Campos escalares acoplados a gravedad
y la constante cosmológica Λ

Abstract

En estas notas se derivan las ecuaciones de movimiento de un sistema general de campos escalares (reales) acoplados a gravitación y se particularizan para el caso de soluciones maximalmente simétricas.

1 Acción gravitacional

Partiendo de la acción de Einstein-Hilbert que describe gravitación pura,

$$S_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int dx^4 \sqrt{g}\ R$$

donde $R(x) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ y considerando transformaciones de la métrica $g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ obtenemos una variación de la acción

$$\begin{aligned}
\delta S_G &= \frac{1}{2\kappa^2} \int dx^4 \delta(\sqrt{g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = \\
&= \frac{1}{2\kappa^2} \int dx^4 \left[(\delta\sqrt{g}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{g}(\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu})\right]
\end{aligned}$$

Utilizando

- $\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\, g^{\lambda\epsilon} \delta g_{\lambda\epsilon}$
- $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\lambda} g^{\nu\epsilon} \delta g_{\lambda\epsilon}$
- $\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\beta})_{;\nu} - (\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\nu})_{;\beta}$[1]

$$\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \sqrt{g} \left[(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\beta})_{;\nu} - (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\nu})_{;\beta}\right] \longrightarrow No\ aporta\ a\ la\ integral^2$$

llegamos a

$$\delta S_G = -\frac{1}{2\kappa^2} \int dx^4 \sqrt{g} \left[\overbrace{R^{\lambda\epsilon} - \frac{1}{2} g^{\lambda\epsilon} R}^{G^{\lambda\epsilon}}\right] \delta g_{\lambda\epsilon} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int dx^4 \sqrt{g}\, G^{\lambda\epsilon} \delta g_{\lambda\epsilon}$$

Luego, la ecuación que encontramos para el caso de gravedad pura es

$$\frac{\delta S_G}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \Longrightarrow \ G^{\mu\nu} = 0$$

[1] La conexión no es un tensor, pero la diferencia entre dos conexiones $\delta\Gamma$ sí lo es.

[2] $[D_\rho, g_{\mu\nu}] = 0$

2 Acción de materia

Cuando incorporamos materia a la estructura espacio-temporal, ésta se acopla a la métrica, modificando así la ecuación de Einstein que habíamos deducido anteriormente.

Partiendo de

$$S_M = \int dx^4 \sqrt{g}\, \left[\lambda\, K_{ij}\, g^{\rho\sigma}\, (\partial_\rho \varphi^i)\, (\partial_\sigma \varphi^j) - V(\varphi)\right]$$

y calculando la variación de la acción bajo transformaciones $g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\delta S_M = & \\
= & \int dx^4 \left[(\delta\sqrt{g})\, \left[\lambda\, K_{ij}\, g^{\rho\sigma}\, (\partial_\rho \varphi^i)\, (\partial_\sigma \varphi^j) - V(\varphi)\right] + \sqrt{g}\left[\lambda\, K_{ij} (\delta g^{\rho\sigma})\, (\partial_\rho \varphi^i)\, (\partial_\sigma \varphi^j)\right]\right] = \\
= & \frac{1}{2} \int dx^4 \sqrt{g} \left[g^{\mu\nu} \left[\lambda\, K_{ij}\, g^{\rho\sigma}\, (\partial_\rho \varphi^i)\, (\partial_\sigma \varphi^j) - V(\varphi)\right] - 2\, \lambda\, K_{ij} g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} (\partial_\rho \varphi^i)(\partial_\sigma \varphi^i)\right] (\delta g_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

Atendiendo a la definición general del tensor energía momento

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int dx^4 \sqrt{g}\, T^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu})$$

podemos identificar

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left[\lambda\, K_{ij}\, g^{\rho\sigma}\, (\partial_\rho \varphi^i)\, (\partial_\sigma \varphi^j) - V(\varphi)\right] - 2\, \lambda\, K_{ij} g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} (\partial_\rho \varphi^i)(\partial_\sigma \varphi^i)$$

Si lo queremos con los índices abajo, hemos de multiplicar por $g_{\lambda\mu} g_{\epsilon\nu}$

$$T_{\lambda\epsilon} = g_{\lambda\epsilon} \left[\lambda\, K_{ij}\, g^{\rho\sigma}\, (\partial_\rho \varphi^i)\, (\partial_\sigma \varphi^j) - V(\varphi)\right] - 2\, \lambda\, K_{ij} (\partial_\lambda \varphi^i)(\partial_\epsilon \varphi^i)$$

donde hemos utilizado $g^{\rho\mu} g_{\lambda\mu} = \delta^\rho_\lambda$

Para tener la acción total

$$S = S_G + S_M \Longrightarrow \delta S = \delta S_G + \delta S_M$$

Esto es

$$\delta S = \int dx^4 \sqrt{g} \left[-\frac{1}{2\kappa^2} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right) + \frac{1}{2} T^{\mu\nu}\right] (\delta g_{\mu\nu})$$

Lo que nos lleva a la ecuación de Einstein en presencia de materia

$$\frac{\delta S_G}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \Longrightarrow \quad G^{\mu\nu} = \kappa^2\, T^{\mu\nu}$$

3 Ecuación de movimieto para la materia

Una vez que conocemos la acción para la materia, podemos obtener su ecuación de movimiento a partir del principio de mínima acción, esto es, las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$S_M = \int dx^4 L_M = \int dx^4 \sqrt{g}\, \left[\lambda\, K_{ij}\, g^{\mu\nu}\, (\partial_\mu \varphi^i)\, (\partial_\nu \varphi^j) - V(\varphi)\right]$$

entonces

$$L_M = \sqrt{g}\, \left[\lambda\, K_{ij}\, g^{\mu\nu}\, (\partial_\mu \varphi^i)\, (\partial_\nu \varphi^j) - V(\varphi)\right]$$

Vamos a obtener la ecuación de movimiento:

$$\bullet \frac{\partial L_M}{\partial \varphi^k} = \sqrt{g} \left[\lambda\, g^{\mu\nu} \frac{\partial K_{ij}}{\partial \varphi^k} (\partial_\mu \varphi^i)\, (\partial_\nu \varphi^j) - \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k}\right]$$

$$\begin{aligned}\bullet \frac{\partial L_M}{\partial(\partial_\sigma \varphi^k)} &= \sqrt{g}\, \lambda\, g^{\mu\nu}\, K_{ij} \left[\delta^\sigma_\mu \delta^i_k (\partial_\nu \varphi^j) + (\partial_\mu \varphi^i) \delta^\sigma_\nu \delta^j_k\right] = \\ &= \sqrt{g}\, \lambda\, \left[g^{\sigma\nu} K_{kj} (\partial_\nu \varphi^j) + g^{\mu\sigma} K_{ik} (\partial_\mu \varphi^i)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \partial_\sigma \left(\frac{\partial L_M}{\partial(\partial_\sigma \varphi^k)}\right) &= (\partial_\sigma \sqrt{g}) \lambda \left[g^{\sigma\nu} K_{kj} (\partial_\nu \varphi^j) + g^{\mu\sigma} K_{ik} (\partial_\mu \varphi^i)\right] + \\ &+ \sqrt{g}\, \lambda \Bigg[(\partial_\sigma g^{\sigma\nu}) K_{kj} (\partial_\nu \varphi^j) + g^{\sigma\nu} \frac{\partial K_{kj}}{\partial \varphi^i} (\partial_\sigma \varphi^i)\, (\partial_\nu \varphi^j) + g^{\sigma\nu} K_{kj} (\partial_\sigma \partial_\nu \varphi^j) + \\ &+ (\partial_\sigma g^{\mu\sigma}) K_{ik} (\partial_\mu \varphi^i) + g^{\mu\sigma} \frac{\partial K_{ik}}{\partial \varphi^j} (\partial_\sigma \varphi^j)\, (\partial_\mu \varphi^i) + g^{\mu\sigma} K_{ik} (\partial_\sigma \partial_\mu \varphi^i)\Bigg]\end{aligned}$$

Podemos renombrar los índices mudos de tal manera que se vea más claramente la estructura de la ecuación de movimiento. Lo único que asumiremos en este paso es que la **métrica $g_{\mu\nu}$ es simétrica**:

$$\partial_\sigma \left(\frac{\partial L_M}{\partial(\partial_\sigma \varphi^k)}\right) - \frac{\partial L_M}{\partial \varphi^k} = 0$$

Veamos,

$$\begin{aligned}\bullet \quad & (\partial_\sigma \sqrt{g})\, \lambda\, (K_{km} + K_{mk}) g^{\sigma\mu} (\partial_\mu \varphi^m) + \sqrt{g} \lambda\, \left[(K_{km} + K_{mk})\, \Box \varphi^m + (\partial_\sigma g^{\sigma\mu}) (K_{km} + K_{mk}) (\partial_\mu \varphi^m) + \right. \\ + \quad & \left. 2\, \frac{1}{2} \left[\frac{\partial K_{ik}}{\partial \varphi^j} + \frac{\partial K_{kj}}{\partial \varphi^i} - \frac{\partial K_{ij}}{\partial \varphi^k}\right] g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi^i)\, (\partial_\nu \varphi^j) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k}\right] = 0\end{aligned}$$

Ahora vamos a suponer que la **métrica K_{ij} es simétrica**:

$$\begin{aligned}\bullet \quad & (\partial_\sigma \sqrt{g})\, \lambda\, 2\, K_{km} g^{\sigma\mu} (\partial_\mu \varphi^m) + \sqrt{g} \lambda\, \left[2\, K_{km}\, \Box \varphi^m + (\partial_\sigma g^{\sigma\mu})\, 2\, K_{km} (\partial_\mu \varphi^m) + \right. \\ + \quad & \left. 2\, \frac{1}{2} \left[\frac{\partial K_{ki}}{\partial \varphi^j} + \frac{\partial K_{kj}}{\partial \varphi^i} - \frac{\partial K_{ij}}{\partial \varphi^k}\right] g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi^i)\, (\partial_\nu \varphi^j) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^k}\right] = 0\end{aligned}$$

Multiplicando a ambos lados por $\frac{1}{2}\, K^{qk}$ y teniendo en cuenta que

$$K^{qk} K_{km} = \delta^q_m$$

- $(\partial_\sigma \sqrt{g})\,\lambda\, g^{\sigma\mu}(\partial_\mu \varphi^q) \;+\; \sqrt{g}\lambda\,\Big[\,\Box\varphi^q \;+\; (\partial_\sigma g^{\sigma\mu})\,(\partial_\mu\varphi^q) +$

$$+ \quad \underbrace{\frac{1}{2}\,K^{qk}\left[\frac{\partial K_{ki}}{\partial\varphi^j} + \frac{\partial K_{kj}}{\partial\varphi^i} - \frac{\partial K_{ij}}{\partial\varphi^k}\right]}_{\Gamma^q_{ij}} g^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi^i)\,(\partial_\nu\varphi^j) \;+\; \frac{1}{2\,\lambda}\,K^{qk}\,\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi^k}\Bigg] = 0$$

Ahora bien, operando un poco

$$(\partial_\sigma \sqrt{g}) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}(\partial_\sigma g) = \sqrt{g}\;\underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{1}{g}(\partial_\sigma g)}_{\Gamma^\epsilon_{\epsilon\sigma}} = \sqrt{g}\,\Gamma^\epsilon_{\epsilon\sigma}$$

Entonces, la ecuación de movimiento reza:

$$\sqrt{g}\lambda\,\left[\,\Box\varphi^q \;+\; \left[(\partial_\sigma g^{\sigma\mu}) \;+\Gamma^\epsilon_{\epsilon\sigma}\,g^{\sigma\mu}\right]\,(\partial_\mu\varphi^q) \;+\; \Gamma^q_{ij}\,g^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi^i)\,(\partial_\nu\varphi^j) \;+\; \frac{1}{2\,\lambda}\,K^{qk}\,\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi^k}\right] = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\boxed{\Box\varphi^q \;+\; \left[(\partial_\sigma g^{\sigma\mu}) \;+\Gamma^\epsilon_{\epsilon\sigma}\,g^{\sigma\mu}\right]\,(\partial_\mu\varphi^q) \;+\; \Gamma^q_{ij}\,g^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi^i)\,(\partial_\nu\varphi^j) \;+\; \frac{1}{2\,\lambda}\,K^{qk}\,\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi^k} = 0}$$

Para llegar a este resultado lo único que hemos asumido es que tanto la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$, como la métrica de Kähler K_{ij} son **simétricas**.

4 Soluciones maximalmente simétricas con campos escalares constantes

Si nos centramos en configuraciones con escalares reales constantes

$$\varphi^i(x) = c^i$$

el tensor de energía momento se reduce a

$$T_{\mu\nu} = -V(c^i)\;g_{\mu\nu} \equiv -\frac{\Lambda}{\kappa^2}\;g_{\mu\nu}$$

donde $\Lambda \equiv \kappa^2\,V(c^i)$. Este tensor de energía momento corresponde a un fluido perfecto de tipo energía de vacío. Esto es un fluido perfecto con ecuación de estado

$$P = -\rho = -V(c^i) \equiv -\frac{\Lambda}{\kappa^2}$$

La ecuación de movimiento para los campos escalares se reduce a la condición de extremización del potencial

$$\left.\frac{\partial V}{\partial\varphi^k}\right|_{\varphi^i=c^i} \quad = \quad 0$$

y determina los valores de los escalares $\varphi^i(x) = c^i$. Por otro lado, la ecuación de movimiento para la métrica (ecuación de Einstein) toma la forma

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2\, T_{\mu\nu} = -\Lambda\; g_{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \quad G_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = 0$$

con $\Lambda \equiv \kappa^2\, V(c^i)$. De esta manera identificamos la energía del vacío Λ (también conocida como constante cosmológica) con el valor del potencial escalar $V(\varphi)$ en el extremo $\varphi^i = c^i$. Las soluciones maximalmente simétricas de la ecuación de Einstein serán pues de tipo Anti de Sitter ($\Lambda < 0$), Minkowski ($\Lambda = 0$) o de Sitter ($\Lambda > 0$).

En resumen, tener campos escalares φ^i acoplados a gravitación proporciona un posible origen para la constante cosmológica Λ. Ésta no sería más que el resultado de la "estabilización" de los campos escalares a los valores $\varphi^i = c^i$ que extremizan el potencial escalar de interacción $V(\varphi)$.