0 \text{ es un punto regular}$$

Peso:

Asumimos la solución tipo Frobenius

$$y = x^\rho \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \right)$$

con lo que

$$x y' = x \cdot \left[\rho a_0 x^{\rho-1} + (\rho+1) a_1 x^\rho + (\rho+2) a_2 x^{\rho+1} + (\rho+3) a_3 x^{\rho+2} + \dots \right]$$

$$= \rho a_0 x^\rho + (\rho+1) a_1 x^{\rho+1} + (\rho+2) a_2 x^{\rho+2} + (\rho+3) a_3 x^{\rho+3} + \dots$$

$$y'' = \rho(\rho-1) a_0 x^{\rho-2} + (\rho+1)\rho a_1 x^{\rho-1} + (\rho+2)(\rho+1) a_2 x^\rho + (\rho+3)(\rho+2) a_3 x^{\rho+1} + \dots$$

Sustituyendo en la ecuación original encontramos

$$\underbrace{\rho(\rho-1) a_0 x^{\rho-2}}_{\text{Potencia más baja con } x^{\rho-2}} + (\rho+1)\rho a_1 x^{\rho-1} + \left[a_0(\rho+1) + (\rho+2)(\rho+1) a_2 \right] x^\rho$$

$$+ \left[a_1(\rho+2) + (\rho+2)(\rho+3) a_3 \right] x^{\rho+1} + \dots$$

Igualando cada potencia a cero se obtiene

- $\rho(\rho-1)\, a_0 = 0 \longrightarrow$ "Ecuación indicial" $[a_0 \neq 0]$
- $(\rho+1)\rho\, a_1 = 0$
- $(\rho+1)\, a_0 + (\rho+2)(\rho+1)\, a_2 = 0$
- $(\rho+2)\, a_1 + (\rho+3)(\rho+2)\, a_3 = 0$
- $(\rho+3)\, a_2 + (\rho+4)(\rho+3)\, a_4 = 0$
- $(\rho+4)\, a_3 + (\rho+5)(\rho+4)\, a_5 = 0$

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \quad a_n = -\frac{a_{n-2}}{(\rho+n)} \quad (n \geq 2)$$

Resolviendo la ecuación indicial encontramos $\rho = 0, 1$.-

- Caso $\rho = 0$: En este caso se encuentra que

$a_0 =$ arbitrary , $a_1 =$ arbitrary , $a_2 = -\dfrac{a_0}{2}$, $a_3 = -\dfrac{a_1}{3}$

$a_4 = -\dfrac{a_2}{4} = \dfrac{a_0}{2\times 4}$, $a_5 = -\dfrac{a_3}{5} = \dfrac{a_1}{3\times 5}$, $a_6 = -\dfrac{a_0}{2\times 4\times 6}$, ...

con lo que

$$y(x) = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\times 4} - \frac{x^6}{2\times 4\times 6} + \dots\right)$$
$$+ a_1\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3\times 5} - \frac{x^7}{3\times 5\times 7} + \dots\right) \Rightarrow$$

solución general !!

- Caso $\rho = 1$: En este caso se encuentra la misma solución que con la raíz indicial $\rho = 0$ pero sólo la parte con potencias impares de x.

Con los dos ejemplos anteriores hemos visto que la casuística es variada según los valores que tomen las dos raíces indiciales ρ_1 y ρ_2:

a) $\rho_2 = \rho_1$: En este caso sólo se obtiene una solución.

b) $\rho_2 = \rho_1 + K$ con $K \in \mathbb{N}$: Hay dos posibilidades

b.1) La solución general se obtiene de la raíz menor

b.2) La raíz menor no da ninguna solución. Sin embargo la raíz mayor da una solución.

c) $\rho_2 = \rho_1 + \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ (sin ser un entero): Siempre se obtiene la solución general.

Los casos a) y b.2) hacen que sea necesario encontrar métodos que reconstruyan la segunda solución a partir de una conocida. Esto lo veremos más adelante.

IV. Condiciones para la existencia de soluciones tipo Frobenius

Las condiciones de suficiencia para la existencia de soluciones tipo Frobenius están íntimamente relacionadas con la naturaleza de los puntos con los que se relaciona la expansión.

Sea la ec. dif. lineal de 2^{nd} orden

$$P(x)\, y'' + Q(x)\, y' + R(x)\, y = 0 \iff y'' + \underbrace{\frac{Q(x)}{P(x)}}_{q(x)} y' + \underbrace{\frac{R(x)}{P(x)}}_{r(x)} y = 0$$

• Punto ordinario : En un punto ordinario $x=a$ los polinomios $q(x)$ y $r(x)$ admiten una expansión en serie de Taylor. Ocurre pues que $P(a) \neq 0$

• Punto singular : En un punto singular $x=a$ los polinomios $q(x)$ y $r(x)$ no admiten una expansión en serie de Taylor. Ocurre pues que $P(a) = 0$. Si además existen los límites

$$\lim_{x \to a} \underbrace{(x-a) \frac{Q(x)}{P(x)}}_{q(x)} \quad y \quad \lim_{x \to a} \underbrace{(x-a)^2 \frac{R(x)}{P(x)}}_{r(x)}$$

entonces $x=a$ es un punto singular regular.

Teorema (de Fuchs) : Si $x=a$ es un punto regular o singular regular entonces siempre existe una solución de la forma

$$(x-a)^{\rho} \left[a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \dots \right] \quad (1)$$

con $a_0 \neq 0$ y $\rho = \text{cte}$ (Solución Frobenius)

Se tienen entonces que :

* $x=a$ punto ordinario : (1) con $\rho = 0$ da la solución general

* $x=a$ punto singular regular : (1) da una solución o la solución general

* $x=a$ punto singular irregular : Pueden o no existir soluciones (1)

Ex : Demostrar que la ec. dif.

$$x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$$

tiene solución tipo Frobenius en relación a $x=0$.

En este caso:

$$P(x) = x^2 \quad , \quad Q(x) = x \quad , \quad R(x) = x^2-n^2$$

con lo que $P(0)=0$ y entonces $x=0$ es un punto singular.

Además:

$$\lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x^2\frac{x^2-n^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} (x^2-n^2) = -n^2$$

Por lo tanto ambos límites existen, $x=0$ es un punto singular regular y existe una solución del tipo Frobenius.

v) Convergencia de las soluciones en serie

Criterio de la razón de D'Alembert: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge absolutamente si

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$$

Aplicando este criterio a la solución de tipo Frobenius

$$y = (x-a)^{\rho}\left[a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots\right]$$

la solución converge si

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-a)}{a_n}\right| < 1$$

Esto permite determinar el rango de $|x-a|$ en el que la serie es convergente.

Teorema: La serie de Frobenius (si existe) convergerá:

1) Para todos los valores de x si $x=a$ es un punto ordinario y no hay puntos singulares finitos.

2) Para todos los valores de x si $x=a$ es un punto singular regular y no hay otros puntos singulares finitos

3) Dentro del intervalo $|x-a| < R$ si $x=a$ es un punto ordinario o singular regular, siendo R la distancia a la singularidad más cercana.

Ex: Consideremos el Ex 1 de la sec III con la ec. dif.

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

La relación de recurrencia es

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{2(\rho+n+1)(2\rho+2n+1)}$$

de tal manera que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{|x|}{2(\rho+n+1)(2\rho+2n+1)}\right\} = 0 \quad (\forall x \text{ finita})$$

Entonces ambas soluciones $(\rho=0,\tfrac{1}{2})$ son convergentes para todos los valores finitos de x, i.e.

$$|x| < \infty$$

Esto está de acuerdo con lo establecido en el apartado 2) del teorema anterior.

VI) Relación entre las dos soluciones de una ecuación lineal de 2^{nd} orden

La condición necesaria para que dos soluciones y_1 e y_2 sean independientes es que el Wronskiano sea no nulo

$$W \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$$

Prueba: Calculando

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1'}{y_2} - \frac{y_1}{y_2^2}\, y_2' = \frac{-1}{y_2^2}\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right) = -\frac{W}{y_2^2}$$

vemos que $W=0 \Rightarrow \left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = 0 \Rightarrow y_1 = \lambda y_2$ con $\lambda = \text{cte}$.

NOTE: $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2'}{y_1} - \frac{y_2}{y_1^2}\, y_1' = \frac{1}{y_1^2}\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right) = \frac{W}{y_1^2}$

Puesto que

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = y_1^2 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \int \frac{W}{y_1^2}\, dx$$

con lo que resulta

$$y_2 = y_1 \int \frac{W}{y_1^2}\, dx \qquad (1)$$

Partamos ahora de que y_1 e y_2 son soluciones de la ec. dif de segundo orden

$$y'' + q(x)\, y' + r(x)\, y = 0$$

Al ser soluciones se tiene que

$$y_1'' + q\, y_1' + r\, y_1 = 0 \quad (\times -y_2)$$

$$y_2'' + q\, y_2' + r\, y_2 = 0 \quad (\times\, y_1)$$

$$\underbrace{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}_{W'} + q\, \underbrace{(y_1 y_2' - y_2 y_1')}_{W} = 0$$

NOTE: $W' = (y_1 y_2' - y_2 y_1')' = \cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - \cancel{y_2' y_1'} - y_2 y_1''$

$$= y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

Entonces $W' + q\, W = 0 \Rightarrow \frac{W'}{W} = -q \Rightarrow \operatorname{Log} W = -\int q(x) + \underbrace{c}_{\text{cte}}$

y encontramos que

$$(2) \qquad W = \underbrace{c}_{\text{cte}} \, e^{-\int q(x)\,dx} \implies \text{Sólo depende de } q(x)$$

Sustituyendo (2) en (1) se encuentra que

$$\boxed{y_2 = c\, y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int q\,dx}\, dx}$$

Esta fórmula nos permite obtener $y_2(x)$ a partir de una $y_1(x)$ conocida cuando las integraciones se pueden llevar a cabo.

Ex : Dado que $y_1 = \dfrac{1}{(x-1)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n$ es solución de

$$x(x-1)^2\, y'' + (x-1)\, y' + (2-6x)\, y = 0$$

hallar la segunda solución y_2.

De la ecuación leemos $q(x) = \dfrac{(x-1)}{x(x-1)^2} = \dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$

de modo que

$$\int q(x)\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx = \operatorname{Log}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

y entonces $\quad e^{-\int q\,dx} = \dfrac{x}{x-1}$.

Aplicando la fórmula general para y_2 encontramos

$$y_2 = \frac{c}{(x-1)^2}\int (x-1)^4 \frac{x}{(x-1)}\,dx = \frac{c}{(x-1)^2}\int x\,(x-1)^3\,dx$$

$$= \frac{c}{(x-1)^2}\int \left[(x-1)^4 + (x-1)^3\right] dx = \frac{c}{(x-1)^2}\left[\frac{(x-1)^5}{5} + \frac{(x-1)^4}{4}\right]$$

$$= \frac{c}{20}\left[4\,(x-1)^3 + 5\,(x-1)^2\right] = \frac{c}{20}(x-1)^2\left[4\,(x-1)+5\right]$$

$$= \frac{c}{20}(x-1)^2\,(4x+1)\,.$$

Como vimos en sec III y sec IV, hay dos casos en los que el mét. Frobenius no da la segunda solución:

a) Punto singular regular con $\rho_2 = \rho_1 \equiv \rho$

b.2) Punto singular regular con $\rho_2 = \rho_1 + K$ con $\begin{cases} K \in \mathbb{N} \\ \rho_2 > \rho_1 \end{cases}$

Utilizando el método del Wronskiano se puede demostrar que

a) Las dos soluciones vienen dadas por

$$\underbrace{y_1 = x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{\text{La obtenemos por el método de Frobenius}} \quad , \quad \underbrace{y_2 = y_1 \ln(x) + x^{\rho+1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}_{\text{Conociendo las } a_n\text{'s de } y_1 \text{ se pueden determinar las } b_n\text{'s de } y_2 \text{ sustituyendo } y_2 \text{ en la ec. dif.}}$$

$\Rightarrow$ Solución gener: $y = x^\rho\left[a_0(1+C\ln x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C b_{n-1} + a_n(1+C\ln x)\right)x^n\right]$

$[y = y_1 + C y_2]$

NOTE: Los términos con $\ln(x)$ cancelan en virtud de la ecuación diferencial original:

$$y_2 = y_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{\rho+1+n}$$

$$y_2' = y_1' \ln(x) + y_1 \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\rho+1+n) x^{\rho+n}$$

$$y_2'' = y_1'' \ln(x) + 2 y_1' \frac{1}{x} - y_1 \frac{1}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\rho+1+n)(\rho+n) x^{\rho+n-1}$$

Tenemos entonces que

$$P y_2'' + Q y_2' + R y_2 = 0$$

$$\Rightarrow \ln(x) \underbrace{\left(P y_1'' + Q y_1' + R y_1 \right)}_{0 \text{ si } y_1 \text{ es solución}} + \text{términos extras} = 0$$

donde

$$\text{Términos extras} = P \Big(\overbrace{2y_1' \frac{1}{x}}^{\rho-2} \overbrace{- y_1 \frac{1}{x^2}}^{\rho-2} + \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (\rho+1+n)(\rho+n) x^{\rho+n-1}}^{\rho-1} \Big)$$

$$+ Q \Big(\underbrace{y_1 \frac{1}{x}}_{\rho-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{b_n (\rho+1+n) x^{\rho+n}}_{\rho} \Big)$$

$$+ R \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{b_n x^{\rho+1+n}}_{\rho+1} = 0$$

NOTE: $y_1 = x^{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

NOTE: He puesto en verde la potencia más baja de ρ en cada término.

Hasta ahora todo ha sido general. Ahora voy a particularizar a tu problema:

$$P = x^2 \quad , \quad Q = -x \quad , \quad R = 1 - x$$

Entonces

$$\text{Términos extras} = x^2 \Big(\underbrace{2y_1' \frac{1}{x}}_{\rho} - \underbrace{y_1 \frac{1}{x^2}}_{\rho} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (\rho+1+n)(\rho+n)\, x^{\rho+n-1}}_{\rho+1} \Big)$$

$$- x \Big(\underbrace{y_1 \frac{1}{x}}_{\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{b_n (\rho+1+n)\, x^{\rho+n}}_{\rho+1} \Big)$$

$$+ (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{b_n \, x^{\rho+1+n}}_{\rho+1} = 0$$

NOTE: He puesto en verde la potencia más baja de ρ en cada término tras sustituir P, Q y R

Veamos que los términos independientes de b_n cancelan al sustituir y_1. Éstos son los de orden ρ:

orden ρ : $2xy_1' - y_1 - y_1 = 2(xy_1' - y_1) = (*)$

NOTA: $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+\rho}}{(n!)^2}$, $x y_1' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho) \frac{x^{n+\rho}}{(n!)^2}$ con $\rho = 1$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho-1) \frac{x^{n+\rho}}{(n!)^2}$$

$$= 2 \cdot \Big[(\rho-1)\, x^{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(n+\rho-1)}_{n-1 = n'} \frac{x^{n+\rho}}{(n!)} \Big]$$

$$= 2 \left[\underbrace{(p-1)\, x^{p}}_{\text{se anula para } p=1} + \underbrace{\sum_{n'=0} (n'+p)\, \frac{x^{n'+1+p}}{((n'+1)!)^2}}_{\substack{\text{términos de orden } (p+1),\,(p+2),\dots \text{ que ya} \\ \text{se hallan con las } b_n \\ \text{y determinan un sistema} \\ \text{algebraico que determina} \\ \text{las } b_n}} \right]$$

b.2) Las dos soluciones vienen dadas por

$$\underbrace{y_1 = x^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{\text{La obtenemos por el método de Frobenius}} \quad , \quad \underbrace{y_2 = C\, y_1 \operatorname{Ln}(x) + x^{\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}_{\text{Conociendo las } a_n\text{'s de } y_1 \text{ se pueden determinar las } b_n\text{'s y } C \text{ sostituyendo } y_2 \text{ en la ec. dif.}} \quad (x>0)$$

NOTE: Los términos con $\operatorname{Ln}(x)$ cancelan en virtud de la ecuación diferencial original:

$$y_2 = C\, y_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{\rho_1+n}$$

$$y_2' = C\, y_1' \ln(x) + C\, y_1 \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\rho_1+n) x^{\rho_1+n-1}$$

$$y_2'' = C\, y_1'' \ln(x) + 2C\, y_1' \frac{1}{x} - C\, y_1 \frac{1}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\rho_1+n)(\rho_1+n-1) x^{\rho_1+n-2}$$

Tenemos entonces que

$$P y_2'' + Q y_2' + R y_2 = 0$$

$$\Rightarrow C \operatorname{Ln}(x) \underbrace{\left(P y_1'' + Q y_1' + R y_1 \right)}_{0 \text{ si } y_1 \text{ es solución}} + \ldots = 0$$

$\Rightarrow$ Solución gener.: $y = x^{\rho_1} \left[\sum_{n=0}^{k-1} b_n x^n + \sum_{n=k}^{\infty} \left(\underbrace{b_n + a_{n-k} (1 + C \operatorname{Ln} x)}_{(b_n + a_{n-k}) + C\, a_{n-k} \operatorname{Ln} x} \right) x^n \right]$

[$\rho_2 = \rho_1 + k$]

[$y = y_1 + y_2$]

Ejercicio

1) Ecuación de Airy : $y'' - xy = 0$ en $x=0$

- $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
- $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$
- $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$

Cambiando el índice en y'' y sustituyendo en la ec. dif

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

Haciendo un cambio $m-2 = n+1 \Rightarrow m = n+3$ se encuentra

$$2c_2 + \underbrace{\sum_{m=3}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2}}_{\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2) c_{n+3} x^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

$$2c_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3)(n+2) c_{n+3} - c_n\right] x^{n+1} = 0$$

Entonces encontramos que

$$c_2 = 0 \quad , \quad c_{n+3} = \frac{c_n}{(n+3)(n+2)} \quad \text{con } n \geq 0$$

Los distintos coeficientes vienen dados por

$$c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{c_0}{3\times 2}, \quad c_4 = \frac{c_1}{4\times 3}, \quad c_5 = \frac{c_2}{5\times 4} = 0$$

$$c_6 = \frac{c_3}{6\times 5} = \frac{c_0}{6\times 5\times 3\times 2}, \quad c_7 = \frac{c_4}{7\times 6} = \frac{c_1}{7\times 6\times 4\times 3}$$

$$c_8 = \frac{c_5}{8\times 7} = 0, \quad c_9 = \frac{c_6}{9\times 8} = \frac{c_0}{9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}$$

y se generalizan a

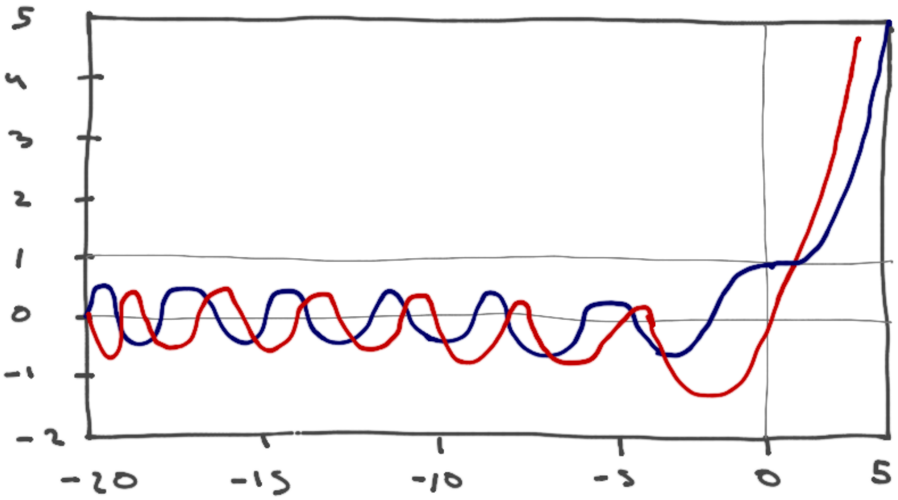
$$c_{3n+2} = 0 \quad , \quad c_{3n} = \frac{4\cdot 7 \cdots (3n-2)}{3n!}\, c_0 \quad (n \geq 1)$$

$$, \quad c_{3n+1} = \frac{2\cdot 5 \cdots (3n-1)}{(3n+1)!}\, c_1 \quad (n \geq 1)$$

La solución general es

$$y(x) = c_0\, y_1(x) + c_1\, y_2(x)$$

$$= c_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 7 \cdots (3n-2)}{3n!}\, x^{3n} \right] + c_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5 \cdots (3n-1)}{(3n+1)!}\, x^{3n+1} \right]$$



Oscilante (como trigonom) $x<0$

Monótona (como hiperb) $x>0$

Nota 1: Sir George Airy (1801-1892). Matemático y astrónomo inglés director del observatorio de Greenwich (1835-1881)