# Métricas reales y su extensión compleja: Métricas complejas, hermíticas y de Kähler

## Contents

# 1 Métricas reales

Sea una variedad real $X$ y sea su métrica $(g)_{ij}$ (real) un tensor $(0,2)$, que aplica de forma lineal sobre la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}\right\}$ de tensores $(2,0)$ o sobre el doble producto $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\} \otimes \left\{\frac{\partial}{\partial x^j}\right\}$ de bases $(1,0)$ (que actuan sobre el espacio de funciones reales):

$$g = (g)_{ij}\ dx^i \otimes dx^j$$
$$g[T_{(2,0)}] = (g)_{ij} T^{ij}$$
$$g[P_{(1,0)}, Q_{(1,0)}] = (g)_{ij} P^i Q^j$$

A la aplicació $g$ sobre el producto de bases $(1,0) \otimes (1,0)$ siempre le exigiremos **conmutatividad**, esto es:

$$g[P,Q] = g[Q,P]$$

Esto se traduce en

$$g[P,Q] = (g)_{ij} P^i Q^j$$
$$g[Q,P] = (g)_{ij} Q^i P^j = (g^t)_{ji} P^j Q^i$$

Al ser, tanto $i$ como $j$ índices mudos (sumados), podemos extraer que

$$g = g^t$$

Luego, **conmutatividad de la aplicación** $g[P,Q] = g[Q,P]$ **implica simetricidad en la matriz de la aplicación** $(g)_{ij} = (g^t)_{ij} = (g)_{ji}$

Podemos verlo de una forma más elegante. De forma general:

$$g^t\,[P,Q] = (g^t)_{ij}P^iQ^j = (g)_{ji}Q^jP^i = g[Q,P]$$

$$g^t\,[Q,P] = (g^t)_{ij}Q^iP^j = (g)_{ji}P^jQ^i = g[P,Q]$$

Como $g$ es una aplicación $\quad g:\, T_pX \times T_pX \to \Re$

$$\{\, g[P,Q]\,\}^t = g[P,Q] = g^t\,[Q,P]$$

Luego si exigimos **conmutatividad**,

$$g[Q,P] = g[P,Q] \longrightarrow g[Q,P] = g^t\,[Q,P]$$

lo que conlleva **simetricidad** de la aplicación, en sí misma y en sus representaciones lineales,

$$g = g^t$$

# 2 Extensión compleja de métricas reales. Métricas complejas

Si tenemos una variedad real $X$ de dimensión par $n$ dotada de una métrica (también real), podemos hacer un mapping entre esa variedad real $X$ y una variedad compleja $X^C$ de dimensión compleja $\frac{n}{2}$, resultado de la *extensión compleja* .

$$g^C \; : T_pX^C \times T_pX^C \to C$$

y manteniendo

$$g \; : T_pX^C \times T_pX^C \to \Re$$

La extensión compleja de la métrica implica linealidad en $g$ permitiendo coeficientes complejos. Sean dos vectores complejos $z_1, z_2 \in T_pX^C$:

$$\begin{aligned} g^C[z_1, z_2] &= g[Re\{z_1\} + i\,Im\{z_1\}\;,\; Re\{z_2\} + i\,Im\{z_2\}] = \\ &= g[Re\{z_1\}, Re\{z_2\}] - g[Im\{z_1\}, Im\{z_2\}] + \\ &+ i\;(g[Im\{z_1\}, Re\{z_2\}] + g[Re\{z_1\}, Im\{z_2\}]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^C[z_1, \bar{z}_2] &= g[Re\{z_1\} + i\,Im\{z_1\}\;,\; Re\{z_2\} - i\,Im\{z_2\}] = \\ &= g[Re\{z_1\}, Re\{z_2\}] + g[Im\{z_1\}, Im\{z_2\}] + \\ &+ i\;(g[Im\{z_1\}, Re\{z_2\}] - g[Re\{z_1\}, Im\{z_2\}]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^C[\bar{z}_1, z_2] &= g[Re\{z_1\} - i\,Im\{z_1\}\;,\; Re\{z_2\} + i\,Im\{z_2\}] = \\ &= g[Re\{z_1\}, Re\{z_2\}] + g[Im\{z_1\}, Im\{z_2\}] - \\ &- i\;(g[Im\{z_1\}, Re\{z_2\}] - g[Re\{z_1\}, Im\{z_2\}]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^C[\bar{z}_1, \bar{z}_2] &= g[Re\{z_1\} - i\,Im\{z_1\}\;,\; Re\{z_2\} - i\,Im\{z_2\}] = \\ &= g[Re\{z_1\}, Re\{z_2\}] - g[Im\{z_1\}, Im\{z_2\}] - \\ &- i\;(g[Im\{z_1\}, Re\{z_2\}] + g[Re\{z_1\}, Im\{z_2\}]) \end{aligned}$$

*Propiedades de* $(g^C)$

- Como $g[P,Q] = g[Q,P]$

$$g^C[z_1,z_2] = g^C[z_2,z_1]\ ;\ g^C[\bar{z}_1,\bar{z}_2] = g^C[\bar{z}_2,\bar{z}_1]\ ;\ g^C[z_1,\bar{z}_2] = g^C[\bar{z}_2,z_1]$$

- Como $g[P,Q] \in \Re$

$$\Big\{g^C[z_1,z_2]\Big\}^* = g^C[\bar{z}_1,\bar{z}_2]\ ;\ \Big\{g^C[z_1,\bar{z}_2]\Big\}^* = g^C[\bar{z}_1,z_2]$$

- Si $g^C$ aplica sobre el mismo vector $(z_1 = z_2 \equiv z)$

$$g^C[z,\bar{z}] \in \Re \quad ; \quad g^C[z,z] \in C$$

En la variedad real $X$ de partida, la métrica $g \in \Re$ aplica sobre dos vectores reales $[P,Q]$ en la base coordenada $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$. Al hacer la extensión compleja, hacemos un combinación lineal con coeficientes complejos de los elementos de la base coordenada:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{i=1\cdots n} \in \Re \implies \left\{\frac{\partial}{\partial x^{a;\bar{a}}} \pm i\,\frac{\partial}{\partial x^{\frac{n}{2}+a;\bar{a}}}\right\}_{a;\bar{a}=1\cdots\frac{n}{2}} \iff \left\{\underbrace{\frac{\partial}{\partial z^a}}_{holomorfa}\ ,\ \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^a}}_{antiholomorfa}\right\}_{a;\bar{a}=1\cdots\frac{n}{2}} \in C$$

Entonces vemos que, para $V,W \in T_pX^C$:

$$g[V,W] \equiv g^C[V,W] + g^C[\bar{V},W] + g^C[V,\bar{W}] + g^C[\bar{V},\bar{W}]$$

O lo que es lo mismo

$$g = (g)_{ij}\,dx^i \otimes dx^j$$

$$g = (g^C)_{ab}\ dz^a \otimes dz^b + (g^C)_{a\bar{b}}\ dz^a \otimes d\bar{z}^{\bar{b}} + (g^C)_{\bar{a}b}\ d\bar{z}^{\bar{a}} \otimes dz^b + (g^C)_{\bar{a}\bar{b}}\ d\bar{z}^{\bar{a}} \otimes d\bar{z}^{\bar{b}}$$

Entonces, si exigimos **conmutatividad** en $g[P,Q] = g[Q,P]$:

- $\{\ g[P,Q]\ \}^t = g[Q,P]$
- $\Big\{g^C[z_1,z_2]\Big\}^* = g^C[\bar{z}_1,\bar{z}_2]\ ;\ \Big\{g^C[z_1,\bar{z}_2]\Big\}^* = g^C[\bar{z}_1,z_2]$

Hemos visto cómo la aplicación $g^C$ aplica en los diferentes subespacios vectoriales de $T_pX^C \times T_pX^C$. Sean $V,W \in T_pX^C$ :

- *holomorfo* $\times$*holomorfo*

$$g^C[V,W] = (g^C)_{ab}\, V^a W^b$$

- *holomorfo* $\times$*antiholomorfo*

$$g^C[V,\bar{W}] = (g^C)_{a\bar{b}}\, V^a \bar{W}^{\bar{b}}$$

- *antiholomorfo* $\times$*holomorfo*

$$g^C[\bar{V},W] = (g^C)_{\bar{a}b}\, \bar{V}^{\bar{a}} W^b$$

- *antiholomorfo* $\times$*antiholomorfo*

$$g^C[\bar{V},\bar{W}] = (g^C)_{\bar{a}\bar{b}}\, \bar{V}^{\bar{a}} \bar{W}^{\bar{b}}$$

Utilizando las propiedades de simetricidad y conjugación que obtuvimos antes, vemos que, en notación indicial:

• Como $g[P,Q] = g[Q,P]$

$$(g^C)_{ab} = (g^C)_{ba}\ ;\ (g^C)_{\bar{a}\bar{b}} = (g^C)_{\bar{b}\bar{a}}\ ;\ (g^C)_{a\bar{b}} = (g^C)_{\bar{b}a}\ ;\ (g^C)_{\bar{a}b} = (g^C)_{b\bar{a}}$$

•Como $g[P,Q] \in \Re$

$$\left\{(g^C)_{ab}\right\}^* = (g^C)_{\bar{a}\bar{b}}\ ;\ \left\{(g^C)_{\bar{a}\bar{b}}\right\}^* = (g^C)_{ab}\ ;\ \left\{(g^C)_{a\bar{b}}\right\}^* = (g^C)_{\bar{a}b}\ ;\ \left\{(g^C)_{\bar{a}b}\right\}^* = (g^C)_{a\bar{b}}$$

# 3 Métricas complejas hermíticas

Una métrica $(g^C)$ se denomina hermítica si cumple que sus únicas componentes no nulas son las que mezclan las partes holomorfa y antiholomorfa:

$$(g^c)_{ab} = (g^c)_{\bar{a}\bar{b}} = 0$$

eso es

$$g[VW] = g^C[V\bar{W}] + g^C[\bar{V}W] = g^C[V,\bar{W}] + \left\{g^C[V,\bar{W}]\right\}^* = 2Re\left\{g^C[V\bar{W}]\right\}$$

$$g = (g^C)_{a\bar{b}}\ dz^a \otimes d\bar{z}^{\bar{b}} + (g^C)_{\bar{a}b}\ d\bar{z}^{\bar{a}} \otimes dz^b = 2Re\left\{(g^C)_{a\bar{b}}\ dz^a \otimes d\bar{z}^{\bar{b}}\right\}$$

Al pasarlo a notación indicial, podemos verlo de dos maneras:

$$g[VW] = (g^C)_{a\bar{b}}V^a\bar{W}^{\bar{b}} + (g^C)_{\bar{a}b}\bar{V}^{\bar{a}}W^b = (g^C)_{a\bar{b}}\left[V^a\bar{W}^{\bar{b}} + W^a\bar{V}^{\bar{b}}\right]$$

$$\begin{aligned} g[VW] &= (g^C)_{a\bar{b}}V^a\bar{W}^{\bar{b}} + (g^C)_{\bar{a}b}\bar{V}^{\bar{a}}W^b = (g^C)_{a\bar{b}}V^a\bar{W}^{\bar{b}} + \left[(g^C)_{a\bar{b}}V^a\bar{W}^{\bar{b}}\right]^* = \\ &= 2\ Re\left\{(g^C)_{a\bar{b}}V^a\bar{W}^{\bar{b}}\right\} \end{aligned}$$

Entonces, si $g^C$ es hermítica:

$$g^C:\ T_pX^C \times T_pX^C \longrightarrow C$$

aunque

$$g:\ T_pX^C \times T_pX^C \longrightarrow \Re$$

Esto también lo podemos ver como:

$$g[z_1, z_2] = g^C[z_1, \bar{z}_2] + g^C[\bar{z}_1, z_2] = 2\left(g[Re\{z_1\}, Re\{z_2\}] + g[Im\{z_1\}, Im\{z_2\}]\right)$$

Que una métrica compleja $g^C$ sea hermítica es equivalente a decir que su métrica real origen $g$ tiene como simetría a la aplicación:

$$\Im : T_pX \to T_pX$$

tal que

$$\Im^2 = -I$$

Esto es

$$g[\Im P, \Im Q] = g[P, Q]$$

• Podemos utilizar el potencial escalar $V(z^1, \cdots z^{\frac{n}{2}}; \bar{z}^{\bar{1}}, \cdots, \bar{z}^{\frac{\bar{n}}{2}}) \in \Re$ de la teoría SUGRA como función del espacio de funciones reales definidas sobre la variedad compleja $X^C$ sobre la que construir tensores.

## 3.1 Tensor gradiente (espacio cotangente): $\epsilon$

Comentemos antes que nada que el espacio tangente y el cotangente de $X^C$ tienen un mapping a través de la métrica y que las contracciones invariantes (escalares) que calculemos no dependen de que estemos contrayendo en un espacio o en otro. Tras esto, podemos definir la contracción del vector gradiente de $V$ (*velocidad* cuadrática )

$$D_a V = \frac{\partial V}{\partial z^a} = V_a \quad ; \quad D_{\bar{a}} V = \frac{\partial V}{\partial \bar{z}^{\bar{a}}} = V_{\bar{a}}$$

Entonces, como los dos argumentos de $g[\ ;\ ]$ son el mismo covector, se cumple que:

$$(g^C)[z, \bar{z}] \in \Re$$

y obtenemos

$$g[\bigtriangledown V, \bigtriangledown V] = g^C[\bigtriangledown V, \bar{\bigtriangledown} V] + g^C[\bar{\bigtriangledown} V, \bigtriangledown V] = 2\, g^C[\bigtriangledown V, \bar{\bigtriangledown} V] = 2 (g^C)^{a\bar{b}}\ V_a V_{\bar{b}}$$

Podemos definir un parámetro $\epsilon \in \Re$ sin dimensiones que cuantifique esta *velocidad cuadrática* y que esté normalizado:

$$\epsilon \equiv (M_P^2) \frac{g[\bigtriangledown V, \bigtriangledown V]}{2\, V^2}$$

•Si utilizamos la base compleja:

$$g[\bigtriangledown V, \bigtriangledown V] = 2 (g^C)^{a\bar{b}}\ V_a V_{\bar{b}}$$

resultando,

$$\epsilon \equiv (M_P^2) \frac{(g^C)^{a\bar{b}}\ V_a V_{\bar{b}}}{V^2}$$

•Si utilizamos la base real (sin extensión compleja):

$$D_i V = \frac{\partial V}{\partial x^i} = V_i$$

Entonces

$$g[\bigtriangledown V, \bigtriangledown V] = (g)^{ij}\ V_i V_j$$

resultando,

$$\epsilon \equiv (M_P^2) \frac{(g)^{ij}\ V_i V_j}{2\, V^2}$$

## 3.2 Tensor Hessiano (cotangente×cotangente): $\eta$

Vamos a desarrollar lo que sería la expresión del Hessiano manifiestamente covariante con una normalización al igual que hicimos con el parámetro $\epsilon$.

Para calcular el Hessiano, partiendo del gradiente (que es un tensor de orden 1 covariante), hemos de calcular su derivada covariantizada:

$$D_b D_a V = D_b V_a = \partial_b V_a - \Gamma^m_{ba} V_m$$

$$D_{\bar{b}} D_a V = D_{\bar{b}} V_a = \partial_{\bar{b}} V_a - \Gamma^m_{\bar{b}a} V_m$$
$$D_b D_{\bar{a}} V = D_b V_{\bar{a}} = \partial_b V_{\bar{a}} - \Gamma^{\bar{m}}_{b\bar{a}} V_{\bar{m}}$$
$$D_{\bar{b}} D_{\bar{a}} V = D_{\bar{b}} V_{\bar{a}} = \partial_{\bar{b}} V_{\bar{a}} - \Gamma^{\bar{m}}_{\bar{b}\bar{a}} V_{\bar{m}}$$

Definamos las siguientes cantidades:

$$\square^{\bar{c}}{}_a = (g^C)^{\bar{c}b} D_b D_a V = D^{\bar{c}} V_a = (g^C)^{\bar{c}b} \left(\partial_b V_a - \Gamma^m_{ba} V_m\right)$$
$$\square^{c}{}_a = (g^C)^{c\bar{b}} D_{\bar{b}} D_a V = D^{c} V_a = (g^C)^{c\bar{b}} \left(\partial_{\bar{b}} V_a - \Gamma^m_{\bar{b}a} V_m\right)$$
$$\square^{\bar{c}}{}_{\bar{a}} = (g^C)^{\bar{c}b} D_b D_{\bar{a}} V = D^{\bar{c}} V_{\bar{a}} = (g^C)^{\bar{c}b} \left(\partial_b V_{\bar{a}} - \Gamma^{\bar{m}}_{b\bar{a}} V_{\bar{m}}\right)$$
$$\square^{c}{}_{\bar{a}} = (g^C)^{c\bar{b}} D_{\bar{b}} D_{\bar{a}} V = D^{c} V_{\bar{a}} = (g^C)^{c\bar{b}} \left(\partial_{\bar{b}} V_{\bar{a}} - \Gamma^{\bar{m}}_{\bar{b}\bar{a}} V_{\bar{m}}\right)$$

Podemos definir una matriz $\eta \in C$ sin dimensiones que cuantifique esta *curvatura* y que esté normalizada:

$$\eta \equiv (M_P^2) \frac{\square}{V}$$

•Si utilizamos la base compleja:

$$(\eta)^{\bar{c}}{}_a \equiv (M_P^2) \frac{\square^{\bar{c}}{}_a}{V} \quad ; \quad (\eta)^{c}{}_a \equiv (M_P^2) \frac{\square^{c}{}_a}{V} \quad ; \quad (\eta)^{\bar{c}}{}_{\bar{a}} \equiv (M_P^2) \frac{\square^{\bar{c}}{}_{\bar{a}}}{V} \quad ; \quad (\eta)^{c}{}_{\bar{a}} \equiv (M_P^2) \frac{\square^{c}{}_{\bar{a}}}{V}$$

$$(\eta)^{\bar{c}}{}_a = [(\eta)^{c}{}_{\bar{a}}]^* \quad ; \quad (\eta)^{\bar{c}}{}_{\bar{a}} = [(\eta)^{c}{}_{a}]^*$$

$\Rightarrow$ Los autovalores de $(\eta)^{\bar{c}}{}_a$ y $(\eta)^{c}{}_{\bar{a}}$ NO son invariantes frente a una transformación compleja (QUE RESPETE HOLOMORFICIDAD) de coordenadas complejas, ya que la transformación de uno de los índices es la INVERSA-CONJUGADA del otro. Los autovalores de $(\eta)^{c}{}_a$ y $(\eta)^{\bar{c}}{}_{\bar{a}}$ SÍ son invariantes. Sólo para el subconjunto de las transformaciones REALES de coordenadas complejas, los autovalores de las 4 matrices son independientes de la elección de coordenadas complejas.

•Si utilizamos la base real (sin extensión compleja, $\eta \in \Re$):

$$\Box^i{}_j = (g)^{ik} D_k D_j V = D^i V_j = (g)^{ik} \left( \partial_k V_j - \Gamma^m_{kj} V_m \right)$$

resultando

$$(\eta)^i{}_j \equiv (M_P^2) \frac{\Box^i{}_j}{V}$$

$\Rightarrow$ Los autovalores de esta matriz SÍ son invariantes frente a una transformación real de coordenadas reales, ya que la transformación de uno de los índices es la INVERSA del otro.

# 4 Métricas complejas hermíticas de Kähler

Si tenemos una métrica compleja hermíca $g^C$, podemos construir la (1,1)-forma

$$\begin{aligned} J &= i \left[ (g^C)_{a\bar{b}} \; dz^a \otimes d\bar{z}^{\bar{b}} - (g^C)_{\bar{a}b} \; d\bar{z}^{\bar{a}} \otimes dz^b \right] = \\ &= i \; (g^C)_{a\bar{b}} \left[ dz^a \otimes d\bar{z}^{\bar{b}} - d\bar{z}^{\bar{b}} \otimes dz^a \right] = i \; (g^C)_{a\bar{b}} \;\; dz^a \wedge d\bar{z}^{\bar{b}} \end{aligned}$$

Una métrica hermítica $g^C$ se dice de Kähler si la (1,1)-forma $J$ construida a partir de ella es una forma cerrada. Esto es:

$$dJ = (\partial + \bar{\partial}) J = 0$$

La condición $dJ = 0$ implica

$$\frac{\partial (g^C)_{a\bar{b}}}{\partial z^m} = \frac{\partial (g^C)_{m\bar{b}}}{\partial z^a} \;\; ; \;\; \frac{\partial (g^C)_{\bar{a}b}}{\partial \bar{z}^{\bar{m}}} = \frac{\partial (g^C)_{\bar{m}b}}{\partial \bar{z}^{\bar{a}}}$$

Esta condición hace que se anulen todos los Christoffels de tipo:

$$\Gamma^{\bar{m}}_{ab} = 0 \; ; \; \Gamma^{m}_{\bar{a}b} = 0 \; ; \; \Gamma^{m}_{a\bar{b}} = 0 \; ; \; \Gamma^{\bar{m}}_{\bar{a}b} = 0 \; ; \; \Gamma^{\bar{m}}_{a\bar{b}} = 0 \; ; \; \Gamma^{m}_{\bar{a}\bar{b}} = 0$$

y sólo sobrevivan los de los dos tipos siguientes:

$$\Gamma^{m}_{ab} = \frac{1}{2} (g^C)^{m\bar{t}} \left[ \frac{\partial (g^C)_{\bar{t},b}}{\partial z^a} + \underbrace{\frac{\partial (g^C)_{a,\bar{t}}}{\partial z^b}}_{\frac{\partial (g^C)_{b,\bar{t}}}{\partial z^a}} - \underbrace{\frac{\partial (g^C)_{ab}}{\partial \bar{z}^{\bar{t}}}}_{0} \right] \underbrace{\longrightarrow}_{(g^C)_{\bar{t}b} = (g^C)_{b\bar{t}}} = (g^C)^{m\bar{t}} \;\; \frac{\partial (g^C)_{b,\bar{t}}}{\partial z^a}$$

$$\Gamma^{\bar{m}}_{\bar{a}\bar{b}} = \frac{1}{2} (g^C)^{\bar{m}t} \left[ \frac{\partial (g^C)_{t\bar{b}}}{\partial \bar{z}^{\bar{a}}} + \underbrace{\frac{\partial (g^C)_{\bar{a}t}}{\partial \bar{z}^{\bar{b}}}}_{\frac{\partial (g^C)_{\bar{b}t}}{\partial \bar{z}^{\bar{a}}}} - \underbrace{\frac{\partial (g^C)_{\bar{a}\bar{b}}}{\partial z^t}}_{0} \right] \underbrace{\longrightarrow}_{(g^C)_{t\bar{b}} = (g^C)_{\bar{b}t}} = (g^C)^{\bar{m}t} \;\; \frac{\partial (g^C)_{\bar{b},t}}{\partial \bar{z}^{\bar{a}}}$$

La condición $dJ = 0$ implica que la métrica $g^C$ se puede obtener a partir de una función $K$. Esta función $K(z^1, \cdots z^{\frac{n}{2}}; \bar{z}^{\bar{1}}, \cdots, \bar{z}^{\frac{\bar{n}}{2}})$ se conoce como potencial de Kähler y no tiene caracter de escalar, sino que es simplemente una función compleja del espacio de funciones complejas definidas en el parche de $X^C$cuyas coordenadas locales estemos usando.

$$(g^C)_{a\bar{b}} = \frac{\partial K}{\partial z^a \partial \bar{z}^{\bar{b}}} \equiv (K)_{a\bar{b}} \; ; \; (g^C)_{\bar{a}b} = \frac{\partial K}{\partial \bar{z}^{\bar{a}} \partial z^b} \equiv (K)_{\bar{a}b}$$

## 4.1 $\epsilon$ y $\eta$ para $g^C \equiv (K)$ siendo hermítica y de Kähler

Ahora, para simplificar los parámetros $\epsilon$ y $\eta$, exigiremos, además de hermiticidad, que $g^C = (K)$ sea una métrica hermítica y de Kähler. Esto no simplifica la expresión de $\epsilon$, pero sí la de $\eta$, ya que

$$\Gamma^m_{\bar{b}a} = 0 \quad ; \quad \Gamma^{\bar{m}}_{b\bar{a}} = 0 \quad ; \quad \Gamma^m_{ba} = (K)^{m\bar{t}} \ \frac{\partial (K)_{a,\bar{t}}}{\partial z^b} \quad ; \quad \Gamma^{\bar{m}}_{\bar{b}\bar{a}} = (K)^{\bar{m}t} \ \frac{\partial (K)_{\bar{a},t}}{\partial \bar{z}^{\bar{b}}}$$

Entonces, vemos que ahora:

$$\Box^{\bar{c}}{}_a = (K)^{\bar{c}b} \left( \partial_b V_a - (K)^{m\bar{t}} \ \frac{\partial (K)_{a,\bar{t}}}{\partial z^b} \ V_m \right)$$

$$\Box^c{}_a = (K)^{c\bar{b}} \left( \partial_{\bar{b}} V_a \right)$$

$$\Box^{\bar{c}}{}_{\bar{a}} = (K)^{\bar{c}b} \left( \partial_b V_{\bar{a}} \right)$$

$$\Box^c{}_{\bar{a}} = (K)^{c\bar{b}} \left( \partial_{\bar{b}} V_{\bar{a}} - (K)^{\bar{m}t} \ \frac{\partial (K)_{\bar{a},t}}{\partial \bar{z}^{\bar{b}}} \ V_{\bar{m}} \right)$$

Recordando la definición de la matriz $\eta$:

$$\eta \equiv (M_P^2) \frac{\Box}{V}$$

•Si utilizamos la base compleja:

$$(\eta)^{\bar{c}}{}_a \equiv (M_P^2) \frac{\Box^{\bar{c}}{}_a}{V} \quad ; \quad (\eta)^c{}_a \equiv (M_P^2) \frac{\Box^c{}_a}{V} \quad ; \quad (\eta)^{\bar{c}}{}_{\bar{a}} \equiv (M_P^2) \frac{\Box^{\bar{c}}{}_{\bar{a}}}{V} \quad ; \quad (\eta)^c{}_{\bar{a}} \equiv (M_P^2) \frac{\Box^c{}_{\bar{a}}}{V}$$

•Si utilizamos la base real (sin extensión compleja):

$$\Box^i{}_j = (K)^{ik} D_k D_j V = D^i V_j = (K)^{ik} \left( \partial_k V_j - \Gamma^m_{kj} V_m \right)$$

resultando

$$(\eta)^i{}_j \equiv (M_P^2) \frac{\Box^i{}_j}{V}$$

Recordando la definición de $\epsilon$:

$$\epsilon \equiv (M_P^2) \frac{g[\bigtriangledown V, \bigtriangledown V]}{2\, V^2}$$

$\bullet$Si utilizamos la base compleja:

$$K[\bigtriangledown V, \bigtriangledown V] = 2(K)^{a\bar{b}}\ V_a V_{\bar{b}}$$

resultando,

$$\epsilon \equiv (M_P^2) \frac{(K)^{a\bar{b}}\ V_a V_{\bar{b}}}{V^2}$$

$\bullet$Si utilizamos la base real (sin extensión compleja):

$$D_i V = \frac{\partial V}{\partial x^i} = V_i$$

Entonces

$$K[\bigtriangledown V, \bigtriangledown V] = (K)^{ij}\ V_i V_j$$

resultando,

$$\epsilon \equiv (M_P^2) \frac{(K)^{ij}\ V_i V_j}{2\, V^2}$$

## 5 Kähler real: $K(z^1, \cdots z^{\frac{n}{2}}; \bar{z}^{\bar{1}}, \cdots, \bar{z}^{\frac{\bar{n}}{2}}) \in \Re$

Si $K$ pertenece (dentro del espacio de funciones complejas definidas sobre la variedad $X^C$) al subespacio de las funciones reales definidas sobre $X^C$, $K(z^1, \cdots z^{\frac{n}{2}}; \bar{z}^{\bar{1}}, \cdots, \bar{z}^{\frac{\bar{n}}{2}}) \in \Re$:

$$g[VW] = (g^C)_{a\bar{b}} V^a \bar{W}^{\bar{b}} + (g^C)_{\bar{a}b} \bar{V}^{\bar{a}} W^b = 2\,(g^C)_{a\bar{b}}\ Re\left\{V^a \bar{W}^{\bar{b}}\right\}$$

donde

$$(g^C)_{a\bar{b}} = (K)_{a\bar{b}} \quad ; \quad (g^C)_{\bar{a}b} = (K)_{\bar{a}b}$$

En términos de la métrica, si $(K)_{a\bar{b}} = (K)_{\bar{a}b}$:

$$\begin{aligned} K &= (K)_{a\bar{b}} \left[dz^a \otimes d\bar{z}^{\bar{b}} + dz^{\bar{a}} \otimes dz^b\right] = \\ &= 2(K)_{a\bar{b}}\ Re\left\{dz^a \otimes d\bar{z}^{\bar{b}}\right\} = 2(K)_{a\bar{b}} \left[dRe\left\{z^a\right\} \otimes dRe\left\{z^b\right\} + dIm\left\{z^a\right\} \otimes dIm\left\{z^b\right\}\right] \end{aligned}$$

Resultando:

$$(K)_{Re\{z^a\}Re\{z^b\}} = 2(K)_{a\bar{b}}$$
$$(K)_{Im\{z^a\}Im\{z^b\}} = 2(K)_{a\bar{b}}$$