Modelo matemático de un Universo en presencia de una 3-*brana*

Adolfo Guarino Almeida

15 de noviembre de 2005

Resumen

En estas notas se construye un modelo matemático de Universo sin dimensiones extras. Al final, nos centraremos en el modelo de Randall-Sundrum con 1 dimensión extra no compacta y con la presencia de una 3-brana en la que se encuentra confinada el Modelo Estándar.

Índice

1. Introducción

Estas notas son un desarrollo ordenado de la estructura matemática sobre la que se construye un modelo de Universo, entendiendo éste como un soporte espacio-temporal (4-dimensional) en el que incluimos un contenido de materia. El soporte espacio-temporal interacciona consigo mismo y con el contenido de materia, el cual también interacciona consigo mismo. Éste contenido de materia se estructura en vectores pertenecientes a los espacios de representaciones de ciertos grupos de simetría del Lagrangiano de la teoría. Luego, se abordará el tema del concepto de evolución entendida como interacción. Interpretaremos esta evolución de forma geométrica para distintos tipos de grupos y clasificaremos backgrounds. Una vez hecho eso, consideraremos configuraciones del contenido de materia que minimizan la acción y la degeneración del estado de vacío del contenido de materia a la hora de construir la teoría perturbativa. Esto nos llevará directamente al concepto de defecto topológico como configuración no trivial de estado de vacío del contenido de materia del Universo. En el último tramo de estas notas, generalizaremos lo anterior al caso de un espacio-tiempo de dimensión 4+n apareciendo conceptos más globales que generalizan la teoría 4-dimensional como son las p-branas. Veremos cómo, confinando el modelo estándar a un 3-brana en un espacio-tiempo de dimensión 5 con 1 dimensión extra no necesariamente compacta, se pueden reproducir la ley de Newton y la Relatividad General. Además, obtendremos la escala de Plank para nuestra teoría como una función de la curvatura de la dimensión extra. Esto se deducirá utilizando un background métrico que induce una métrica 4-dimensional (del sub espacio-tiempo en el que vivimos) que también depende, de forma general, de la coordenada en la dimensión extra. Esto es, un background métrico no factorizable. El punto clave final es ver que todo esto está bien definido para el caso en el que la dimensión extra tiene radio de curvatura $r_c = \inf$ y tenemos el caso de dimensión extra no compacta. Esto representa pues una teoría matemática del Universo en la que tenemos dimensiones extras sin compactificar y que origina una escala de Plank finita.

2. La manifold M del espacio-tiempo

2.1. Tensor-world

De lo que partimos en primer lugar es de que todo lo que ocurre (conjunto de sucesos), ocurre en un soporte llamado espacio-tiempo M. Este espacio-tiempo es una manifold, es decir, un espacio topológico en el que tenemos definido un conjunto completo de cartas $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ que conforman un atlas que nos permite operar gracias a las aplicaciones

$$\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset M \longrightarrow R^n$$
$$P \in U_\alpha \subset M \longrightarrow (x_1^{(\alpha)} \dots x_n^{(\alpha)})$$

las cuales asignan coordenadas euclídeas asociadas a una carta.

Para los puntos P que pertenecen al solape de abiertos asociados a dos cartas distintas, $P \in U_\alpha \cap U_\beta$, han de existir funciones C^∞ que me relacionen sus coordenadas euclídeas en las diferentes cartas a las que pertenecen, esto es, $(\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1})$,

$$(\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1}) : (x_1^{(\alpha)} \dots x_n^{(\alpha)}) \longrightarrow (x_1^{(\beta)} \dots x_n^{(\beta)})$$

En cada punto $P \in U_\alpha$ de la manifold M podemos expandir el espacio vectorial tangente $T_P(M)$ con base $\left\{\partial_\mu^{(\alpha)}\right\}$ y el espacio vectorial cotangente $T_P^*(M)$ con base $\left\{dx_{(\alpha)}^\mu\right\}$. Los vectores $V^{(\alpha)} = V^{(\alpha)\mu}\partial_\mu^{(\alpha)}$ son pues combinaciones lineales de los elementos de la base del espacio tangente y las 1-formas $w^{(\alpha)} = w_\mu^{(\alpha)} dx_{(\alpha)}^\mu$ son combinaciones lineales de la base del espacio cotangente.

Las bases de estos espacios vectoriales hay que entenderlas como aplicaciones:

- Base de $T_P(M)$:

$$\begin{aligned} \partial_\mu : F &\longrightarrow R \\ f(x) &\longrightarrow \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}\right]_P \end{aligned}$$

  donde F es el conjunto de funciones reales definidas sobre la manifold M.

  Para puntos $P \in U_\alpha \cap U_\beta$ que pertenezcan al solape de dos cartas, las coordenadas de un vector se transforman como:

$$V_{(\beta)}^\mu = \frac{\partial x_{(\beta)}^\mu}{\partial x_{(\alpha)}^\nu} V_{(\alpha)}^\nu$$

- Base de $T_P^*(M)$:

$$\begin{aligned} dx^\mu : T_P(M) &\longrightarrow R \\ \partial_\nu &\longrightarrow \delta_\nu^\mu \end{aligned}$$

  Para puntos $P \in U_\alpha \cap U_\beta$ que pertenezcan al solape de dos cartas, las coordenadas de una 1-forma se transforman como:

$$w_\mu^{(\beta)} = \frac{\partial x_{(\alpha)}^\nu}{\partial x_{(\beta)}^\mu} w_\nu^{(\alpha)}$$

Esto nos permite definir en cada punto objetos conocidos como tensores que viven en el $tensor - world$ y que tienen bien definida su transformación de coordenadas en los puntos que pertenecen a la intersección de cartas. Un tensor $T^{(\alpha)}(r,s)$ definido en el punto $P \in U_\alpha$ vive en el espacio producto de r espacios tangentes y s espacios cotangentes en ese punto P,

$$T = T_{\nu_1 \cdots \nu_s}^{\mu_1 \cdots \mu_r} \cdot \partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_s}$$

2.2. Aplicaciones φ definidas en la manifold M y derivadas tensoriales

Sobre la variedad, vamos a definir unas aplicaciones $\varphi : M \longrightarrow M$ tal que me transforma unos puntos en otros (siempre dentro de la manifold M)

$$Q = \varphi(P)$$

Esta aplicación en la variedad la podemos establecer entre puntos de la manifold M incluso cuando pertenezcan a cartas distintas con un conjunto de coordenadas distintas cada una. El punto clave, es que elegir una aplicación φ implica no sólo el conocer cómo se transforman los puntos, sino también cómo se transforman los tensores. Esto se llaman transformaciones inducidas en el $tensor - world$ debido a la aplicación φ. A la transformación genérica inducida sobre un tensor se le llama 'pull-back'[1] y obtenemos el tensor transformado. Podemos ver cómo se transforman vectores y 1-formas y luego generalizar para cualquier número de índices de cada tipo.

- Vector del espacio tangente: $V'^{\mu}(Q) = \left[\frac{\partial \varphi^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right]_P V^{\nu}(P)$
- 1-forma del espacio cotangente: $w'_{\mu}(Q) = \left[\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \varphi^{\mu}}\right]_P w_{\nu}(P)$

Esta transformación inducida en los espacios tangente y cotangente, nos permite definir una variación o derivada covariante (tensor - tensor) sobre el world-tensor. Para definir una derivada covariante hemos de escoger una aplicación φ que me transforma los puntos entre sí. Ésta es la regla de transporte. Transformamos el tensor haciendo el 'pull-back' y obtenemos el tensor transformado. Calculamos la diferencia entre el tensor transformado y el original (EVALUADOS EN EL MISMO PUNTO) y dividimos por un cierto parámetro que tiene que ver con la regla de transporte, tomando el límite en el que el parámetro tiende a cero. Para seleccionar una transformación φ que nos defina la regla de transporte, hemos de elegir un elemento extra como pueda ser la congruencia de un campo de vectores o una conexión afín. Los dos casos más interesantes de derivadas covariantes son:

- Derivada de Lie:
  - Como elemento extra tenemos un campo vectorial X a lo largo del cual se efectúa la derivada. La aplicación φ es la transformación infinitesimal asociada a la congruencia del campo X (transporte de Lie).
  - Se reduce a la parcial direccional en el caso de tensores de orden cero (escalares).
  - La regla de transporte es el transporte de Lie.
  - La expresión es distinta según el objeto sobre el que actúe:
    - Escalares: $\mathcal{L}_X f = X^{\mu} f_{,\mu}$
    - Vectores: $\mathcal{L}_X V^{\mu} = V^{\mu}{}_{,\nu} X^{\nu} - V^{\nu} X^{\mu}{}_{,\nu}$
    - 1-formas: $\mathcal{L}_X w_{\mu} = w_{\mu}{}_{,\nu} X^{\nu} + w_{\nu} X^{\nu}{}_{,\mu}$
- Derivada Covariante:
  - Como elemento extra tenemos un campo que no es un tensor del $tensor - world$ llamado la conexión afín del espacio-tiempo Γ[2]. No

[1] Realmente, sobre los vectores se define el 'push-forward' y sobre las 1-formas se define el 'pull-back'

[2] En un espacio-tiempo que no sea afinmente conectado no podremos definir esta derivada, aunque sí podremos definir la derivada de Lie, pues no depende de la conexión

todos las variedades son afinmente conectadas (tienen definida la estructura de una conexión), por lo que no podremos definir este tipo de derivada en todos los espacio-tiempo's, aunque sí en la mayoría de los casos.

- Si la variedad es métrica (tiene definida una estructura llamada métrica $g_{\mu\nu}$ que me relaciona vectores y 1-formas, pues es un tensor tipo (0,2) y simétrico), entonces la métrica es invariante bajo esta derivada. Esto es lo que se conoce como el 'Postulado Métrico' y nos permite determinar la conexión afín a partir de una métrica dada.
- Se reduce a la derivada parcial en el caso de tensores de orden cero (escalares).
- La regla de transporte es el transporte paralelo.
- La expresión es distinta según el objeto sobre el que actúe:
  - Escalares: $D_\mu f = \partial_\mu f$
  - Vectores: $D_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\rho} V^\rho$
  - 1-formas: $D_\mu w_\nu = \partial_\mu w_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} w_\rho$

El sentido físico de la conexión afín como una estructura definida sobre toda la manifold es de crucial importancia para entender luego la interpretación geométrica de los campos gauge cuando implementemos la materia en el Universo. Cuando tenemos un tensor del $tensor-world$ de tipo(r,s)y calculamos su derivada covariante (utilizando el transporte paralelo como regla de transpote) en un punto $P \in M$, lo que estamos calculando es su variación total a lo largo de la coordenada λ:

$$D_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\nu_s} = \underbrace{\partial_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\nu_s}} + \underbrace{\Gamma^{\mu_1}_{\lambda\tau} T^{\tau\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\nu_s} - \Gamma^{\tau}_{\lambda\nu_1} T^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\tau\cdots\nu_s}}$$

Vemos que hay dos aportaciones a la derivada covariante de un tensor evaluada en un punto $P \subset M$:

- Una primera aportación debida a la propia variación del tensor, como campo tensorial, en el punto P. Es curioso notar que la variación propia de una componente del tensor es el resultado de considerar esta componente como la función escalar representante del espacio de funciones reales definidas sobre la variedad F sobre la que actúa la base de vectores $\{\partial_\lambda\}$ del espacio tangente en el punto P. Esta variación de cada componente del tensor, sólo depende de dicha componente en sí misma

- Una segunda aportación debida a la mezcla entre componentes del tensor que viene regida por la conexión afín.

Si queremos que la derivada covariante de un tensor del $tensor-world$ siga siendo un tensor del $tensor-world$, esto impone que para puntos $P \in U_\alpha \cap U_\beta$, la forma de transformar la conexión afín ha de ser:

$$\Gamma^{(\beta)\lambda}_{\mu\nu}(x_{(\beta)}) = \frac{\partial x^\lambda_{(\beta)}}{\partial x^\rho_{(\alpha)}} \frac{\partial x^\tau_{(\alpha)}}{\partial x^\mu_{(\beta)}} \frac{\partial x^\sigma_{(\alpha)}}{\partial x^\nu_{(\beta)}} \Gamma^{(\alpha)\rho}_{\tau\sigma}(x_{(\alpha)}) - \frac{\partial x^\rho_{(\alpha)}}{\partial x^\nu_{(\beta)}} \frac{\partial x^\sigma_{(\alpha)}}{\partial x^\mu_{(\beta)}} \frac{\partial^2 x^\lambda_{(\beta)}}{\partial x^\rho_{(\alpha)} \partial x^\sigma_{(\alpha)}}$$

2.3. Espacio-tiempo afinmente conectado. Torsión y Curvatura

Para las manifolds afinmente conectadas podemos definir dos tensores que pertenecen al $world - tensor$ y que nos dan información sobre la manifold:

- Curvatura:

$$R_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$$

- Torsión:

$$T^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}$$

De la torsión no se sabe mucho acerca de su significado físico, pero en cambio, la curvatura jugará un papel crucial en la interpretacíń geométrica de la interacción (evolución no trivial) entre las partículas que componen el contenido de materia del Universo.

3. La materia en el Universo

3.1. Introducción

Ya hemos visto cómo desarrollar una teoría matemática para el espacio-tiempo. Ahora nos vamos a centrar en el modelo matemático para clasificar las partículas en relación a unos determinados grupos de simetría del Lagrangiano de la teoría.

El Modelo-Estándar de la Física de Paríńculas se basa en la simetría de la teoría bajo el grupo $G = SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$, esto es, las partículas del contenido material del Universo, se agrupan en vectores de los distintos espacios de representaciones del grupo G. La representación del grupo total se puede escribir como producto de representaciones de sus grupos constituyentes. Las partículas se agrupan en vectores de los espacios de representaciones de estos grupos. En cada uno, las partículas conforman vectores que se pueden escribir como combinación lineal de los estados del diagrama de pesos de la representación. Estos estados base (pesos de la representación) se obtienen reescribiendo el álgebra del grupo en la forma de Cartan tras combinar los generadores de la manera que induce la diagonalización simultánea del mayor número posible de generadores que conmuten entre ellos (Cartans).

3.2. Fibrados

El concepto matemático que aparece de forma natural en este contexto es el concepto de espacio fibrado. Un espacio fibrado se compone de un espacio base, que será la manifold del espacio-tiempo M y de un espacio fibra. Este espacio fibra se compone de fibras que se abren en cada punto de espacio-tiempo. En cada punto del espacio-tiempo, tenemos una fibra del fibrado. Estas fibras pueden ser estructuras matemáticas de diversos tipos resultando de cada uno un tipo de fibrado distinto.

Hay dos tipos de fibrados que son de especial interés en estas notas:

- Fibrados $G-$principales:

  Un fibrado principal es aquel en el que la estructura definida como fibra sobre el espacio-tiempo base es un grupo de Lie G. El grupo G no es susceptible de ser utilizado para operar con él directamente, pues nos referimos a él de forma abstracta (como concepto de grupo).

  Para poder operar, tendremos que trabajar en el álgebra del grupo, el cual se define como el espacio tangente asociado a la manifold de Lie $\mathcal{L}$ en el punto con coordenadas en la manifold de Lie $\xi^a = 0$, donde $a = 1 \cdots N$, siendo N la dimensión del grupo (núm. de generadores).

  El hecho de poder trabajar en el álgebra viene de que los grupos de Lie compactos (que son los que nos interesarán) tienen la representación exponencial. Esto es que todo elemento del grupo puede obtenerse por exponenciación de algún elemento del álgebra. El álgebra, como espacio tangente que es, tiene estructura de espacio vectorial con la base de vectores $\{\partial_a\}$, donde ya dijimos que $a = 1 \cdots N$, siendo N la dimensión del grupo (núm. de generadores). Esta base, como base de un espacio tangente asociado a un punto $\xi^a = 0$ de una manifold que es, son aplicaciones. Aquí es donde está la diferencia fundamental entre manifolds asociadas al espacio-tiempo y manifolds asociadas a grupos de Lie. La base de vectores en el espacio tangente a una manifold M en un punto $P \in M$, donde M representa el espacio-tiempo, se definía como el conjunto de aplicaciones:

  $$\begin{array}{r} \partial_\mu : F \longrightarrow R \\ f(x) \longrightarrow \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}\right]_P \end{array}$$

  donde F es el espacio de funciones reales definidas sobre la manifold del espacio-tiempo.

  En cambio, la base de vectores en el espacio tangente a una manifold $\mathcal{L}$ en un punto $\xi \in \mathcal{L}$, donde $\mathcal{L}$ representa una manifold asociada a un grupo de Lie G, se define como el conjunto de aplicaciones:

  $$\begin{array}{r} \partial_a : \Re \longrightarrow Matrices \\ R[g(\xi)] \longrightarrow t_a^R \equiv -i \left[\frac{\partial R[g(\xi)]}{\partial \xi^a}\right]_{\xi^a=0} \end{array}$$

  donde $\Re$ es el espacio de representaciones del grupo G definidas sobre la manifold de Lie

  Uno podría preocuparse en principio por cómo definir abiertos, cartas, ect. en la manifold asociada a un grupo de Lie G. Pero todo esto desaparece si tenemos en cuenta que estamos tomando esta variedad como fibra y que estamos en grupos de Lie compactos. Al ser el grupo compacto podemos generar cualquier elemento del grupo por exponenciación del álgebra (espacio tangente en $\xi = 0$). Por otro lado, al considerar la manifold como fibra, lo único que nos interesa de ella, en primera instancia, es poder tener un elemento $g \in G$ en cada punto de la manifold base (espacio-tiempo). Como cualquier elemento $g \in G$ que tengamos, se puede obtener por exponenciación del álgebra (espacio tangente en $\xi = 0$), no nos preocuparemos por la estructura topológica de la manifold de Lie $\mathcal{L}$ por sí sola. Sólo utilizaremos el álgebra del grupo G asociado a la manifold de Lie $\mathcal{L}$ (en $\xi^a = 0$, por la propia definición de álgebra).

Otra cosa que es interesante es que en manifolds de Lie $\mathcal{L}$, no tiene sentido hablar de espacios cotangentes a la manifold como hacíamos cuando teníamos la manifold M del espacio-tiempo. Esto se debe a que la base de vectores del espacio tangente actúa sobre $\Re$ en lugar de F, como ocurría en el espacio-tiempo. El meollo del asunto está en que la base del espacio cotangente se definía como aplicaciones $T_P \longrightarrow R$ y esto no podemos lograrlo si la base del espacio tangente son matrices en lugar de números reales. No tendremos definidas formas diferenciales con índices de la manifold $\mathcal{L}$.

Cuando tengamos una función $g \in G$ perteneciente a la fibra $G-$ principal en el punto $P \in U_\alpha \cap U_\beta$, esta función variará según la carta que utilicemos para poner coordenadas a P. Esta variación se lleva a cabo mediante las funciones de transición en la fibra principal:

$$g^{(\beta)}(x_P^{(\beta)}) = f_{(\alpha\to\beta)}(x_P^{(\alpha)}) \cdot g^{(\alpha)}(x_P^{(\alpha)}) \cdot f^{-1}_{(\alpha\to\beta)}(x_P^{(\alpha)})$$

donde $f_{(\alpha\to\beta)} \in G$.

- Fibrados asociados a un fibrado $G-$Principal:

  Éste es el paso clave para introducir la estructura del contenido de materia. Cuando tenemos un fibrado $G-$Principal asociado a un grupo de Lie G sobre la manifold base M del espacio-tiempo,podemos seleccionar una representación $R[G]$ del grupo G. Esta representación actúa sobre los vectores del espacio de la representación, la cual es un espacio vectorial V. Este espacio vectorial está definido en cada punto, pero todos los V_P son isomorfos entre sí.

  Ahora ya podemos introducir el contenido material del Universo sobre la base M del espacio-tiempo. En cada punto $P \in M$, los distintos campos de partículas se agrupan para formar vectores de V_P. Podemos tener distintas representaciones $R[G] \in \Re$ por lo que la materia en general, se colocará en vectores pertenecientes a distintas representaciones del grupo G de simetría de la teoría. Esto es equivalente a decir que las distintas configuaraciones que puede tener la materia en el espacio-tiempo M no son más que las diferentes secciones de los distintos fibrados asociados en los que la materia se estructura. Esto es elegir un vector del fibrado asociado V_P para cada punto P y para cada fibrado asociado V en el que tengamos vectores en esa representación $R[G]$ de G.

  Cuando tengamos un vector $v \in V$ perteneciente a la fibra asociada en el punto $P \in U_\alpha \cap U_\beta$, su valor dependerá de la carta que utilicemos para poner coordenadas a P. Esta dependencia se lleva a cabo mediante las funciones de transición en la fibra asociada:

$$v^a_{(\beta)}(x_P^{(\beta)}) = R[f_{(\alpha\to\beta)}(x_P^{(\alpha)})]^a_b \cdot v^b_{(\alpha)}(x_P^{(\alpha)})$$

donde $R[f]$ es la representación de $f \in G$ sobre la que tenemos el fibrado asociado. La función f es la misma función que actuaba como función de transición en la fibra $G-$principal.

3.3. Partículas en un espacio-tiempo métrico. Mecanismo de Vielbain.

Todo fibrado vectorial con un espacio vectorial V de dimensión m como fibra, se puede interpretar como el fibrado asociado a un fibrado $G-$principal, donde $G = GL(m, R)$. En el caso de los espacios vectoriales en los que habitan los vectores que estructuran el contenido material del Universo (partículas), está claro que , si los entendemos como fibras asociadas a las representaciones de un grupo G, entonces el fibrado $G-$principal es la manifold de Lie del Modelo Estándar, $G = SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$. Pero si pensamos en el espacio tangente o en el espacio cotangente como espacios vectoriales de unos fibrados asociados a una representación de un grupo, Â¿de qué grupo estamos hablando?. La raíz del problema reside en que el espacio-tiempo (base del fibrado M) presenta una simetría bajo difeomorfismos como vimos al principio. Este grupo de transformaciones no posee una representación spinorial. Éste es el motivo por el que los espacios tangente y cotangente no se pueden asociar a espacios de representaciones (espacios vectoriales) de ningún grupo matricial. Éste es el problema de que la simetría del espacio-tiempo sea la de los difeomorfismos. Entonces, no podemos incluir fermiones a la teoría directamente en los espacios tangente y cotangente.

Por suerte, este problema tiene solución. El mecanismo con el que conseguimos meter fermiones en el espacio-tiempo se conoce como *Mecanismo de Vielbain*. La idea es que en cada punto del espacio-tiempo $P \in M$, cambiamos las bases de los espacios tangente y cotangente:

$$T_P(M, R) \longrightarrow e_a = e_a{}^{\mu} \partial_{\mu}$$
$$T_P^*(M, R) \longrightarrow e^a = e^a{}_{\mu} dx^{\mu}$$

donde los campos $e_a{}^{\mu}(x)$ son funciones que dependen del punto P. La idea por la que se hace esto es porque si tenemos una manifold espacio-tiempo dotada de una estructura métrica $g_{\mu\nu}(x)$ e imponemos la condición sobre los Vielbains,

$$g_{\mu\nu}(x) \cdot e_a{}^{\mu}(x) \cdot e_b{}^{\nu}(x) = \delta_{ab}(x)$$

éstos quedan completamente determinados a partir de la métrica. Pero la clave está en que las nuevas bases $\{e_a\}$ y $\{e^a\}$ de los espacios tangente y cotangente en un punto $P \in M$ expanden unos espacios vectoriales que ahora ya sí se pueden entender como fibrados asociados a un fibrado $G-$principal, donde $G = SO(n)$[3] (n es la dimensión de espacio-tiempo). Ahora ya podemos implementar fermiones en el espacio-tiempo de nuestra teoría como vectores de las representaciones spinoriales de $SO(n)$, en vez de vectores de los espacios tangente y cotangente

[3]Podemos imponer, como condición sobre los Vielbains:

$$g_{\mu\nu}(x) \cdot e_a{}^{\mu}(x) \cdot e_b{}^{\nu}(x) = \eta_{ab}(x)$$

y conseguir la simetría $SO(1, n-1)$ de la métrica de Minkowski donde la simetría era el grupo de difeomorfismos y vimos que no podíamos hacerlo.

Entonces, podemos interpretar los Vielbeins como las aplicaciones que establecen un correspondencia en cada punto entre el espacio tangente (o cotangente) y un espacio de representación de $SO(n)$, ambos espacios vectoriales:

$$e_a{}^{\mu}(x) : T_P(M,R) \longrightarrow Rep[SO(n)]$$
$$e^a{}_{\mu}(x) : T_P^*(M,R) \longrightarrow Rep[SO(n)]$$

Esto viene a decirnos que una partícula implementada en la manifold espacio-tiempo toma una estructura de *vector de estado* sobre una base de estados correspondiente al diagrama de pesos de alguna representación de $SO(n)$. Una forma general de entender esto es que si partimos de un espacio-tiempo en el que implementamos un contenido material, este contenido material que implementemos fija la función $f(x) \in F$, donde F es el conjunto de funciones reales definidas sobre la variedad. Una vez fijada la función $f(x)$ sobre la que actúan los elementos de la base del espacio tangente, podemos generar todo el fibrado tangente. Si el espacio-tiempo está dotado de una estuctura métrica $g_{\mu\nu}$ se nos genera automáticamente todo el espacio cotangente y por consiguiente, todo el $tensor - world$. Como el espacio tiene una métrica $g_{\mu\nu}$ ésta define unos Vielbains en cada punto del espacio-tiempo que asocian a cada tensor tipo(r, s) del $tensor - world$ un tensor tipo(r, s) $tensor - SO(n)world$. Cada tensor tipo(r, s) del $tensor - SO(n)world$, corresponderá a un producto de r representaciones contravariantes y s representaciones covariantes del grupo $SO(n)$, pudiendo ser éstas cualquiera de las que tiene el grupo (vectorial, spinorial reducible,spinoriales irreducibles,...). La pregunta que surge de forma natural es cuál es el motivo por el que las partículas están implementadas en el espacio-tiempo en ciertas representaciones de $SO(n)$ y se han decantado por un 'vector estado' concreto en cada punto $P \in M$. Qué determina las representaciones concretas de $SO(n)$ en las que se tienen 'vectores estado' para el contenido de materia del Universo sólo por implementarse materia en el espacio-tiempo, es una cuestión abierta.

3.4. Un Universo dinámico

Hasta ahora, hemos visto que la teoría matemática desarrollada nos permite introducir la materia en el espacio-tiempo así como estructurarla en vectores de fibrados asociados a ciertas representaciones de fibrados $G-$principales con $G = SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ o con $G = SO(n)$. Estos fibrados vectoriales asociados a grupos poseen una estructura definida sobre el fibrado llamada conexión del fibrado asociado. Es análogo a la conexión afín que teníamos sobre la manifold base M y que nos permitía definir la derivada covariante en el $tensor - world$.

En un fibrado asociado a un fibrado $G-$principal donde tengamos una estructura como la conexión, podemos ver la variación de un 'vector estado' en un determinado punto $P \in U_\alpha \subset M$ cuando nos movemos en una determinada dirección del espacio-tiempo. Podemos computar la evolución del contenido de materia del Universo, esto es, un Universo dinámico.

Partamos de un fibrado asociado a una representación $R[G]$ de un grupo de simetría G de la teoría. La materia se coloca en 'vectores estado' de esa representación. Esto ocurre en cada punto $P \in M$. Podemos entender la evolución como el cambio que experimentan los 'vectores estado' del contenido de materia al desplazarnos por la manifold M del espacio-tiempo.

La variación de un 'vector estado' a lo largo de una dirección del espacio-tiempo M en un punto $P \in U_\alpha \subset M$ toma la forma:

$$D_\mu v^a(x) = \partial_\mu v^a(x) + \omega_\mu{}^a{}_b(x) \cdot v^b(x)$$

donde $\omega_\mu{}^a{}_b(x)$ es la estructura de conexión definida en el fibrado vectorial asociado.

Todas las magnitudes que aparecen en la ecuación anterior dependen de la carta a la que pertenece el punto P. Ya vimos cuáles eran las funciones de transición para los 'vectores estado' localizados en puntos que pertenecen al solape entre abiertos. Si queremos que la derivada covariante de un 'vector estado', como la hemos definido anteriormente, se comporte como un tensor del $tensor - world$ y como un tensor del $tensor - Gworld$, la conexión en un punto $P \in U_\alpha \cap U_\beta$ ha de transformarse (transición entre abiertos) en el $tensor - Gworld$ como:

$$\omega_\mu^{(\beta)}(x_P^{(\beta)}) = R[f_{\alpha\to\beta}(x_P^{(\alpha)})]\cdot\omega_\mu^{(\alpha)}(x_P^{(\alpha)})\cdot R[f^{-1}_{\alpha\to\beta}(x_P^{(\alpha)})] - (\partial_\mu^{(\alpha)} R[f_{\alpha\to\beta}(x_P^{(\alpha)})])\cdot[f^{-1}_{\alpha\to\beta}(x_P^{(\alpha)})]$$

donde $f_{\alpha\to\beta} \in G$ es la misma función de transición que teníamos en el fibrado $G-$principal. Los índices del $tensor - Gworld$ están implícitos en la transformación.

3.5. Conexión y Curvatura en un fibrado asociado. Interpretación física

Si echamos un vistazo a la variación de un 'vector de estado' del $tensor - Gworld$

$$D_\mu v^a(x) = \partial_\mu v^a(x) + \omega_\mu{}^a{}_b(x) \cdot v^b(x)$$

y a la variación de un vector del $tensor - world$

$$D_\mu V^\nu(x) = \partial_\mu V^\nu(x) + \Gamma^\nu_{\mu\rho}(x) V^\rho(x)$$

podemos encontrar una analogía que nos permite dar una interpretación geométrica a la teoría gauge de la interacción del contenido material del Universo tanto para la interacción $G = SU_C(3)\times SU_L(2)\times U_Y(1)$ como para la interacción $G = SO(n)$.

Vemos que la variación en un punto de un 'vector estado' tiene dos aportaciones:

- Una aportación debida a la propia variación del 'vector estado' al movernos en una dirección del espacio-tiempo. Es la única contribución que hay en la teoría libre (ec. de Dirac y de ec. de Klein-Gordon) cuando las partículas sólo se han implementado al espacio-tiempo. Las distintas componentes de un 'vector estado' no se mezclan entre sí. La evolución libre genera la descomposición de los campos en ondas planas (solución de las ecuaciones de Dirac para fermiones y Klein-Gordon para escalares) y es donde definimos la segunda cuantización que hemos visto siempre. Cuando tenemos un elemento de la base de estados del fibrado asociado evolucionando libremente, éste varía de un punto a otro (como onda plana que es), pero el estado dentro del diagrama de pesos de la representación se mantiene fijo.

- Otra aportación que mezcla las distintas componentes de los 'vectores estado'. Esta es la interesante porque es la que produce lo que conocemos como interacción gauge en el contenido de materia. Esto es, los 'vectores estado' de materia interactuando entre sí. Podríamos entender la interacción gauge como un fenómeno colectivo que se produce al incorporar toda la materia. Si tenemos una sola partícula, no hay interacción gauge y la partícula evociona libremente porque no hay otras partículas para que interaccionen[4]. Es sólo cuando ponemos todas las partículas que componen el contenido material del Universo cuando se genera una interacción que corresponde a un fibrado $G-$principal, con $G = SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ (por lo menos a la escala en la que vivimos).

Como queremos que la interacción sea una simetría de la teoría, las componentes de los 'vectores estado' se meclarán siguiendo un patrón de mezcla que represente una simetría. Esto es, esta combinación de componentes viene dictaminada por los generadores del grupo de simetría en las distintas representaciones en las que se contruyan fibrados asociados para estructurar el contenido material del Univero. Esto pues determina la forma de la conexión afín (la cual mezcla los campos que constituyen los 'vectores estados') para conseguir la simetría de la teoría:

$$\omega_\mu{}^a{}_b(x) = (A_\mu(x))^a{}_b = A_\mu^m(x) \cdot (t_m^R)^a{}_b$$

Entonces, los campos gauge responsables de la interacción gauge son la conexión del fibrado asociado al fibrado $G-$principal con $G = SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$. A partir del campo campo gauge, entendido como conexión de un fibrado asociado (espacio vectorial), podemos definir una conexión en el fibrado asociado. Esto es análogo a la curvatura en el $tensor - world$ definida a partir de la conexión afín.

La curvatura en el $tensor - world$ se define como:

$$R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\sigma = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}$$

La curvatura en el $tensor - Gworld$ se define como:

$$F_{\mu\nu}{}^a{}_b = \partial_\mu \omega_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu \omega_\mu{}^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c \omega_\nu{}^c{}_b - \omega_\nu{}^a{}_c \omega_\mu{}^c{}_b$$

Entonces, desde le punto de vista del $tensor - world$, la conexión y la curvatura del $tensor - Gworld$ son:

[4]Puede haber un potencial escalar $V(v^a)$ de interacción no gauge para los 'vectores estados'. Esto es la interacción de la materia con el espacio-tiempo

- Conexión:

$$\omega_\mu{}^a{}_b(x) = (A_\mu(x))^a{}_b = A_\mu^m(x) \cdot (t_m^R)^a{}_b$$

  Es una un vector perteneciente al espacio cotangente (1-forma). Aunque la estructura es de 1-forma, las entradas no son números reales sino matrices que pertenecen al álgebra (no al grupo) del grupo de simetría de la teoría. La clave es que las dependencias en el $tensor - world$ y en el $tensor - Gworld$ de la conexión en el fibrado asociado (campos gauge) factoriza en 1-formas del $tensor - world$ multiplicadas por generadores del álgebra del grupo de simetría.

- Curvatura:

$$F_{\mu\nu}{}^a{}_b(x) = (F_{\mu\nu}(x))^a{}_b = F_{\mu\nu}^m(x) \cdot (t_m^R)^a{}_b$$

  Es un tensor $(0,2)$ antisimétrico (por construcción) en los índices del $tensor - world$ (2-form). Aunque la estructura es de 2-forma, las entradas no son números reales sino matrices que pertenecen al álgebra (no al grupo) del grupo de simetría de la teoría. La clave es que las dependencias en el $tensor - world$ y en el $tensor - Gworld$ de la curvatura en el fibrado asociado (intensidad del campo gauge) factoriza en 2-formas del $tensor - world$ multiplicadas por generadores del álgebra del grupo de simetría.

3.6. p-formas diferenciales y su clasificación. Cohomología de Rahm

Un tensor del $tensor - world$ tipo $(0,p)$ completamente antisimétrico en todos sus índices recibe el nombre de p-forma diferencial. Cuando tenemos un campo de p-formas podemos definir una operación llamada derivada exterior que me pasa de una p-forma a una (p+1)-forma:

$$d\text{p-forma} = \text{(p+1)-forma}$$

$$dA_p(x) = B_{p+1}(x)$$

$$d^2 = 0$$

$$dA_p(x) = \left[\partial_{\mu_0} A_{\mu_1\cdots\mu_p}(x)\right] \cdot dx^{\mu_0} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$$

donde $\wedge$ el el producto wedge (producto tensorial antisimetrizado) de formas diferenciales.

Para la manifolds de espacio-tiempo que sean métricas y afinmente conectadas, podemos definir una operación sobre las formas diferenciales a partir del operador de Hodge, $*$. Éste actúa sobre la base de formas diferenciales de la siguiente manera:

$$* : (p - forma) = (n-p) - forma$$

$$*A_p(x) = B_{n-p}(x)$$

$$*(dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}) = \frac{1}{(n-p)!}\sqrt{|g|} \cdot g^{\mu_1\nu_1} \cdots g^{\mu_p\nu_p} \epsilon_{\nu_1\cdots\nu_p\nu_{p+1}\nu_n} (dx^{\nu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_n})$$

donde n es la dimensión del espacio-tiempo.

Utilizando la derivada exterior y el operador de Hodge podemos definir una derivada exterior adjunta $d^\dagger$ sobre los campos de formas diferenciales tal que:

$$d^\dagger A_p(x) = B_{p-1}(x)$$

$$(A_p, dB_{p-1}) = \left(d^\dagger A_p, B_{p-1}\right)$$

donde $(A_p, B_p) = \int_M A_p \wedge *B_p$ es el producto interno definido sobre las formas diferenciales del mismo tipo y que me genera una cantidad real.

La relación entre la derivada exterior adjunta y la derivada exterior sobre una p-forma es:

$$d^\dagger = *d* \longrightarrow dim(M) = par$$

$$d^\dagger = (-1)^p * d* \longrightarrow dim(M) = impar$$

Utilizaremos las siguientes definiciones:

- p-forma cerrada: Es aquella que cumple $dA_p = 0$
- p-forma exacta: Es aquella que cumple $A_p = dB_{p-1}$
- p-forma armónica: Es aquella que cumple $dA_p = d^\dagger A_p = 0$

Todas las p-formas diferenciales tienen un descomposición llamada *descomposición Hodge*:

$$A_p = B_p + dC_{p-1} + d^\dagger D_{p+1}$$

donde B_p es una p-forma armónica.

Cuando tengamos una p-forma diferencial definida en un espacio-tiempo M, no podemos clasificarla en general. Pero las p-formas cerradas sí son susceptibles de ser clasificadas en lo que se conoce como la p-ésima clase de cohomología de Rahm. La p-ésima clase de cohomología de Rahm es el conjunto cociente:

$$\mathcal{H}^p(M, R) = \frac{\mathcal{Z}^p(M, R)}{\mathcal{B}^p(M, R)}$$

donde $\mathcal{Z}^p(M, R)$ es el conjunto de p-formas cerradas definidas sobre el espacio-tiempo y $\mathcal{B}^p(M, R)$ es el subconjunto de formas cerradas que lo son por ser exactas ($d^2 = 0$). Esto es, la p-ésima clase de cohomología de Rahm es el conjunto de clases de equivalencia de p-formas cerradas donde dos p-formas cerradas pertenecen a la misma clase de equivalencia si se diferencian en una forma exacta:

$$B_p \in [A_p]_\sim \Longleftrightarrow B_p = A_p + dC_{p-1}$$

Dos resultados importantes son:

- Para una p-forma cerrada, su descomposición Hodge se reduce a:

  $$A_p = B_p + dC_{p-1}$$

- Dos p-formas que pertenezcan a la misma clase de equivalencia de la p-ésima clase de cohomología de Rahm, tienen la misma forma armónica en su descomposición Hodge. Esto es, cada clase de equivalencia sólo posee una forma armónica. Todas las p-formas cerradas que conformen una clase de equivalencia son equivalentes (se diferencian en una p-forma exacta) a la forma armónica. El hecho de que sólo hay una p-forma armónica para cada clase de equivalencia es un resultado topológico (no depende de la métrica), pero cuál es esa forma armónica sí que depende de la métrica que tengamos definida en el espacio-tiempo M.

3.7. p-chains y clases de homología

Una p-chain es, formalmente, una combinación lineal con coeficientes reales de sunbmanifolds $\mathcal{N}'s$ de dimensión p, pertenecientes a la manifold M del espacio-tiempo.

$$a_p = \sum_k c_k \mathcal{N}_k$$

donde una submanifold $\mathcal{N}_k \subset M$ es un conjunto de puntos pertenecientes a M que tienen a su vez estructura de manifold. Sobre las manifolds (o submanifolds) podemos definir la operación *tomar frontera*, ∂:

$$\partial : M \longrightarrow \partial M$$

$$P \in \partial M \Longleftrightarrow P = (x^1 = 0, x^2 \cdots x^n)$$

donde todas las coordenadas están definidas sobre todo R, salvo la coordenada x^1 la cual está semidefinida positiva. Una vez hayamos tomado la frontera a una manifold una vez, si volvemos a aplicar la operación tomar frontera obtendremos el conjunto vacío. Esto es $\partial^2 = 0$, ya que sólo una de las coordenadas estaba semidefinida positiva, el resto estaban definida en todo R

Utilizando p-chains con la operación frontera ∂, podemos definir las clases de homología de chains de manera análoga a como lo hicimos con formas diferenciales y la derivada exterior.

Utilizaremos las siguientes definiciones:

- p-chain cerrada: Es aquella que cumple $\partial a_p = 0$
- p-forma trivial: Es aquella que cumple $a_p = \partial b_{p+1}$

Las p-chains cerradas son susceptibles de ser clasificadas en lo que se conoce como la p-ésima clase de homología. La p-ésima clase de homología es el conjunto cociente:

$$\mathcal{H}_p(M,R) = \frac{\mathcal{Z}_p(M,R)}{\mathcal{B}_p(M,R)}$$

donde $\mathcal{Z}_p(M,R)$ es el conjunto de p-chains cerradas definidas sobre el espacio-tiempo y $\mathcal{B}^p(M,R)$ es el subconjunto de p-chains cerradas que lo son por ser triviales ($\partial^2 = 0$). Esto es, la p-ésima clase de homología es el conjunto de clases de equivalencia de p-chains cerradas donde dos p-chains cerradas pertenecen a la misma clase de equivalencia si se diferencian en una p-forma exacta (una frontera):

$$b_p \in [a_p]_\sim \Longleftrightarrow b_p = a_p + \partial c_{p+1}$$

3.8. Dualidad de Rahm

Es una dualidad (analogía) entre p-formas cerradas y p-chains cerradas que se obtienen a través de la integración de p-formas cerradas sobre p-chains cerradas (p-cycles). Al aplicar el teorema de Stokes

$$\int_{a_p} dB_{p-1} = \int_{\partial a_p} B_{p-1}$$

sobre el proceso de integración, vemos que el resultado (valor real) sólo depende de la clase de equivalencia dentro del p-ésimo grupo de cohomología de Rahm a la que pertenezca la p-forma cerrada y de la clase de equivalencia dentro del p-ésimo grupo de homología a la que pertenezca la p-chain cerrada. No depende para nada del representante que escojamos dentro de las clases de equivalencia de cohomología y de homología.

Podemos entender pues la integración como un mapping:

$$\mathcal{H}^p(M,R) \times \mathcal{H}_p(M,R) \longrightarrow R$$

Un grupo de cohomología tiene la estructura de espacio vectorial donde los elementos de la base son las clases de equivalencia que lo constituyen. Lo mismo ocurre con un grupo de homología y las clases de equivalencia que lo constituyen. Siempre podemos elegir las bases de estos espacios vectoriales de tal manera que establezcamos un criterio de 'ortogonalidad' entre ambas bases:

$$\mathcal{H}^p(M,R) \times \mathcal{H}_p(M,R) \longrightarrow R$$

$$\left\{[A_p^i]_\sim\right\} \times \left\{[a_p^j]_\sim\right\} \longrightarrow \int_{[a_p^j]} [A_p^i] = \delta^{ij}$$

Esta dualidad de Rahm nos permitirá en la siguiente sección clasificar configuraciones de campos gauge en nuestra teoría del Universo. Esto no podremos hacerlo directamente empleando los campos gauge como 1-formas, pues en general no serán 1-formas cerradas. Pero construiremos una forma diferencial a partir de los campos gauge que será cerrada por construcción y que nos permitirá clasificar el sector gauge de la teoría.

3.9. Cantidades independientes para formular una teoría del Universo

En la descripción matemática del Universo que estamos haciendo, tenemos una manifold base que es el espacio-tiempo M y un contenido de materia que evoluciona (Universo dinámico) en el sentido de que interacciona bajo un grupo de simetría G que constituye un fibrado $G-$principal, cuya estructura es la de una manifold de Lie $\mathcal{L}$, sobre M. Si tenemos un Universo matemáticamente general, tendremos 10 cantidades para describir el Universo:

- Una dimensión para el espacio-tiempo base M: n
- Un representante del espacio de funciones reales definidas sobre la manifold M para poder generar el $tensor - world$: $f(x_1, \cdots, x_n) \in F$

- Un representante del espacio de representaciones que son compatibles con la ley de composición del gupo en la manifold[5] $\mathcal{L}$, para poder generar el $tensor - Gworld$: $R[g(\xi)] \in \Re$
- La métrica definida en $M : g_{\mu\nu}(x)$
- La conexión afín o conexión en el $tensor - world$: $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$
- La conexión en el $tensor - SO(n)world$: $\omega^{a}_{\mu b}(x)$
- La conexión en el $tensor - Gworld$: $\varpi^{a}_{\mu b}(x)$

Además tendremos que dar el atlas del que dotamos a M:

- Conjunto de cartas: $\{U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha\}$

Y las funciones de transición definidas para los puntos $P \in U_\alpha \cap U_\beta$:

- Funciones de transición para las coordenadas de los puntos.

$$(\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1}) : (x_1^{(\alpha)} \dots x_n^{(\alpha)}) \longrightarrow (x_1^{(\beta)} \dots x_n^{(\beta)})$$

- Funciones de transición para los elementos del fibrado $G-$principal y del fibrado asociado a la representación $R[g]$, $f_{(\alpha\to\beta)} \in G$

  - $$g^{(\beta)}(x_P^{(\beta)}) = f_{(\alpha\to\beta)}(x_P^{(\alpha)}) \cdot g^{(\alpha)}(x_P^{(\alpha)}) \cdot f^{-1}_{(\alpha\to\beta)}(x_P^{(\alpha)})$$
  - $$v^{a}_{(\beta)}(x_P^{(\beta)}) = R[f_{(\alpha\to\beta)}(x_P^{(\alpha)})]^{a}_{\ b} \cdot v^{b}_{(\alpha)}(x_P^{(\alpha)})$$

Este número de cantidades se puede reducir aceptando una serie de postulados:

- Postualado métrico: Para un espacio-tiempo métrico, la métrica ha de ser covariantemente constante.

  $$D_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \Longleftrightarrow [D_\lambda, g_{\mu\nu}] = 0$$

  Esto establece una relación entre la métrica y la conexión afín en el $tensor - world$
- Primer postulado de Vielbain: Los Vielbains han de ser covariantemente constante.

  $$D_\lambda e^{a}{}_{\nu} = 0 \Longleftrightarrow [D_\lambda, e^{a}{}_{\nu}] = 0$$

  Esto establece una relación entre la conexión afín en el $tensor - world$ la conexión en el $tensor - SO(n)world$

[5]La ley de composición del grupo en la manifold $\mathcal{L}$ reza:

$$g(\xi_1) \cdot g(\xi_2) = g[f(\xi_1, \xi_2)]$$

donde f es el producto del grupo en la manifold.

Entonces, el subconjunto de cantidades $\left\{g_{\mu\nu}(x); \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x); \omega^{a}_{\mu b}(x); \varpi^{a}_{\mu b}(x)\right\}$, queda reducido a dos cantidades $\left\{g_{\mu\nu}(x); \varpi^{a}_{\mu b}(x)\right\}$, que son la métrica y la conexión en el $tensor - Gworld$.

Ya vimos que la conexión en el $tensor - Gworld$ era una 1-forma que representaba el campo gauge $A_{\mu}(x)$, por lo que las cantidades indepedietes se reducen a $\{g_{\mu\nu}(x); A_{\mu}(x)\}$

Estas son las dos cantidades independientes en las que nos vamos a fijar de aquí en adelante.

3.10. Clases de Chern y de Pontryagin

Esta es una de las partes más importantes de las notas. Cuando tenemos una teoría con un espacio-tiempo M base y un contenido de materia implementado en él podemos realizar modelos del Universo basados en las 8 (tras aceptar los dos postulados) cantidades que hemos dicho antes.
Las cantidades que nosotros definimos en el modelo son:

- Una dimensión para el espacio-tiempo base M: n
- Un representante del espacio de funciones reales definidas sobre la manifold M para poder generar el $tensor - world$: $f(x_1, \cdots, x_n) \in F$
- Un representante del espacio de representaciones que son compatibles con la ley de composición del gupo en la manifold $\mathcal{L}$, para poder generar el $tensor - Gworld$: $R[g(\xi)] \in \Re$
- Conjunto de cartas: $\{U_{\alpha}, \mathbf{x}_{\alpha}\}$
- Funciones de transición para las coordenadas de los puntos.

$$(\mathbf{x}_{\beta} \circ \mathbf{x}_{\alpha}^{-1})$$

Una vez definidos estas 5 cantidades como parámetros de entrada en el modelo, podemos estudiar las otras 3 cantidades restantes:

$$\left\{g_{\mu\nu}(x); \varpi^{a}_{\mu b}(x); f_{(\alpha\to\beta)}\right\}$$

La teroría tiene una simetría bajo el grupo G, con el cual definimos un fibrado $G-$principal que tiene estructura de manifold de Lie $\mathcal{L}$ sobre M (espacio-tiempo base). Esto nos dice que podemos elegir un elemento cualquiera $g \in G$ en cada punto de la manifold M del espacio-tiempo que tenemos como base, sin que haya ningún observable medible que dependa de la elección de $g's$ que hayamos hecho. Esto se corresponde a poder hacer cualquier sección $\sigma(M)$.

Cuando hemos hecho una sección $\sigma(M)$ hemos de tener en cuenta la elección del atlas que hayamos hecho para la manifold M del espacio-tiempo. Deben existir, como ya dijimos, funciones $f_{(\alpha\to\beta)}(x)$ que sean las funciones de transición en el fibrado $G-$principal y que estén definidas para los puntos $P \in M$ que pertenezcan a las regiones de solape entre abiertos de diferentes cartas, $P \in U_{\alpha} \cap U_{\beta}$:

$$g^{(\beta)}(x_P^{(\beta)}) = f_{(\alpha\to\beta)}(x_P^{(\alpha)}) \cdot g^{(\alpha)}(x_P^{(\alpha)}) \cdot f^{-1}_{(\alpha\to\beta)}(x_P^{(\alpha)})$$

Podemos tener un fibrado trivial donde la función de transición es trivial (identidad) o tener funciones de transición no triviales. Este segundo caso es el que nos interesará en adelante. La elección que hagamos de estas funciones de transición no triviales define una cantidad topológica llamada invariante de Chern. Estas funciones de transición no triviales se estructuran en clases de equivalencia. Dos elecciones distintas de fuciones de transición no triviales son equivalentes si proporcionan el mismo invariante de Chern. Para construir el invariante de Chern que nos clasifica las distintas elecciones de funciones de transición no triviales, hemos de construir la $2k-$forma:

$$C_{2k} = \sum_{m_1 \cdots m_k} \left(F^{m_1}_{\mu_1\nu_1}(x) \wedge \cdots \wedge F^{m_k}_{\mu_k\nu_k}(x)\right) \cdot STr\left\{t^R_{m_1} \cdots t^R_{m_k}\right\}$$

Esta cantidad se construye a partir de la curvatura del fibrado asociado $F_{\mu\nu}(x)$ y ésta, a partir de la conexión $A_\mu(x)$ (campo gauge) del fibrado asociado. Pero la clave es que lo que nos interesará no será ningún elemento concreto C_{2k}, sino la clase de equivalencia de la $2k-$ésima clase de cohomología de Rahm $[C_{2k}]_\sim$. Ésta existirá porque $dC_{2k} = 0$ por construcción. Cuando hacemos dos elecciones de campos gauge distintas $A_\mu(x)$ y $A'_\mu(x)$, ambos con la misma elección de $f_{(\alpha\to\beta)}(x)$ no triviales para los puntos en las regiones de solape, las $2k-$formas cerradas que obtenemos C_{2k}, C'_{2k} pertenecen a la misma clase de equivalencia de la $2k-$ésima clase de cohomología de Rahm. Esto es $[C_{2k}]_\sim = [C'_{2k}]_\sim$. Tendrán pues la misma $2k-$forma armónica en su descomposición Hodge y generan el mismo invariante de Chern. Entonces éste resultado es topológico aunque se obtenga utilizando cantidades métricas auxiliares como la conexión en el fibrado asociado (campo gauge).

Por tanto, la cantidad independiente $A_\mu(x)$ la seguiremos teniendo cuando hayamos fijado las funciones de transición $f_{(\alpha\to\beta)}(x)$ para las regiones de solape entre abiertos. Esta elección la etiquetaremos por su invariante de Chern. Hay un conjunto de invariantes de Chern (para el grupo G) formado por todas las C_{2k}, donde $k = 0, \cdots, \frac{n}{2}$. Se define la $k-$ésima clase de Chern como la clase de equivalencia $[C_{2k}]_\sim$. La clase que nos interesa principalmente es $k = \frac{n}{2}$, la cual nos permite definir una cantidad real a partir de la dualidad de Rahm:

$$c_n \equiv \int_M [C_2]_\sim \longrightarrow R$$

donde c_n es un número real llamado el invariante de Chern.

Podemos hecer lo mismo considerando el caso en el que $G = SO(n)$. Esto es, considerar la elección de las funciones de transición para el fibrado $SO(n)-$principal. Todo el razonamiento es análogo, salvo que, debido a la traza sobre productos de generadores de $SO(n)$, tenemos que reducirnos sólo al caso $k = 2r$ con $r = 0, \cdots, \frac{n}{4}$. El resultado se conoce como las clases de Pontryagin. Entonces me clasifica las distintas maneras inequivalentes de clasificar las funciones de transición $f_{(\alpha\to\beta)}(x)$ para el fibrado $SO(n)-$principal en los puntos pertenecientes a los solapes entre abiertos en M.

3.11. Configuraciones de vacío de una teoría

Si el Universo fuera sólamente lo que hemos visto hasta ahora y sólo tuviésemos interacción gauge en la materia, ya habríamos elaborado una teoría matemática completa y sólo nos quedaría profundizar en lo que ya hemos visto. Únicamente nos quedarían por tomar un $A_\mu(x)$ y un $g_{\mu\nu}(x)$ para construir una teoría matemática y dinámica del Universo, donde entendemos por evolución dinámica la interacción gauge de la materia. Esto es, la interaccíon debida a un grupo de simetría de la teoría.

Todo se vuelve más interesante si incluimos la interacción no gauge. Hacemos esto incorporando a la teoría un potencial $V(\phi)$, que depende del 'vector estado' que tengamos en el fibrado asociado. Pero esta dependencia no es gauge (interacción entre 'vectores estado' determinada por lo generadores de una representación del grupo de simetría de la teoría). Esto cambia radicalmente la contrucción matemática de la teoría. Introducir potenciales en la teoría es agrupar lo que no conocemos (queda fuera del modelo desarrollado) en un término que llamamos potencial, cuya expresión matemática queda dentro del modelo que estemos haciendo. Podemos hacer diferentes teorías tomando distintos tipos de potenciales de interacción no gauge en la teoría.

Cuando tenemos un potencial que involucra el contenido material de la teoría, este potencial tiene un mínimo para ciertas configuraciones del contenido de materia. Cuando sólo hay una configuración que minimiza el potencial, la materia la adopta en todos los putos del espacio-tiempo M. Esta configuración de mínimo potencial es la que se llama configuración de vacío. En este caso, en todos los puntos del espacio-tiempo tendremos definido este 'vector estado' de vacío. Esto es lo que se llamaría una solución trivial de la teoría.

Una situación mucho más interesante aparece cuando el contenido de materia de la Universo puede adoptar varias configuraciones que corresponden a diferentes mínimos del potencial de interacción no gauge. Esta situación sólo puede ocurrir si el conjunto de mínimos se compone de varios estados (varias configuraciones del contenido de materia del Universo). Este conjunto de mínimos puede ser discreto o puede involucrar un continuo de estados.

En el caso de tener un continuo de 'vectores estado' de vacío en el conjunto de mínimos del potencial, todos estos estados de vacío están relacionados entre sí por una transformación gauge del grupo de simetría de la teoría. Pero podemos fijar un único 'vector estado' de vacío perteneciente al conjunto de mínimos del potencial en todo los puntos del espacio-tiempo M. Esto nos hace romper el grupo de simetría de la teoría G a otro grupo G' de simetría menor. La teoría ahora pasará a tener la simetría G'. El contenido de materia del Universo dejará de estructurarse en los fibrados asociados a las distintas representaciones del grupo G para pasar a estructurarse en los fibrados asociados a las distintas representaciones del grupo G' el cual es la nueva simetría de la teoría. Esta nueva teoría del Universo con simetría G' tendrá las mismas cantidades independientes que se necesitaban para hacer una teoría del Universo cuando teníamos la simetría G.

- Las relacionadas con la manifold M no cambiarán, pues no hemos tocado el espacio-tiempo:

- La misma dimensión para el espacio-tiempo base M: n
- El mismo representante del espacio de funciones reales definidas sobre la manifold M para poder generar el $tensor-world$: $f(x_1,\cdots,x_n) \in F$
- El mismo conjunto de cartas: $\{U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha\}$
- Las mismas funciones de transición para las coordenadas de los puntos.
$$(\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1})$$
- La misma métrica definida en M : $g_{\mu\nu}(x)$
- La misma conexión afín o conexión en el $tensor-world$: $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)$
- La misma conexión en el $tensor-SO(n)world$: $\omega^a_{\mu b}(x)$

■ Las relacionadas con la manifold de Lie cambiarán al cambiar el grupo de simetría de la teoría $G \to G'$:

- El representante del espacio de representaciones que son compatibles con la ley de composición del gupo en la manifold $\mathcal{L}'$, para poder generar el $tensor-G'world$: $R'[g(\xi)] \in \Re'$
- Las funciones de transición para los elementos del fibrado $G'-$principal y del fibrado asociado a la representación $R[g]$, $f'_{(\alpha\to\beta)} \in G'$
  - $$g^{(\beta)}(x_P^{(\beta)}) = {f'}_{(\alpha\to\beta)}(x_P^{(\alpha)}) \cdot g^{(\alpha)}(x_P^{(\alpha)}) \cdot {f'}^{-1}_{(\alpha\to\beta)}(x_P^{(\alpha)})$$
  - $$v^a_{(\beta)}(x_P^{(\beta)}) = R'[{f'}_{(\alpha\to\beta)}(x_P^{(\alpha)})]^a_b \cdot v^b_{(\alpha)}(x_P^{(\alpha)})$$
- La conexión en el $tensor-G'world$: ${\varpi'}^a_{\mu b}(x)$

Puede ser que podamos romper otra vez el nuevo grupo de simetría G' a otro menor G'' y así sucesivamente

$$G \to G' \to G'' \to \cdots$$

En cualquier caso, vamos a seguir viendo cosas de forma genérica, por lo que siempre diremos que tenemos un grupo G independientemente de que sea G o G' o el que sea.

Cuando tenemos el mismo 'vector estado' de vacío definido en todos los puntos del espacio-tiempo, tenemos lo que se denomina una configuración trivial del contenido de materia del Universo. En este caso, la configuración de vacío de los campos gauge (conexión en el fibrado $G-$asociado que me haría cambiar de 'vector estado' de vacío al cambiar de un punto a otro del espacio-tiempo M) se reduce a que se anulan $A_\mu = 0$.

Lo verdaderamente interesante es que existen configuraciones de vacío en las que no tenemos el mismo 'vector estado' de vacío (perteneciente al conjunto de mínimos del potencial) en todos los puntos del espacio-tiempo M. Esto es, configuraciones no triviales del contenido de materia que también forman parte del conjunto de configuraciones de vacío de la teoría. Estas configuraciones no triviales de vacío conforman el espacio de configuraciones no triviales de energía finita el cual se compone de varias componentes disconexas. En cada componente disconexa tenemos un subconjunto de configuraciones no triviales de vacío que son continuamente deformables unas en otras. Esta es la definición de clase de homotopía. Todas las configuraciones de una componente disconexa del conjunto de configuraciones no triviales de vacío son homotópicamente equivalentes. Están relacionadas entre sí por una transformación gauge bajo el grupo de simetría del Lagrangiano de la teoría, por lo que son equivalentes desde el punto de vista de observables medibles.

Cuando tenemos dos 'vectores estado' de vacío (mínimos del potencial) distintos en dos puntos distintos del espacio-tiempo M y ambos son parte de una misma configuración de vacío del contenido material del Universo, podremos conectar ambos 'vectores estado' de vacío mediante una transformación gauge con una cierta configuración de campos gauge $A_\mu(x)$.

Podemos tener una configuración de vacío no trivial y de energía constante que me interpola entre diferentes 'vectores estado' del conjunto de mínimos del potencial de interacción no gauge de la teoría, definidos en la frontera de la manifold M. Esto es necesario para tener configuraciones no triviales de energía finita. Estas configuraciones tienen la energía localizada en una cierta región de la manifold M. Esto significa que la configuración de campos gauge se anula prácticamente en todos los puntos de la manifold M, salvo una región en la que la configuración de vacío es no trivial y pertenece a una de las clases de homotopía en las que se divide el espacio de configuraciones no triviales y de energía finita. En estas regiones, la configuración de campos gauge no se anula $A_\mu \neq 0$. Con este campo gauge (conexión en el fibrado $G-$asociado) podemos construir una intensidad de campo gauge $F_{\mu\nu}(x) \neq 0$.

Se cumple que esta configuración de vacío no trivial y de energía finita, está cargada magneticamente bajo el grupo gauge$G$[6]:

Para el caso de la simetría $SO(3) \sim SU(2)$ rota a $U(1)$[7]:

$$\int_{S^2} F_{\mu\nu} = 1$$

donde S^2 denota las 2-esfera que subtiende todo el ángulo sólido del parte espacial (3-dimensional) del espacio-tiempo M (4-dimensional).

A menudo, a estas configuraciones de vacío no triviales de energía finita, donde la energía se encuentra localizada en una región de M se les llamas *defectos topológicos.*

[6]Si anteriormente hemos roto la simetría gauge G inicial de la teoría a otra simetría gauge G' menor al fijar un 'vector estado' de vacío, esta configuración de vacío no trivial y de energía finita estarćargada magnéticamente bajo el nuevo grupo gauge G' de simetría residual

[7]Éste es el modelo de Georgi-Glashow. En este modelo la dimensión del espacio-tiempo M es $n = 4$ y el contenido de materia del Universo es es un campo escalar complejo ϕ cargado en la representación adjunta de $SU(2)$. Esto es un triplete de Higgs. El potencial de interacción no gauge de este modelo tiene todos los mínimos en $\mid \vec{\phi} \mid= v$

3.12. Backgrounds

Para contruir una teoría en Física, lo que se hace es que se selecciona un estado de vacío de la teoría y luego se contruyen excitaciones sobre ese estado de vacío. Lo que ocurre, es que los estados que hemos visto como configuraciones de vacío de energía finita (defectos topológicos) no se pueden generar de esta manera. Son estados no perturbativos de la teoría.

Entonces, cuando tengamos una configuración de vacío como estado fundamental de mi teoría, tendremos pues una métrica definida en el espacio-tiempo, una configuración de materia no trivial y una configuración de campo gauge que viene determinada por el defecto topológico que tenga. La métrica $g_{\mu\nu}(x)$ definida en M la podemos escribir como una métrica de fondo más un campo de fluctuaciones de la métrica, $h_{\mu\nu}(x)$.

Esto nos lleva a tener dos backgrounds en las configuraciones de vacío de energía finita[8] no triviales de nuestra teoría, un background geométrico en M y un background gauge dentro del defecto topológico.

4. Defectos topológicos en espacios con dimensiones adicionales. p-branas

4.1. *p-branas*

Cuando entramos en teoría de cuerdas, la acción que computamos es la acción efectiva a bajas energías a la que se reduce la teoría de cuerdas. Tomando las diferentes acciones efectivas para las distintas supercuerdas (las cuales se corresponden con diferentes teorías de supergravedad en n=10), podemos encontrar soluciones no triviales de la configuración de vacío de la teoría. Estas generalizaciones de defectos topológicos a teorías con dimensiones adicionales (respecto de la teoría 4-dimensional) involucran configuraciones de vacío no triviales en las que la energía se encuentra localizada en una región de la manifold base M $dim(M) > 4$. Esta región puede involucrar en general p dimensiones espaciales. En este caso decimos que tenemos una $p-brana$.

Algunas propiedades de estas p-branas son:

- En las teorías de cuerdas ($dim(M) = 10$) existirán $p-branas$ para valores de p para los cuales tengamos $(p+1)-formas$ (campos) en el espectro (perturbativo) massless de la cuerda.
- La energía por unidad de volumen de estas branas is del orden de $\frac{1}{g_s}$ o $\frac{1}{g_s^2}$ en unidades de $M_s = 1$, por lo que son estados no perturbativos.
- $p-branas$ están cargadas eléctricamente bajo las $(p+1)-formas$ y magnéticamente bajo las $(n-p-3)-formas$ donde $n = 10$ en las teorías de cuerdas. También, $\int_{S^{n-p-2}} H_{n-p-2} = 1$, donde H_{n-p-2} es la

[8] Al integrar sobre todo el espacio-tiempo M en la acción, no hay que preocuparse por su finitud en el límite $|\vec{r}| \to \infty$ ya que imponemos la condición de que la configuración de los campos de materia vayan a un mínimo del potencial y elegimos el background gauge de tal forma que la derivada covariante se anule siempre

intensidad de campo para la $(n-p-3)-forma$ e integramos sobre la $(n-p-2)-esfera$ en el subespacio R^{n-1-p} trasversal a la $p-brana$[9].

- Las teorías de campos para estas $p-branas$ se conocen. La presencia de la brana nos rompe la simetría translacional de la teoría.

4.2. Factorizabilidad del background geométrico

Cuando tenemos una teoría con dimensiones extras, la gravedad puede propagarse por todas las dimensiones de M ya que es la dinámica del espacio-tiempo en sí mismo. No ocurre lo mismo con el contenido de materia. Ésta no puede propagarse mucho en las dimensiones extras si no queremos que haya problemas con las observaciones. Todas estas propiedades podemos conseguirlas si el Modelo Estándar se encuentra confinado a una $3-brana$ que habita en un espacio-tiempo de dimensión mayor. Estas dimensiones adicionales deberían ser compactas y menores que un milímetro. Si hay n dimensiones extra compactas, la escala de Planck se relaciona con la escala de la gravedad M_g de dimensión mayor mediante la relación:

$$M_{Pl}^2 = M_g^{2n} V_n$$

donde V_n es el volumen encerrado en las dimensiones extras compactas. Si las dimensiones extras fueran no compactas, la escala de Planck se iría a infinito.

Todos estos resultados se obtienen aceptando una *geometría factorizable*, esto es, la métrica en el subespacio-tiempo en el que vivimos (4-dimensional) no depende de las coordenadas en las dimensiones extras.

Si no aceptamos una geometría factorizable y dejamos que la métrica general dependa de todas las coordenadas (incluidas las de las dimensiones extras) podemos conseguir dimensiones extras no compactas en plena concordancia con los experimentos realizados en gravedad. También podemos conseguir una nueva relación para la escala de Planck en la que ésta no depende del *tamaño* de las dimensiones extras (como antes), sino de la *curvatura* de esas dimensiones extras. Esto me lleva a una escala de Planck finita icluso para el caso de dimensiones extras no compactas.

Partimos de una métrica que podremos desarrollar en términos de un background geométrico más un campo de fluctuaciones de la métrica que, como hemos dicho, dependerá de todas las coordenadas de la manifold M $n-$dimensional, $h_{\mu\nu}(x^\lambda, z_j)$. Este campo de fluctuaciones satisface una ecuación de ondas:

$$[\partial_\mu \partial^\mu - d_j d^j + V(z_j)] h_{\rho\sigma}(x^\mu, z_j) = 0$$

donde $V(z_j)$ es un potencial que aparece de la curvatura en las dimensiones extras.

[9]Vemos que esto se reduce a un monopolo de 't Hooft-Polyakov (0-brana) para el caso $n = 4$ del modelo de Georgi-Glashow

Si proponemos como solución funciones del tipo $h(x,z) = e^{ipx} \cdot \varphi(z)$, entonces obtenemos la ecuación

$$[d_j d^j + V(z)]\varphi(z) = -m^2 \varphi(z)$$

para la parte asociada a las dimensiones extras, donde $m^2 = p^2$.

Esto es la reducción de Kaluza-Klein (KK) de las fluctuaciones gravitacionales en una dimensión mayor, en términos de los estados KK 4-dimensionales. Estos estados 4-dimensionales tendrían una masa dada por la ecuación de autovalores de φ que hemos escrito.

Habrá un modo cero ya que el background preserva la invariancia Poincaré y una torre de estados masivos KK. Si hubiera un gap, como suele ocurrir en las *product space compactifications*, prodríamos reproducir la gravedad 4-dimensional hasta una escala fijada por el gap.

En el caso que nos va a interesar ($n = 5$), tendremos un potencial no trivial $V(z)$ que producirá un único estado ligado massless que corresponderá a un massless 4-dimensional gravitón. También tendremos un continuo de estados KK sin gap. La función de onda relacionada con la dimensión extra $\varphi(z)$ estará centrada en una $3 - brana$ a la que el Modelo Estándar está confinado.

4.3. Teoría en 1 dimensión extra no compacta con la presencia de una 3-*brana*. Modelo de Randall-Sundrum

El punto de partida para nuestra teoría con una dimensión extra, es una 3-brana de tensión positiva en un espacio-tiempo de dimensión 5 situada en $z = 0$.

En primer lugar trabajaremos en un volumen finito introduciendo otra brana (que donetaremos por brana') a una distacia $z = r_c\pi$ que hace de brana reguladora. Estas dos branas definen los dos bordes (fronteras) de la dimensión extra.

La acción reza:

$$S = S_{gravedad} + S_{brana} + S_{brana'}$$

donde

$$S_{gravedad} = \int d^4x \int dy \sqrt{-G}\left\{-\Lambda + 2M^3 R\right\}$$

$$S_{brana} = \int d^4x \sqrt{-g_{brana}}\left\{V_{brana} + \mathcal{L}_{brana}\right\}$$

y R es el escalar de Ricci a partir de la métrica 5-dimensional G_{MN}

Vamos a utilizar una nueva coordenada $y = r_c\theta$ en la dimensión extra.

La solución de las ecuaciones de Einstein es:

$$ds^2 = e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2$$

donde $0 \leq y \leq \pi r_c$ es la coordenada de la dimensión extra y r_c es un radio de compactificación.

La solución sólo se mantiene si se cumplen las condiciones:

$$V_{brane} = -V_{brane'} = 24M^3k^2$$

que siempre consideraremos que se cumple.

Si calculamos la escala de Planck que se deduce de esta teoría:

$$M_{Pl}^2 = 2M^3 \int_0^{\pi r_c} dy e^{-2k|y|} = \frac{M^3}{k}[1 - e^{-2kr_c\pi}]$$

lo que nos produce una escala de Planck bien definida en la teoría incluso en el caso de que la dimensión extra no sea compacta ($r_c \to \infty$). Tomar este límite físicamente implica quitar la brana reguladora de la teoría.

Todavía tendríamos que determinar si el espectro de las fluctuaciones linealizadas $G_{MN} = e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, y)$ es consistente con la gravitación 4-dimensional que conocemos.

Para hacer esto, proponemos como solución para la fluctuación $h(x, y) = e^{ipx} \cdot \varphi(y)$ como ya dijimos antes, donde $p^2 = m^2$ y m^2 permite una solución de la ecuación de movimiento linealizada para el tensor de fluctuaciones que se obtiene de la acción de la teoría al expandir sobre la solución a las ecuaciones de Einstein ds^2:

$$\left[\frac{-m^2}{2}e^{2k|y|} - \frac{1}{2}\partial_y^2 - 2k\delta(y) + 2k^2\right]\varphi(y) = 0$$

Nuestras condiciones de frontera nos llevan a considerar sólo funciones pares en y describiendo la semi-infinita dimensión extra que tenemos tras quitar la brana reguladora.

Esta ecuación la podemos reescribir de una forma mucho más familiar haciendo un cambio de variable:

$$z \equiv sgn(y) \times \frac{e^{k|y|} - 1}{k}$$

$$\hat{\varphi}(z) \equiv \varphi(y)e^{\frac{k|y|}{2}}$$

$$\hat{h}(x, z) \equiv h(x, y)e^{\frac{k|y|}{2}}$$

Resultando,

$$\left[-\frac{1}{2}\partial_z^2 + V(z)\right]\hat{\varphi}(z) = m^2\hat{\varphi}(z)$$

donde

$$V(z) = \frac{15k^2}{8(k \mid z \mid +1)^2} - \frac{3k}{2}\delta z$$

La fución δ mantiene un modo que es un estado ligado normalizable y massless. El resto de los autoestados son un continuo de modos sin gap que se asemejan a ondas planas asintóticamente (el potencial cae a cero si $\mid z \mid \to \infty$) y que representan estados o modos KK con todos los posibles $m^2 > 0$.

Para extender esto al caso de que toda la dimensión (no la mitad) sea infinita, sólo tenemos que permitir funciones pares e impares de z en la dimensión extra.

Podemos computar el potencial gravitacional efectivo no relativista entre dos partículas m_1 y m_2 en la brana situada en $z = 0$. Este potencial es estático y generado por el intercambio de modos cero y propagadores de los KK continuos. Esto resulta:

$$V(r) \sim G_N \frac{m_1 m_2}{r} + \int_0^\infty \frac{dm}{k} G_N \frac{m_1 m_2 e^{-mr}}{r} \frac{m}{r}$$

Entonces, el potencial se comporta como:

$$V(r) = G_N \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 + \frac{1}{r^2 k^2} \right)$$

por lo que vemos que la teoría reproduce una teoría efectiva 4-dimensional de la gravedad con un término de corrección extremadamente suprimido por k y por r(distancia testada con gravedad).

Para el límite de m pequeña (radiación gravitacional), la producción de modos continuos en la brana $z = 0$ está suprimida por $(\frac{dm}{k})(\frac{m}{k})$. Esto es muy importante porque significa que la amplitud para producir los modos continuos en los precesos de baja energía en la brana es muy pequeña. Si no fuera así, estaríamos continuamente perdiendo energía por la dimensión adicional.

Debido a esta supresión, la probabilidad de producir modos KK está suprimida por $(\frac{p}{k})^2$ en relación al modo cero, donde p es el momento del proceso. Entonces tenemos un modelo que imita una 4-dimensional teoría de la gravedad con un potencial gravitacional y una radiación gravitacional.

Expandiendo la acción podemos ver que la autointeracción del gravitón crece con el valor de la coordenadad z (de una manera dependiente de la energía). Sin embargo, fluctuaciones originadas en la brana en procesos de baja energía tienen una pequeña probabilidad de alcanzar valores grandes de z. Entonces, la emisión de gravitones y su correspondiente pérdida de energía que tendría asociada, quedan constreñidas en la teoría efectiva de bajas energías en este modelo a valores muy pequeños. Todo esto siempre tiene un ajuste fino de la tensión de la brana lo que es equivalente al problema de la constante cosmológica el cual sigue estando en la teoría pero ahora de esta manera.

La teoría efectiva construída en este modelo debido a Randall-Sundrum es una alternativa a la compactificación geométrica.

5. Bibliografía

- Notas del curso *Introducción a la teoría de cuerdas* de Ángel Uranga que se imparte en el programa de doctorado en Física Teórica de la Universidad

Autónoma de Madrid.

- Capítulo 6 de *Aspects of Symmetry*. S.Coleman. Cambridge Univ. Press.
- *An alternative to Compatification*. L.Randall y R.Sumdrum. Physical Review Letters. Vol 83. Num 23. Pag4690.
- *Gravity ad Strings*. Tomás Ortín. Cambridge Monographs on Mathematical Physics 2004.
- *Gravitation, gauge theories and differential geometry*. Thoru Eguchi, B. Gilkey y J.Hanson.