Ecuación de movimiento de campos escalares reales en M_4 con métrica FRW.

Adolfo Guarino Almeida

Abstract

En estas notas se hace un desarrollo general formal para obtener la ecuación de movimiento de un sistema de campos escalares reales en un espacio-tiempo M_4 con métrica general, particularizando finalmente al caso FRW, con una métrica de Kähler genérica.

1 Acción gravitacional

Partiendo de la acción gravitacional pura,

$$S_G = \frac{1}{\kappa}\int dx^4\sqrt{g}\ R$$

donde $R(x) = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ y considerando transformaciones de la métrica $g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ obtenemos una variación de la acción

$$\begin{aligned} \delta S_G &= \frac{1}{\kappa}\int dx^4 \delta(\sqrt{g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = \\ &= \frac{1}{\kappa}\int dx^4 \left[(\delta\sqrt{g})g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \sqrt{g}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})\right] \end{aligned}$$

Utilizando

- $\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,g^{\lambda\epsilon}\delta g_{\lambda\epsilon}$
- $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\lambda}g^{\nu\epsilon}\delta g_{\lambda\epsilon}$
- $\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\beta})_{;\nu} - (\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\nu})_{;\beta}$[1]

$$\sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{g}\left[(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\beta})_{;\nu} - (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\nu})_{;\beta}\right] \longrightarrow \textit{No aporta a la integral}^{2}$$

llegamos a

$$\delta S_G = -\frac{1}{\kappa}\int dx^4\sqrt{g}\left[\overbrace{R^{\lambda\epsilon} - \frac{1}{2}g^{\lambda\epsilon}R}^{G^{\lambda\epsilon}}\right]\delta g_{\lambda\epsilon} = -\frac{1}{\kappa}\int dx^4\sqrt{g}\,G^{\lambda\epsilon}\delta g_{\lambda\epsilon}$$

[1] La conexión no es un tensor, pero la diferencia entre dos conexiones $\delta\Gamma$ sí lo es.
[2] $[D_\rho, g_{\mu\nu}] = 0$

Luego, la ecuación que encontramos para el caso de gravedad pura es

$$\frac{\delta S_G}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \Longrightarrow \ \ G^{\mu\nu} = 0$$

2 Acción de materia

Cuando incorporamos materia a la estructura espacio-temporal, ésta se acopla a la métrica, modificando así la ecuación de Einstein que habíamos deducido anteriormente.

Partiendo de

$$S_M = \int dx^4 \sqrt{g}\, \left[\lambda\, K_{ij}\, g^{\rho\sigma}\, (\partial_\rho \varphi^i)\, (\partial_\sigma \varphi^j) - V(\varphi)\right]$$

y calculando la variación de la acción bajo transformaciones $g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\delta S_M &= \\ &= \int dx^4 \left[(\delta\sqrt{g})\, \left[\lambda\, K_{ij}\, g^{\rho\sigma}\, (\partial_\rho \varphi^i)\, (\partial_\sigma \varphi^j) - V(\varphi)\right] + \sqrt{g}\left[\lambda\, K_{ij} (\delta g^{\rho\sigma})\, (\partial_\rho \varphi^i)\, (\partial_\sigma \varphi^j)\right]\right] = \\ &= \frac{1}{2}\int dx^4 \sqrt{g}\left[g^{\mu\nu}\left[\lambda\, K_{ij}\, g^{\rho\sigma}\, (\partial_\rho \varphi^i)\, (\partial_\sigma \varphi^j) - V(\varphi)\right] - 2\,\lambda\, K_{ij} g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} (\partial_\rho \varphi^i)(\partial_\sigma \varphi^i)\right] (\delta g_{\mu\nu})\end{aligned}$$

Atendiendo a la definición general del tensor energía momento

$$\delta S_M = \frac{1}{2}\int dx^4 \sqrt{g}\, T^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu})$$

podemos identificar

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\left[\lambda\, K_{ij}\, g^{\rho\sigma}\, (\partial_\rho \varphi^i)\, (\partial_\sigma \varphi^j) - V(\varphi)\right] - 2\,\lambda\, K_{ij} g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} (\partial_\rho \varphi^i)(\partial_\sigma \varphi^i)$$

Si lo queremos con los índices abajo, hemos de multiplicar por $g_{\lambda\mu} g_{\epsilon\nu}$

$$T_{\lambda\epsilon} = g_{\lambda\epsilon}\left[\lambda\, K_{ij}\, g^{\rho\sigma}\, (\partial_\rho \varphi^i)\, (\partial_\sigma \varphi^j) - V(\varphi)\right] - 2\,\lambda\, K_{ij} (\partial_\lambda \varphi^i)(\partial_\epsilon \varphi^i)$$

donde hemos utilizado $g^{\rho\mu} g_{\lambda\mu} = \delta^\rho_\lambda$

Para tener la acción total

$$S = S_G + S_M \Longrightarrow \delta S = \delta S_G + \delta S_M$$

Esto es

$$\delta S = \int dx^4 \sqrt{g}\left[-\frac{1}{\kappa} R^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa} g^{\mu\nu} R + \frac{1}{2} T^{\mu\nu}\right] (\delta g_{\mu\nu})$$

Lo que nos lleva a la ecuación de Einstein en presencia de materia

$$\frac{\delta S_G}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \Longrightarrow \ \ G^{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} T^{\mu\nu}$$

3 Ecuación de movimieto para la materia

Una vez que conocemos la acción para la materia, podemos obtener su ecuación de movimiento a partir del principio de mínima acción, esto es, las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$S_M = \int dx^4 L_M = \int dx^4 \sqrt{g}\, \left[\lambda\, K_{ij}\, g^{\mu\nu}\, (\partial_\mu \varphi^i)\, (\partial_\nu \varphi^j) - V(\varphi)\right]$$

entonces

$$L_M = \sqrt{g}\, \left[\lambda\, K_{ij}\, g^{\mu\nu}\, (\partial_\mu \varphi^i)\, (\partial_\nu \varphi^j) - V(\varphi)\right]$$

Vamos a obtener la ecuación de movimiento:

$$\bullet \frac{\partial L_M}{\partial \varphi^k} = \sqrt{g}\left[\lambda\, g^{\mu\nu} \frac{\partial K_{ij}}{\partial \varphi^k} (\partial_\mu \varphi^i)\, (\partial_\nu \varphi^j) - \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k}\right]$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial L_M}{\partial(\partial_\sigma \varphi^k)} &= \sqrt{g}\, \lambda\, g^{\mu\nu}\, K_{ij} \left[\delta^\sigma_\mu \delta^i_k (\partial_\nu \varphi^j) + (\partial_\mu \varphi^i) \delta^\sigma_\nu \delta^j_k\right] = \\ &= \sqrt{g}\, \lambda\, \left[g^{\sigma\nu} K_{kj} (\partial_\nu \varphi^j) + g^{\mu\sigma} K_{ik} (\partial_\mu \varphi^i)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \partial_\sigma \left(\frac{\partial L_M}{\partial(\partial_\sigma \varphi^k)}\right) &= (\partial_\sigma \sqrt{g}) \lambda \left[g^{\sigma\nu} K_{kj} (\partial_\nu \varphi^j) + g^{\mu\sigma} K_{ik} (\partial_\mu \varphi^i)\right] + \\ &+ \sqrt{g}\, \lambda \Big[(\partial_\sigma g^{\sigma\nu}) K_{kj} (\partial_\nu \varphi^j) \;+\; g^{\sigma\nu} \frac{\partial K_{kj}}{\partial \varphi^i} (\partial_\sigma \varphi^i)\, (\partial_\nu \varphi^j) \;+ g^{\sigma\nu} K_{kj} (\partial_\sigma \partial_\nu \varphi^j) + \\ &+ (\partial_\sigma g^{\mu\sigma}) K_{ik} (\partial_\mu \varphi^i) \;+\; g^{\mu\sigma} \frac{\partial K_{ik}}{\partial \varphi^j} (\partial_\sigma \varphi^j)\, (\partial_\mu \varphi^i) \;+ g^{\mu\sigma} K_{ik} (\partial_\sigma \partial_\mu \varphi^i)\Big] \end{aligned}$$

Podemos renombrar los índices mudos de tal manera que se vea más claramente la estructura de la ecuación de movimiento. Lo único que asumiremos en este paso es que la **métrica $g_{\mu\nu}$ es simétrica**:

$$\partial_\sigma \left(\frac{\partial L_M}{\partial(\partial_\sigma \varphi^k)}\right) - \frac{\partial L_M}{\partial \varphi^k} = 0$$

Veamos,

$$\begin{aligned} \bullet \quad & (\partial_\sigma \sqrt{g})\, \lambda\, (K_{km} + K_{mk}) g^{\sigma\mu} (\partial_\mu \varphi^m) \;+\; \sqrt{g} \lambda\, \left[\, (K_{km} + K_{mk})\, \Box \varphi^m \;+\; (\partial_\sigma g^{\sigma\mu}) (K_{km} + K_{mk}) (\partial_\mu \varphi^m) + \right. \\ + \quad & \left. 2\, \frac{1}{2} \left[\frac{\partial K_{ik}}{\partial \varphi^j} + \frac{\partial K_{kj}}{\partial \varphi^i} - \frac{\partial K_{ij}}{\partial \varphi^k}\right] g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi^i)\, (\partial_\nu \varphi^j) \;+\; \frac{1}{\lambda} \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k}\right] = 0 \end{aligned}$$

Ahora vamos a suponer que la **métrica K_{ij} es simétrica**:

$$\begin{aligned} \bullet \quad & (\partial_\sigma \sqrt{g})\, \lambda\, 2\, K_{km} g^{\sigma\mu} (\partial_\mu \varphi^m) \;+\; \sqrt{g} \lambda\, \left[\, 2\, K_{km}\, \Box \varphi^m \;+\; (\partial_\sigma g^{\sigma\mu})\, 2\, K_{km} (\partial_\mu \varphi^m) + \right. \\ + \quad & \left. 2\, \frac{1}{2} \left[\frac{\partial K_{ki}}{\partial \varphi^j} + \frac{\partial K_{kj}}{\partial \varphi^i} - \frac{\partial K_{ij}}{\partial \varphi^k}\right] g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi^i)\, (\partial_\nu \varphi^j) \;+\; \frac{1}{\lambda} \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k}\right] = 0 \end{aligned}$$

Multiplicando a ambos lados por $\frac{1}{2}\, K^{qk}$ y teniendo en cuenta que

$$K^{qk} K_{km} = \delta^q_m$$

- $(\partial_\sigma \sqrt{g})\, \lambda\, g^{\sigma\mu} (\partial_\mu \varphi^q) \;+\; \sqrt{g}\lambda\, \Big[\, \Box\varphi^q \;+\; (\partial_\sigma g^{\sigma\mu})\,(\partial_\mu \varphi^q) +$

$$+ \quad \underbrace{\frac{1}{2}\, K^{qk} \left[\frac{\partial K_{ki}}{\partial \varphi^j} + \frac{\partial K_{kj}}{\partial \varphi^i} - \frac{\partial K_{ij}}{\partial \varphi^k} \right]}_{\Gamma^q_{ij}} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi^i)\,(\partial_\nu \varphi^j) \;+\; \frac{1}{2\,\lambda}\, K^{qk}\, \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k} \Bigg] = 0$$

Ahora bien, operando un poco

$$(\partial_\sigma \sqrt{g}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_\sigma g) = \sqrt{g}\; \underbrace{\frac{1}{2}\, \frac{1}{g} (\partial_\sigma g)}_{\Gamma^\epsilon_{\epsilon\sigma}} = \sqrt{g}\, \Gamma^\epsilon_{\epsilon\sigma}$$

Entonces, la ecuación de movimiento reza:

$$\sqrt{g}\lambda\, \left[\, \Box\varphi^q \;+\; [(\partial_\sigma g^{\sigma\mu}) \;+ \Gamma^\epsilon_{\epsilon\sigma}\, g^{\sigma\mu}]\; (\partial_\mu \varphi^q) \;+\; \Gamma^q_{ij}\, g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi^i)\,(\partial_\nu \varphi^j) \;+\; \frac{1}{2\,\lambda}\, K^{qk}\, \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k} \right] = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\boxed{\Box\varphi^q \;+\; [(\partial_\sigma g^{\sigma\mu}) \;+ \Gamma^\epsilon_{\epsilon\sigma}\, g^{\sigma\mu}]\; (\partial_\mu \varphi^q) \;+\; \Gamma^q_{ij}\, g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi^i)\,(\partial_\nu \varphi^j) \;+\; \frac{1}{2\,\lambda}\, K^{qk}\, \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k} = 0}$$

Para llegar a este resultado lo único que hemos asumido es que tanto la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$, como la métrica de Kähler K_{ij} son **simétricas**.

4 Métrica de FRW en coordenadas comóviles

- Reescalamos el tiempo de tal manera que $g_{00} = +1$
- Elegimos unas coordenadas espaciales tal que no haya términos $dt\, dx^i$ en ds^2

Entonces,

$$ds^2 \;=\; dt^2 \;-\; a^2(t)\, \gamma_{ij}(\overrightarrow{x})\, dx^i\, dx^j$$

Vamos a ver las cantidades geométricas que aparecerán utilizando esta elección de coordenadas:

$$\Gamma^t_{tt} = 0 \quad ; \quad \Gamma^n_{nt} = \frac{a'(t)}{a(t)}$$

$$G_{00} = 3\left(\frac{a'(t)}{a(t)}\right)^2 \quad ; \quad G_{mn} = -\left(a'(t)^2 + 2\, a(t) a''(t)\right) \gamma_{mn}$$

donde $\gamma_{mn} = diag\left(\frac{1}{1-K\,r^2}, r^2, r^2 sen^2(\theta)\right)$

Si suponemos los campos homogéneos, esto es, en todos los puntos del espacio tridimensional de cada sección espacial, el campo toma es mismo valor para un instante del tiempo,

$$\varphi^q = \varphi^q(t)$$

la ecuación de movimiento se simplifica bastante:

$$g^{0\,0} = +1$$

$$[(\partial_\sigma g^{\sigma\mu}) \;+ \Gamma^\epsilon_{\epsilon\sigma}\, g^{\sigma\mu}]\; (\partial_\mu \varphi^q) \Rightarrow \left[(\partial_0 g^{0\,0}) \;+ \Gamma^\epsilon_{\epsilon\,0}\, g^{00}\right]\; (\partial_0 \varphi^q) = 3\; \left(\frac{\partial_t a(t)}{a(t)}\right)\; \partial_t \varphi(t)^q$$

Entonces

$$\partial_t^2 \varphi^q \;+ 3\; \left(\frac{\partial_t a(t)}{a(t)}\right)\; \partial_t \varphi^q +\, \Gamma^q_{ij}\, (\partial_t \varphi^i)\, (\partial_t \varphi^j) \;+\; \frac{1}{2\,\lambda}\, K^{qk}\, \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k} = 0$$

Si resolvemos las ecuaciones de Einstein para ver cómo evoluciona la métrica de Minkowski (toda la información está en el factor de escala)

- Componente $(0,0) \Longrightarrow G_{0\,0} = \frac{\kappa}{2} T_{0\,0}$

$$G_{0\,0} \;=\; 3\; \left(\frac{\partial_t a(t)}{a(t)}\right)^2$$

$$T_{0\,0} = -\left[\lambda\, K_{ij}\,(\partial_t \varphi^i)\,(\partial_t \varphi^j) + V(\varphi)\right]$$

Entonces

$$\left(\frac{\partial_t a(t)}{a(t)}\right)^2 = -\frac{\kappa}{6}\left[\lambda\, K_{ij}\,(\partial_t \varphi^i)\,(\partial_t \varphi^j) + V(\varphi)\right]$$

- Componente $(m,n) \Longrightarrow G_{m\,n} = \frac{\kappa}{2} T_{m\,n}$

$$G_{m\,n} = -\left[(\partial_t a(t))^2 +\, 2\,(\partial_t^2 a(t))\; a(t)\right]\, \gamma_{m\,n}$$

$$T_{m\,m} = -a^2(t)\,\gamma_{m\,n}\left[\lambda\, K_{ij}\,(\partial_t \varphi^i)\,(\partial_t \varphi^j) - V(\varphi)\right]$$

si además utilizamos el resultado anterior

$$\left(\frac{\partial_t a(t)}{a(t)}\right)^2 = -\frac{\kappa}{6}\left[\lambda\, K_{ij}\,(\partial_t \varphi^i)\,(\partial_t \varphi^j) + V(\varphi)\right]$$

Obtenemos

$$\left(\frac{\partial_t^2 a(t)}{a(t)}\right) = \frac{\kappa}{6}\left[2\,\lambda\, K_{ij}\,(\partial_t \varphi^i)\,(\partial_t \varphi^j) - V(\varphi)\right]$$

5 Número de e-folds y coordenadas espaciales comóviles

Haciendo un cambio $t \longrightarrow N(t)$ tal que

$$a(t) \longrightarrow e^{N(t)}$$

$$H = \frac{dN(t)}{dt} \longrightarrow e^{-A[t(N)]}$$

podemos rehacerlo todo con la métrica expresada en función del número de e-folds y suponiendo de nuevo homogeneidad

$$ds^2 \, = \, e^{2A(N)} dN^2 \, - \, e^{2N} \, \gamma_{ij}(\overrightarrow{x}) \, dx^i \, dx^j$$

Vamos a ver las cantidades geométricas que aparecerán utilizando esta elección de coordenadas:

$$\Gamma^N_{NN} = A'(N) \quad ; \quad \Gamma^n_{nN} = 1$$
$$G_{00} = 3 \quad ; \quad G_{mn} = e^{2[N-A(N)]}(2\,A'(N) - 3)\gamma_{mn}$$

donde $\gamma_{mn} = diag\left(\frac{1}{1-K\,r^2}, r^2, r^2 sen^2(\theta)\right)$

$$g^{0\,0} = e^{-2A(N)} \longrightarrow \partial_N g^{00} = -2\,(\partial_N A)\,g^{00}$$

$$[(\partial_\sigma g^{\sigma\mu}) \,+ \Gamma^\epsilon_{\epsilon\sigma}\,g^{\sigma\mu}]\;(\partial_\mu\varphi^q) \Rightarrow \left[(\partial_0 g^{0\,0}) \,+ \Gamma^\epsilon_{\epsilon\,0}\,g^{00}\right]\;(\partial_0\varphi^q) = e^{-2A(N)}(3 - \partial_N A)\;(\partial_N\varphi^q)$$

Entonces, sacando factor común g^{00} en el lado izquierdo de la ecuación

$$\partial^2_N\varphi^q \,+ (3 - \partial_N A)\;\,\partial_N\varphi^q + \,\Gamma^q_{ij}\,(\partial_N\varphi^i)\,(\partial_N\varphi^j) \,+\, \frac{1}{2\,\lambda}\,e^{2A(N)}\,K^{qk}\,\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi^k} = 0$$

Si resolvemos las ecuaciones de Einstein para ver cómo evoluciona la métrica de Minkowski (toda la información está en A(N))

- Componente $(0,0) \Longrightarrow G_{0\,0} = \frac{\kappa}{2}T_{0\,0}$

$$G_{0\,0} = 3$$
$$T_{0\,0} = -\left[\lambda\,K_{ij}\,(\partial_N\varphi^i)\,(\partial_N\varphi^j) + e^{2A(N)}V(\varphi)\right]$$

Entonces

$$3 = -\frac{\kappa}{2}\left[\lambda\,K_{ij}\,(\partial_N\varphi^i)\,(\partial_N\varphi^j) + e^{2A(N)}V(\varphi)\right]$$

de donde podemos extraer

$$V(\varphi) = -e^{-2A(N)}\left[\frac{6}{\kappa} + \lambda\,K_{ij}\,(\partial_N\varphi^i)\,(\partial_N\varphi^j)\right]$$

- Componente $(m,n) \Longrightarrow G_{m\,n} = \frac{\kappa}{2} T_{m\,n}$

$$G_{m\,n} = e^{2[N-A(N)]}(2\ \partial_N A(N)\ \ -3)\,\gamma_{m\,n}$$
$$T_{m\,m} = (-e^{2N}\,\gamma_{m\,n})\left[\lambda\,K_{ij}\,e^{-2A(N)}\,(\partial_N\varphi^i)\,(\partial_N\varphi^j) - V(\varphi)\right]$$

Entonces

$$(2\ \partial_N A(N)\ \ -3) = -\frac{\kappa}{2}\left[\lambda\,K_{ij}\,(\partial_N\varphi^i)\,(\partial_N\varphi^j) - e^{2A(N)}V(\varphi)\right]$$

Si además utilizamos el resultado anterior para la componente $(0,0)$, obtenemos

$$\partial_N A(N) = -\frac{\kappa}{2}\lambda\,K_{ij}\,(\partial_N\varphi^i)\,(\partial_N\varphi^j)$$

Sustituyendo directamente en la ecuación de movimiento:

- $$\partial_N^2\varphi^q + \left[3 + \frac{\kappa}{2}\lambda\,K_{ij}\,(\partial_N\varphi^i)\,(\partial_N\varphi^j)\right]\ \partial_N\varphi^q + \Gamma^q_{ij}\,(\partial_N\varphi^i)\,(\partial_N\varphi^j) -$$

$$-\ \ \frac{1}{2\,\lambda}\,K^{qk}\,\frac{1}{V(\varphi)}\left(\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi^k}\right)\left[\frac{6}{\kappa} + \lambda\,K_{ij}\,(\partial_N\varphi^i)\,(\partial_N\varphi^j)\right] = 0$$