Construcción del Moduli-Space (non-geometrical) en SUGRA N=1 D=4

Adolfo Guarino

Abstract

En estas notas se expone la línea seguida en el curso académico 2005-2006.

Contents

1 Carga Central Z en SUSY N=1 d=4

Partimos del Lagrangiano de SUSY

$$L = \int d^4\theta \Phi^\dagger \Phi + \left[\int d^2\theta W(\Phi) + h.c. \right]$$

que también podemos escribir en función de las componentes del supercampo quiral como

$$L = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) + i\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu(\partial_\mu \psi) - \left[\frac{1}{2} \frac{\partial W(\varphi)}{\partial\varphi\partial\varphi} \psi\psi + h.c. \right] - V_{WZ}(\varphi)$$

donde

$$V_{WZ}(\varphi) = |F|^2 = \left| \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi} \right|^2$$

Aplicando el teorema de Noether sobre la transformación de SUSY obtenemos la corriente conservada

$$J^\mu_\alpha = [\sigma^\nu \overline{\sigma}^\mu \psi](\partial_\nu \varphi^*) - i[\sigma^\mu \overline{\psi}] \left(\frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial \varphi^*} \right) + der.\ tot$$

donde la carga conservada es

$$Q_\alpha = \int d^3x J^0_\alpha$$

Conmutando dos cargas conservadas y utilizando $\left\{ \psi_\alpha, \overline{\psi}_{\dot\alpha} \right\} = 1_{\alpha\dot\alpha}$, obtenemos[1] (para el caso de soluciones estáticas, $\partial_0 \varphi^* = 0$)

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \left\{ J^0_\alpha, J^0_\beta \right\} = 2T_{\alpha\beta} = 4\overrightarrow{\sigma}_{\alpha\beta} \int d^3x \left\{ \overrightarrow{\nabla} W^*(\Phi^\dagger) \right\}_{\overline{\theta}=0}$$

La simetría del espacio-tiempo que estamos considerando en SUSY N=1 d=4, es el superálgebra de Poincaré. Éste no permitiría extensiones del álgebra mediante cargas centrales Z en el caso $N = 1$, que es el que estamos tratando. Este argumento se basa en el teorema de Coleman-Mandula respecto a la máxima simetría que puede tener la matriz de scattering S, siempre manteniendo la invariancia Lorentz. Con todo esto lo que venimos a decir es que hemos encontrado de forma natural una extensión con carga central del superálgebra de Poincaré ($N = 1, d = 4$) a cambio de perder la invariancia Lorentz $SO(1,3)$ en los $|estado >$'s que representen configuraciones del campo escalar φ para las que esta carga central $Z[W(\varphi_{\pm\infty})]$no se anule.

[1] Al calcular el conmutador aparece un sumando adicional en el integrando debido a las "*der. tot*" que tenemos en la corriente de Noether. Este sumando adicional representa una derivada total del superpotencial en el espacio de campos, la cual se anulará para el caso de un estado de vacío supersimétrico.

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2T_{\alpha\beta} = 4\overrightarrow{\sigma}_{\alpha\beta} \int d^3x \left\{ \overrightarrow{\nabla} W^*(\Phi^\dagger) \right\}_{\overline{\theta}=0}$$

Si la componente escalar $\varphi_t(x, y, z)$ del supercampo Φ depende sólo de la coordenada z (simetría del sistema), la expresión anterior se reduce a:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2T_{\alpha\beta} = 4A\,(\sigma^3)_{\alpha\beta} \int dz\,(\partial_z W^*(\varphi^*)) = 2A\,(\sigma^3)_{\alpha\beta} Z^*$$

donde A es el área transversal a la dirección z en la que el campo φ no varía.

Entonces,

$$Z^* = 2\,(W^*[\varphi(z = +\infty)] - W^*[\varphi(z = -\infty)]) \equiv \text{"}Carga\ \ Central^{*2}\text{"}$$

2 Ecuación de movimiento para un campo escalar complejo en SUSY N=1 d=4

Utilizando la parte escalar del L_{SUSY}, podemos escribir la expresión del Hamiltoniano (energía) para el caso de **soluciones estáticas**:

$$E(\varphi, \varphi^*) = \int d^3x \left[(\partial_i \varphi^*)(\partial^i \varphi) + V(\varphi, \varphi^*) \right] = \int d^3x \left[(\partial_z \varphi^*)(\partial_z \varphi) + |F|^2 \right] =$$

$$= A \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[-\varphi^*(\partial_z^2 \varphi) + \underbrace{\partial_z\left(\varphi^*(\partial_z \varphi)\right)}_{cond.contorno} + \left| \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi} \right|^2 \right] = A \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[-\varphi^*(\partial_z^2 \varphi) + \left| \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi} \right|^2 \right].$$

Al estar en el caso estático, podemos minimizar el funcional $E(\varphi, \varphi^*)$ respecto a los campos independientes para obtener sus ecuaciones de movimiento (ver apéndice):

- Para el campo φ:

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi^*} = 0 \Longrightarrow (\partial_z^2 \varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi^*} \left| \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi} \right|^2$$

- Para el campo φ^*:

$$\frac{\partial E^*}{\partial \varphi} = 0 \Longrightarrow (\partial_z^2 \varphi^*) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left| \frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial \varphi^*} \right|^2$$

[2] La carga central Z que aparece en SUSY ($N = 1, d = 4$) es un escalar complejo, entonces está claro que conmutará con todos los generadores del superálgebra.

- Como el superpotencial es una función holomorfa, $\left|\frac{\partial W(\varphi)}{\partial\varphi}\right| = \left|\frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial\varphi^*}\right|$.

Como condiciones de contorno utilizaremos la notación:

$$\varphi(z = -\infty) \equiv \varphi_{-\infty}$$

$$\varphi(z = +\infty) \equiv \varphi_{+\infty}$$

Para tener soluciones de energía finita podemos tener dos casos:

- El potencial $V(\varphi, \varphi^*)$ se anula en $\pm\infty$ porque $\varphi_{\pm\infty} = 0 \Rightarrow W(\varphi) = 0$
- El potencial $V(\varphi, \varphi^*)$ se anula en $\pm\infty$ porque $W(\varphi)$ va a dos de sus mínimos. Esto se debe a que en $\pm\infty$ ocurre que $\varphi_{\infty} = \varphi_{*i}$, $\varphi_{-\infty} = \varphi_{*j}$, donde φ_{*i}, φ_{*j} son dos mínimos pertenecientes al conjunto de mínimos del superpotencial, $\{\varphi_{*i}\}_{i=1\dots m}$. En general $i \neq j$, aunque pueden coincidir en lo que se llama *"configuración trivial de vacío"*, pero este caso es análogo al del punto anterior salvo un *shift* en el superpotencial.

3 Soluciones *1/2-SUSY*

En SUSY N=1 d=4 nos encontramos con 1 carga conservada que es fermiónica de Majorana. Esto se traduce en que los parámetros de una transformación de SUSY constituyen un spinor de Majorana, $\xi_\alpha = i(\sigma_2)_{\alpha\dot\beta}\overline{\xi}^{\dot\beta}$. Esto es:

$$2\ d.o.f \in C \Longrightarrow 4\ d.o.f \in R$$

Esto nos permite fijar una transformación de SUSY pura mediante 2 números complejos, esto es, 2 módulos + 2 fases.

Bajo una transformación de SUSY pura, los supercampos sufren translaciones a lo largo de las coordenadas fermiónicas del "superespacio". Estas translaciones son generadas por unas "derivadas fermiónicas". Esto se traduce en que las componentes bosónica φ y fermiónica ψ de un supercampo Φ se entremezclan entre sí con un determinado *"grado de mezcla"* que viene dado por el parámetro (fermión de Majorana) de la transformación de SUSY pura. La Naturaleza supersimétrica no distingue observables bajo cualquiera estas transformaciones. Es una simetría del espacio-tiempo.

Una transformación SUSY pura reza:

$$\delta\varphi = \sqrt{2}\xi^\alpha\psi_\alpha$$

$$\delta\psi = \sqrt{2}F\xi_\alpha + i\sqrt{2}(\partial_\mu\varphi)\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\xi}^{\dot\alpha}$$

$$\delta F = i\overline{\xi}_{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\alpha}(\partial_\mu\psi_\alpha)$$

Si queremos una configuración del campo escalar $\varphi(x)$ en el estado de vacío de la teoría que cumpla la ecuación de movimiento y que además no rompa la SUSY , $<0|\delta\psi_\alpha(x)|0>=0$, han de cumplirse simultáneamente:

$$\sqrt{2}F\xi_\alpha = -i\sqrt{2}(\partial_\mu\varphi)\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\xi}^{\dot{\alpha}}$$
$$(\partial_z^2\varphi) = \frac{\partial}{\partial\varphi^*}\left|\frac{\partial W(\varphi)}{\partial\varphi}\right|^2$$

Esto no se cumple para cualquier ξ_α que elijamos, sino que impone una condición sobre el spinor de Majorana que actúa de parámetro de la transformación de SUSY pura:

$$-\sigma_3\xi = ie^{i\alpha}\overline{\xi}$$

donde $\xi \equiv \xi^\alpha$, $\overline{\xi} \equiv \overline{\xi}^{\dot{\alpha}}$ y α es cualquier fase (la cual fijaremos luego en lo que se llama la elección estándard del superpotencial de tal manera que $W(\varphi_{*2})$ sea real y que $W(\varphi_{*1})=0$.

Esta condición sobre el spinor de Majorana ξ no fija las 4 componentes (2módulos + 2fases) del mismo, sino que únicamente fija las dos fases. Los dos módulos siguen representando una simetría de la teoría, por lo que las soluciones que encontremos mantienen la mitad de la supersimetría que teníamos inicialmente. Es por eso que llaman *1/2-SUSY solutions.* Seguimos teniendo los dos módulos, $|\xi_1|$ y $|\xi_2|$ libres en la transformación de SUSY pura.

Las fases quedan determinadas de manera que, si $\xi_1 = |\xi_1|e^{i\theta_1}$ y $\xi_2 = |\xi_2|e^{i\theta_2}$, la condición sobre el spinor de Majorana fija:

$$\theta_1 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \theta_2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Tomando como ejemplo un spinor de Majorana normalizado a la unidad, obtenemos por sustitución en la transformación de SUSY pura:

$$(\partial_z\varphi) = -Fe^{i\alpha} = \frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial\varphi^*}e^{i\alpha}$$

donde de nuevo hemos asumido el problema anterior con simetría en el plano $x-y$. Esta ecuación recibe el nombre de *"Creek equation"*.

En estos estados:

$$\underbrace{\{|\xi_1| \ , \ |\xi_2| \ , \ \theta_1 \ , \ \theta_2\}}_{SUSY} \Longrightarrow \underbrace{\{|\xi_1| \ , \ |\xi_2|\}}_{1/2-SUSY}$$

[2] El fermión ψ_α no puede tomar valor esperado en el vacío si queremos respetar la invariancia Lorentz, $<0|\psi_\alpha(x)|0>=0 \Rightarrow <0|\delta\varphi(x)|0>=0$

La pregunta pues que surge de forma natural es plantearse si una solución de la *"Creek equation"* que mantiene $1/2-SUSY$ es solución de la ecuación de movimiento. Debe serlo pues el hecho de fijar las dos fases en el spinor de Majorana de la transformación SUSY nos compatibilizaba las dos ecuaciones. Aun así, vamos a probarlo explícitamente:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial \varphi^*} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial \varphi^*}\right) = \underbrace{\frac{\partial \varphi^*}{\partial z}}_{\text{"Creek eq."}} \frac{\partial}{\partial \varphi^*}\left(\frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial \varphi^*}\right) =$$

$$= \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi}\frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial \varphi^* \partial \varphi^*} = \frac{\partial}{\partial \varphi^*}\left\{\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi}\frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial \varphi^*}\right\} - \frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial \varphi^*}\underbrace{\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi^* \partial \varphi}}_{0 \rightarrow W\ holon.} = \frac{\partial}{\partial \varphi^*}\left|\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi}\right|^2$$

Luego, vemos que las soluciones *1/2-SUSY* son un subconjunto de las soluciones de la ecuación de movimiento que mantienen la mitad de la SUSY en lugar de romperla completamente, como corresponde al caso general.

4 Soluciones B.P.S

Cuando tenemos un superálgebra extendida con cargas centrales, pueden existir lo que se llaman estados B.P.S que son configuraciones del campo compatibles con la ecuación de movimiento y que tienen la propiedad de que:

$$E \geq |Z|$$

Esto representa un límite inferior a la energía (masa al pasar a la interpretación de partículas) dependiente de la carga central. Para que existan estados B.P.S necesitamos que haya (al menos) dos estados de vacío (mínimos del superpotencial) tal que

$$W(\varphi_{*2}) \neq W(\varphi_{*1})$$

para tener así un estado B.P.S con

$$E \geq |Z| = 2\,|W(\varphi_{*2}) - W(\varphi_{*1})|$$

La condición $|Z| \neq 0$ es **necesaria** pero **no suficiente** para la existencia de soluciones B.P.S.

Si la desigualdad satura, $E = |Z|$, la configuración recibe el nombre de *B.P.S-saturated state*. Estas configuraciones B.P.S-saturated tienen una propiedad fundamental. Además de cumplir la ecuación de movimiento (son un subconjunto de las soluciones), no rompen totalmente la supersimetría (como ocurriría en general para una solución de la ec. de movimiento) sino que mantienen $1/2 - SUSY$. Además también ocurre que, además de cumplir la ec. de movimiento de segundo orden, cumplen otra ecuación de movimiento (compatible con la general de segundo orden) que es de primer orden y, por consiguiente, más sencilla a la hora de integrar.

5 Elección estándar del superpotencial $W(\varphi)$

En la ecuación de movimiento para un campo escalar complejo en SUSY N=1 d=4 vemos que no nos aparece el superpotencial $W(\varphi)$ como tal, sino que nos aparece $\left|\frac{\partial W(\varphi)}{\partial\varphi}\right|^2$.

Esto nos da dos libertades a la hora de elegir el superpotencial sin alterar la ecuación de movimiento:

- Hacer un *shift* en el superpotencial: $W(\varphi) \longrightarrow W(\varphi) + Cte.$
- Rotar la fase en el superpotencial: $W(\varphi) \equiv |W(\varphi)|e^{i\delta_W} \longrightarrow |W(\varphi)|e^{i(\delta_W+\delta_{shift})}$

El problema que aparece es que, en las ecuaciones de movimiento tenemos las dos libertades anteriores, pero en el caso de la *"Creek equation"*, no tenemos $\left|\frac{\partial W(\varphi)}{\partial\varphi}\right|$ sino $\frac{\partial W(\varphi)}{\partial\varphi}$ y perdemos la libertad de rotar el superpotencial. Esto no debe preocuparnos porque la condición que teníamos sobre el spinor de Majorana de la transformación de SUSY tenía una fase $e^{i\alpha}$ que quedaba libre a fijar por nosotros. Lo que haremos será escoger esa fase $e^{i\alpha}$ de tal manera que absorba la fase del superpotencial $e^{i\delta_W}$. Esto es,

$$e^{i\alpha} = e^{-i\delta_W}$$

donde $\delta_W = \frac{W(\varphi)}{|W(\varphi)|}$

No tenemos que preocuparnos tampoco de si la fase del superpotencial δ_W varía de un punto a otro, porque podemos demostrar[3] que $\delta_W \neq \delta_W(z)$. Entonces podemos hacer esto de forma global (y no punto a punto), porque estamos en SUSY global, $\xi \neq \xi(x) \Rightarrow \alpha \neq \alpha(x)$. Si la fase del superpotencial δ_W dependiese de la coordenada z no podríamos hacer esta elección estándard para el superpotencial $W(\varphi)$ al menos dentro del marco de la SUSY global. En SUGRA podríamos conseguir el superpotencial real y nulo en cada punto, pues podríamos hacer la elección estándard punto a punto gracias a que $\alpha = \alpha(x)$.

Con todo esto, siempre podemos hacer:

- $W(\varphi_{*1}) \equiv 0 \Longrightarrow$ *Shift en el superpotencial.*
- $W(\varphi_{*2}) \in R \Longrightarrow$ *Rotación de la **fase constante** del superpotencial.*

[3]Esto es cierto al menos para SUSY N=1 d=4 con métrica canónica en el espacio de campos escalares. Esto se puede ver en la sec.10

resultando,

$$Z = |Z| = Re\{Z\} = 2W(\varphi_{*2})$$

6 *1/2-SUSY solution ⇔ B.P.S.-saturated solution*

Vamos a demostrar que hablar de *"1/2-SUSY solution"* es equivalente a hablar de *"B.P.S-saturated solution"*. Para ello, expondremos la demostración de la implicación en los dos sentidos:

- *1/2-SUSY solution ⇒ B.P.S.-saturated solution*

Calculemos el Hamiltoniano (energía) del sistema:

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[(\partial_z\varphi^*)(\partial_z\varphi) + \left|\frac{\partial W(\varphi)}{\partial\varphi}\right|^2\right] \\
&= A\left\{\int_{\infty}^{\infty} dz \left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial\varphi^*}\right) + \int_{\infty}^{\infty} dz \frac{\partial W(\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial\varphi^*}\right\} \\
&= 2A\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial z} \\
&= 2A\left[W^*(\varphi_{*2}) - W^*(\varphi_{*1})\right] \\
&= AZ^*
\end{aligned}$$

Si hacemos la elección estándar del superpotencial, $Z^* = Z = |Z|$, resultando:

$$\varepsilon = \frac{E}{A} = |Z|$$

Con lo que demostramos la implicación *1/2-SUSY solution ⇒ B.P.S.-saturated solution.*

- *1/2-SUSY solution ⇐ B.P.S.-saturated solution*

Sea el funcional semidefinido positivo:

$$\begin{aligned}
\Theta &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \left|\dot\varphi - \frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial\varphi^*}\right|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dz \left(\dot\varphi - \frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial\varphi^*}\right)\left(\dot\varphi^* - \frac{\partial W(\varphi)}{\partial\varphi}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dz (K^{-1})^i{}_j \left(\frac{\partial W^*}{\partial\varphi^{*i}}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi_j}\right)\left[\dot\varphi\dot\varphi^* + \left|\frac{\partial W(\varphi)}{\partial\varphi}\right|^2\right] - \int_{-\infty}^{\infty} dz \left(\dot\varphi\frac{\partial W(\varphi)}{\partial\varphi} + \dot\varphi^*\frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial\varphi^*}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[\dot\varphi\dot\varphi^* + \left|\frac{\partial W(\varphi)}{\partial\varphi}\right|^2\right] - \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\partial}{\partial z}\left[W(\varphi) + W^*(\varphi^*)\right]
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz \left[\dot{\varphi}\dot{\varphi}^* + \left|\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi}\right|^2\right]}_{\frac{E}{A}} - \underbrace{2Re\left\{W(\varphi)\right\}_{-\infty}^{\infty}}_{Re\{Z\}} \geq 0. \qquad (1)$$

Asumiendo la elección estándard del superpotencial,$Re\left\{Z\right\} = |Z|$,

$$\Theta = \frac{E}{A} - |Z| \geq 0$$

Si imponemos B.P.S-saturated, $\frac{E}{A} = |Z| \Longrightarrow \Theta = 0$, resultando entonces:

$$\Theta = \int_{-\infty}^{\infty} dz \left|\dot{\varphi} - \frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial \varphi^*}\right|^2 = 0$$

entonces

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial \varphi^*}$$

Con lo que demostramos la implicación *1/2-SUSY solution* $\Leftarrow$ *B.P.S.-saturated solution.*

7 Lagrangiano SUGRA N=1 d=4 en M_4

Partimos del Lagrangiano de SUSY global no renormalizable (para el caso $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$). Esto es, la parte bosónica del superespacio es la geometría de Minkowski M_4.

$$L_{SUSY global} = \int d^4\theta K\left[\Phi_i^\dagger, \Phi_j\right] + \left[\int d^2\theta W(\Phi_i, \Phi_j) + h.c.\right]$$

Al hacer la SUSY local e incorporar el supermultiplete [gravitón,gravitino], hay que considerar términos en el Lagrangiano que incorporan el nuevo supermultiplete. Esto es autoacoplos, acoplos entre ellos y acoplos con los supercampos quirales (que también podemos escribir en función de las componentes del supercampo quiral). Sin tener en cuenta nada de gravitones ni de gravitinos por estar en Minkowski, el nuevo Lagrangiano de SUGRA (en Minkowski) queda de la forma:

$$L_{SUGRA} = L_B + L_{FK} + L_F$$

donde

$$L_B = G^i{}_j(D_\mu\varphi_i)(D^\mu\varphi^{*j}) + \underbrace{e^G\left[3 - G_i(G^{-1})^i{}_j G^j\right]}_{-V(\varphi_i,\varphi^{*j})}$$

$$L_{FK} = iG^i{}_j\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu(D_\mu\psi^j) + h.c.$$

$$L_F = \frac{1}{2}\, e^{\frac{G}{2}}\left[-G^{ij} - G^iG^j + G^{ij}{}_k(G^{-1})^k{}_l G^l\right]\overline{\psi}_i\overline{\psi}_j + h.c.$$

Como vemos, todo depende de la función $G(\varphi_i, \varphi^{*j})$ y de sus derivadas. Ésta es la función de Kähler, la cual se define como:

$$G(\varphi_i, \varphi^{*j}) = J(\varphi_i, \varphi^{*j}) + Ln|W(\varphi)|^2$$

donde

- $J(\varphi_i, \varphi^{*j}) = -3Ln\left(\frac{-3\,e^{\frac{K(\varphi_i,\varphi^{*j})}{-3}}}{-3}\right) = K(\varphi_i, \varphi^{*j})$
- $W(\varphi) \Rightarrow$ Es el superpotencial de la teoría.

Luego para hacer una teoría en SUGRA N=1 d=4 hemos de escoger una función $K(\varphi_i, \varphi^{*j})$ y un superpotencial holónomo $W(\varphi)$.

Las magnitudes que aparecen en el L_{SUGRA} se definen como:

- $G^i \equiv \frac{\partial G(\varphi_i,\varphi^{*j})}{\partial \varphi_i}$
- $G_j \equiv \frac{\partial G(\varphi_i,\varphi^{*j})}{\partial \varphi^{*j}}$
- $G^i{}_j \equiv \frac{\partial G(\varphi_i,\varphi^{*j})}{\partial \varphi_i \partial \varphi^{*j}}$

y, como siempre, la derivada espacio-temporal está covariantizada. Al estar en Minkowski, tenemos que $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$. También la derivada ha de covariantizarse con la conexión del $SO(1,3)-world$, $D_\mu = \partial_\mu - i\omega_{\mu ab}\left(\frac{M_{ab}}{4}\right)$, siendo M_{ab} los generadores de $SO(1,3)$ (para implementar cualquier spinor en el espacio-tiempo). Aunque en Minkowski tampoco tenemos que tenerla en cuenta pues $\omega_{\mu ab} = 0$ también.

8 Ecuación de movimiento para un campo escalar complejo para SUGRA N=1 d=4 en M_4

En la teoría que se desarrolla tenemos:

- $W(\varphi)$
- $K(\varphi_i, \varphi^{*j}) = K^i{}_j \varphi_i \varphi^{*j}$

donde la métrica de Kähler no depende del punto en el espacio de campos ni del espacio-tiempo.

Operando obtenemos:

- $G^i \equiv \frac{\partial G(\varphi_i,\varphi^{*j})}{\partial \varphi_i} = K^i{}_j \varphi^{*j} + \frac{1}{|W|^2}\frac{\partial |W|^2}{\partial \varphi_i}$
- $G_j \equiv \frac{\partial G(\varphi_i,\varphi^{*j})}{\partial \varphi^{*j}} = \varphi_i K^i{}_j + \frac{1}{|W|^2}\frac{\partial |W|^2}{\partial \varphi^{*j}}$
- $G^i{}_j \equiv \frac{\partial G(\varphi_i,\varphi^{*j})}{\partial \varphi_i \partial \varphi^{*j}} = K^i{}_j$
- $e^G = e^{K^i{}_j \varphi_i \varphi^{*j}} \cdot |W|^2$

Para esta elección de $K(\varphi_i, \varphi^{*j})$, el potencial escalar toma la forma:

$$\begin{aligned} V(\varphi_i,\varphi^{*j}) &= e^G\left[-3 + G_i (G^{-1})^i{}_j G^j\right] = \\ &= e^{K^i{}_j \varphi_i \varphi^{*j}} \left\{ (K^{-1})^i{}_j \left[|W|^2 \varphi_m (K)^m{}_i (K)^j{}_n \varphi^{*n} + \varphi_m (K)^m{}_i W^* \frac{\partial W}{\partial \varphi_j} + \right.\right. \\ &+ \left.\left. (K)^j{}_n \varphi^{*n} W \frac{\partial W^*}{\partial \varphi^{*i}} + \frac{\partial W^*}{\partial \varphi^{*i}} \frac{\partial W}{\partial \varphi_j} \right] - 3|W|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Entonces, teniendo en cuenta que $[\varphi] = 1$; $[W] = 3$; $[G] = 2$, las dimensiones de los términos del potencial escalar de la teoría resultante son:

$$\begin{aligned} V(\varphi_i,\varphi^{*j}) &= \\ &= \overbrace{e^{K^i{}_j \varphi_i \varphi^{*j}}}^{dim=2} \left\{ (K^{-1})^i{}_j \left[\overbrace{|W|^2 \varphi_m (K)^m{}_i (K)^j{}_n \varphi^{*n}}^{dim=8} + \overbrace{\varphi_m (K)^m{}_i W^* \frac{\partial W}{\partial \varphi_j}}^{dim=6} + \right.\right. \\ &+ \left.\left. \underbrace{(K)^j{}_n \varphi^{*n} W \frac{\partial W^*}{\partial \varphi^{*i}}}_{dim=6} + \underbrace{\frac{\partial W^*}{\partial \varphi^{*i}} \frac{\partial W}{\partial \varphi_j}}_{dim=4} \right] - \underbrace{3|W|^2}_{dim=6} \right\}. \end{aligned}$$

Si colocamos las correspondientes M_P para que el potencial tenga *dim=4*, el potencial queda de la forma:

$$\begin{aligned} V(\varphi_i,\varphi^{*j}) &= \\ &= e^{\left(\frac{1}{M_P{}^2}\right) K^i{}_j \varphi_i \varphi^{*j}} \left\{ (K^{-1})^i{}_j \left[\left(\frac{1}{M_P{}^4}\right) |W|^2 \varphi_m (K)^m{}_i (K)^j{}_n \varphi^{*n} + \right.\right. \\ &+ \left(\frac{1}{M_P{}^2}\right) \varphi_m (K)^m{}_i W^* \frac{\partial W}{\partial \varphi_j} + \left(\frac{1}{M_P{}^2}\right) (K)^j{}_n \varphi^{*n} W \frac{\partial W^*}{\partial \varphi^{*i}} + \left. \frac{\partial W^*}{\partial \varphi^{*i}} \frac{\partial W}{\partial \varphi_j} \right] - \\ &- \left. \left(\frac{1}{M_P{}^2}\right) 3|W|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Entonces, para hacer $SUGRA \Rightarrow SUSY$, sólo tenemos que tomar el límite $M_P \to \infty$, obteniéndose:

$$V(\varphi_i, \varphi^{*j}) = (K^{-1})^i{}_j \left(\frac{\partial W^*}{\partial \varphi^{*i}}\right) \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_j}\right)$$

que para el caso canónico $K^i{}_j = \delta^i{}_j$, se reduce al caso de Wess-Zumino con varios supercampos quirales:

$$V_{WZ}(\varphi_i, \varphi^{*j}) = \delta^i{}_j \left(\frac{\partial W^*}{\partial \varphi^{*i}}\right) \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_j}\right) = \sum_i \left|\frac{\partial W}{\partial \varphi_i}\right|^2$$

Entonces el Lagrangiano escalar de SUSY non-gauge y no canónica en M_4, reza[4]:

$$L = K^i{}_j (D_\mu \varphi_i)(D^\mu \varphi^{*j}) - (K^{-1})^i{}_j \left(\frac{\partial W^*}{\partial \varphi^{*i}}\right) \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_j}\right)$$

Esto directamente nos generaliza la ecuación de movimiento del campo escalar a:

$$K^i{}_j (\partial_z^2 \varphi_i) = \frac{\partial}{\partial \varphi^{*j}} \left[(K^{-1})^m{}_n \left(\frac{\partial W^*}{\partial \varphi^{*m}}\right) \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_n}\right)\right]$$

9 Soluciones *1/2-SUSY* para SUGRA N=1 d=4 en M_4

Cuando estamos considerando SUGRA (SUSY local), una transformación de SUSY (local) pura reza:

$$\delta \varphi_i = \sqrt{2}\, \overline{\xi}_M(x) (\psi_M)_i$$

$$\delta(\psi_M)_i = -i\gamma^\mu D_\mu \left(A_i + i\gamma_5 B_i\right) \xi_M(x) - \sqrt{2} e^{\frac{G}{2}} (G^{-1})^j{}_i G_j \xi_M(x)$$

donde hemos escrito el campo complejo en sus componentes real e imaginaria, $\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{2}} [A_i + i B_i]$

[4]Para campos escalares, $D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi$

De de nuevo queremos que se satisfagan simultáneamente

$$K^i{}_j(\partial_z^2\varphi_i) = \frac{\partial}{\partial\varphi^{*j}}\left[(K^{-1})^m{}_n\left(\frac{\partial W^*}{\partial\varphi^{*m}}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi_n}\right)\right]$$

$$\delta(\psi_M)_i = -i\gamma^\mu D_\mu\left(A_i + i\gamma_5 B_i\right)\xi_M(x) - \sqrt{2}e^{\frac{G}{2}}(G^{-1})^j{}_i G_j\xi_M(x) = 0$$

Imponemos de nuevo la condición sobre el spinor de Majorana que nos compatibiliza la ecuación de movimiento con la condición $\delta(\psi_M)_i = 0$, esta vez de forma local:

$$-\sigma_3\xi(x) = ie^{i\alpha(x)}\overline{\xi}(x)$$

donde $\xi(x) \equiv \xi^\alpha(x)$, $\overline{\xi}(x) \equiv \overline{\xi}^{\dot{\alpha}}(x)$ y $\alpha(x)$ es cualquier campo de fases arbitrario (el cual fijaremos otra vez en lo que se llama la elección estándard del superpotencial de tal manera que $W(\varphi_{*2})$ sea real y que $W(\varphi_{*1}) = 0$).

Esto nos vuelve a fijar las fases $\theta_1(x)$ y $\theta_2(x)$ de la forma:

$$\theta_1(x) = \frac{\alpha(x)}{2} - \frac{\pi}{4} \;\; ; \;\; \theta_2(x) = \frac{\alpha(x)}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Tomando como ejemplo de nuevo un spinor de Majorana normalizado a la unidad, obtenemos por sustitución directa en la transformación SUSY pura:

$$\begin{aligned}
(\partial_z\varphi_i) &= \\
&= e^{\frac{K^i{}_j\varphi_i\varphi^{*j}}{2}}|W|(K^{-1})^j{}_i\left[\varphi_m K^m_j + \frac{W}{|W|^2}\frac{\partial W^*}{\partial\varphi^{*j}}\right]e^{i\alpha(x)} = \\
&= e^{\frac{K^i{}_j\varphi_i\varphi^{*j}}{2}}(K^{-1})^j{}_i\left[|W|\varphi_m K^m_j + e^{i\delta_W}\frac{\partial W^*}{\partial\varphi^{*j}}\right]e^{i\alpha(x)}. \\
&= e^{\frac{K^i{}_j\varphi_i\varphi^{*j}}{2}}(K^{-1})^j{}_i\left[|W|e^{i\alpha(x)}\varphi_m K^m_j + e^{i(\delta_W(z)+\alpha(x))}\frac{\partial W^*}{\partial\varphi^{*j}}\right].
\end{aligned}$$

Escogiendo otra vez $\alpha(x) = -\delta_W(z)$ (independiente de las coordenadas *x-y*) y colocando las correspondientes M_P para que la *"Creek equation"* tenga *dim=2*:

$$\begin{aligned}
\underbrace{(\partial_z\varphi_i)}_{dim=2} &= \\
&= e^{\overbrace{\frac{K^i{}_j\varphi_i\varphi^{*j}}{2}}^{dim=2}}(K^{-1})^j{}_i\left[\overbrace{|W|e^{-i\delta_W(z)}\varphi_m K^m_j}^{dim=4} + \overbrace{\frac{\partial W^*}{\partial\varphi^{*j}}}^{dim=2}\right] =
\end{aligned}$$

$$= \quad e^{\left(\frac{1}{M_P^2}\right)\frac{K^i{}_j\varphi_i\varphi^{*j}}{2}}(K^{-1})^j{}_i\left[\left(\frac{1}{M_P^2}\right)|W|e^{-i\delta_W(z)}\varphi_m K^m_j+\frac{\partial W^*}{\partial\varphi^{*j}}\right].$$

En cambio, si mantenemos la fase del superpotencial, $\alpha(x)=0\,;\ \delta_W(z)\neq 0$ (independiente de las coordenadas x-y) y colocando las correspondientes M_P para que la *"Creek equation"* tenga *dim=2*:

$$\underbrace{(\partial_z\varphi_i)}_{dim=2} \quad =$$

$$= \quad e^{\frac{\overbrace{K^i{}_j\varphi_i\varphi^{*j}}^{dim=2}}{2}}(K^{-1})^j{}_i\left[\overbrace{|W|\varphi_m K^m_j}^{dim=4}+\overbrace{\frac{\partial W^*}{\partial\varphi^{*j}}e^{i\delta_W(z)}}^{dim=2}\right]=$$

$$= \quad e^{\left(\frac{1}{M_P^2}\right)\frac{K^i{}_j\varphi_i\varphi^{*j}}{2}}(K^{-1})^j{}_i\left[\left(\frac{1}{M_P^2}\right)W^*\varphi_m K^m_j+\frac{\partial W^*}{\partial\varphi^{*j}}\right]e^{i\delta_W(z)},$$

que en el límite $M_P\to\infty$ se reduce[5] a:

$$(\partial_z\varphi_i)=(K^{-1})^j{}_i\left[\frac{\partial W^*}{\partial\varphi^{*j}}\right]e^{i\delta_W(z)}$$

y que para el caso canónico $K^i{}_j=\delta^i{}_j$, reproduce:

$$(\partial_z\varphi_i)=\delta^j{}_i\left[\frac{\partial W^*}{\partial\varphi^{*j}}\right]e^{i\delta_W(z)}=\frac{\partial W^*}{\partial\varphi^{*i}}e^{i\delta_W(z)}$$

que era el resultado que obtuvimos para el caso SUSY N=1 d=4 canónico y que llamamos *"Creek equation"*, pero generalizado a varios supercampos quirales.

Atendiendo a la generalización de la *"Creek equation"* al reducirnos al caso de SUSY no canónica partiendo de SUGRA, vemos que el funcional semidefinido positivo Θ se generaliza de forma natural al caso SUSY no canónico resultando ahora:

$$\Theta=\int_{-\infty}^{\infty}dz\left[\dot\varphi_i-(K^{-1})^m{}_i\left(\frac{\partial W^*}{\partial\varphi^{*m}}\right)e^{i\delta_W(z)}\right]K^i{}_j\left[\dot\varphi_j-(K^{-1})^n{}_j\left(\frac{\partial W^*}{\partial\varphi^{*n}}\right)e^{i\delta_W(z)}\right]^*$$

[5] Si no cancelamos las fases $\alpha(x)$ y $\delta_W(z)$ en el superpotencial, éstas aparecen explícitamente en la *"Creek equation"*

$$(\partial_z\varphi_i)=(K^{-1})^j{}_i\left[\frac{\partial W^*}{\partial\varphi^{*j}}\right]e^{i(\alpha(x)+\delta_W(z))}$$

10 La fase $\delta_W(z)$ en el superpotencial $W(\varphi)$

Asumiendo la simetría del problema anterior en el plano x-y, podemos calcular la variación del superpotencial $W(\varphi)$ a lo largo de la dimensión espacial z:

$$\frac{\partial W(\varphi)}{\partial z} = \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_i} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\right)}_{\text{"}Creek\ equation\text{"}} = \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_i} (k^{-1})^j{}_i \frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial \varphi^{*j}} \cdot e^{i(\alpha(x)+\delta_W(z))}$$

Entonces,

$$\frac{\partial W(\varphi)}{\partial z} = (k^{-1})^j{}_i \left(\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_i}\right) \left(\frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial \varphi^{*j}}\right) e^{i(\alpha(x)+\delta_W(z))}$$

Por otro lado, escribiendo el superpotencial de la forma $W(\varphi) = |W(\varphi)| e^{i\delta_W(z)}$,

$$\frac{\partial W(\varphi)}{\partial z} = \frac{\partial \left[|W(\varphi)| e^{i\delta_W(z)}\right]}{\partial z} = \left[\frac{\partial |W(\varphi)|}{\partial z} + i|W(\varphi)| \frac{\partial \delta_W(z)}{\partial z}\right] e^{i\delta_W(z)}$$

Juntando ambos resultados:

$$(k^{-1})^j{}_i \left(\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_i}\right) \left(\frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial \varphi^{*j}}\right) e^{i(\alpha(x)+\delta_W(z))} = \left[\frac{\partial |W(\varphi)|}{\partial z} + i|W(\varphi)| \frac{\partial \delta_W(z)}{\partial z}\right] e^{i\delta_W(z)}$$

Resulta enctonces que:

$$(k^{-1})^j{}_i \left(\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_i}\right) \left(\frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial \varphi^{*j}}\right) e^{i\alpha(x)} = \left[\frac{\partial |W(\varphi)|}{\partial z} + i|W(\varphi)| \frac{\partial \delta_W(z)}{\partial z}\right]$$

Este resultado ha de cumplirse para cualquier elección de $\alpha(x)$, pues es arbitraria. Si tomamos por ejemplo $\alpha(x) = 0$ (no hacemos la elección estándar del superpotencial. Esto es, no cacelamos la fase del superpotencial):

$$(k^{-1})^j{}_i \left(\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_i}\right) \left(\frac{\partial W^*(\varphi^*)}{\partial \varphi^{*j}}\right) = \left[\frac{\partial |W(\varphi)|}{\partial z} + i|W(\varphi)| \frac{\partial \delta_W(z)}{\partial z}\right].$$

Si nos centramos en el caso canónico,

$$\sum_i \underbrace{\left|\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_i}\right|^2}_{valor\ real} = \left[\underbrace{\frac{\partial |W(\varphi)|}{\partial z}}_{p.real} + i \underbrace{|W(\varphi)| \frac{\partial \delta_W(z)}{\partial z}}_{p.imag}\right]$$

y vemos que al igualar las partes real e imaginaria, obtenemos que:

- $\frac{\partial|W(\varphi)|}{\partial z} = \sum_i \left|\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_i}\right|^2$

- $|W(\varphi)|\frac{\partial \delta_W(z)}{\partial z} = 0 \underbrace{\Longrightarrow}_{|W(\varphi)|\neq 0} \delta_W = constante = \frac{W(\varphi_{*2})-W(\varphi_{*1})}{|W(\varphi_{*2})-W(\varphi_{*1})|} = \frac{Z}{|Z|}$

Por lo que vemos que la fase del superpotencial no cambia de un punto a otro al considerar SUSY N=1 d=4 canónica.

11 Métrica de Kähler general (dependiente de los campos), $\tilde{\tilde{K}}^{i}{}_{j}(\varphi, \varphi^*)$

En esta parte vamos a introducir en la teoría una métrica completamente general que dependa de los campos en lugar de ser una métrica constante como habíamos hecho en el caso anterior. Esto generaliza varios conceptos de los que hemos visto.

Vamos a prestar mucha atención a la notación con el fin de aclarar todo lo que se expone, así como las novedades que surgen de generalizar la métrica.

Como vimos, todo depende de la función $G(\varphi_i, \varphi^{*j})$ y de sus derivadas. Ésta es la función de Kähler, la cual definiremos ahora de forma general como:

$$G(\varphi_i, \varphi^{*j}) = J(\varphi_i, \varphi^{*j}) + Ln|W(\varphi)|^2 = \tilde{K}(\varphi_i, \varphi^{*j}) + Ln|W(\varphi)|^2$$

donde

- $J(\varphi_i, \varphi^{*j}) = -3Ln\left(\frac{-3\, e^{\frac{\tilde{K}(\varphi_i,\varphi^{*j})}{-3}}}{-3}\right) = \tilde{K}(\varphi_i, \varphi^{*j})$

- $W(\varphi) \Rightarrow$ Es el superpotencial de la teoría que estamos desarrollando.

Luego para hacer una teoría en SUGRA N=1 d=4 hemos de escoger una función $\tilde{K}(\varphi_i, \varphi^{*j})$ y un superpotencial holónomo $W(\varphi)$.

Las magnitudes que aparecen en el L_{SUGRA} se definen como:

- $G^i \equiv \frac{\partial G(\varphi_i,\varphi^{*j})}{\partial \varphi_i}$

- $G_j \equiv \frac{\partial G(\varphi_i,\varphi^{*j})}{\partial \varphi^{*j}}$

- $G^i{}_j \equiv \frac{\partial G(\varphi_i,\varphi^{*j})}{\partial \varphi_i \partial \varphi^{*j}}$

En la teoría que se desarrolla tenemos:

- $W(\varphi)$
- $\tilde{K}(\varphi_i, \varphi^{*j}) = \tilde{\tilde{K}}^i{}_j \varphi_i \varphi^{*j}$

donde la métrica de Kähler, $\tilde{\tilde{K}}^i{}_j(\varphi, \varphi^*)$, ahora sí depende del punto en el espacio de campos.

Operando obtenemos la generalización de lo que obtuvimos antes, pero esta vez con $K \rightarrow \tilde{K}$:

- $G^i \equiv \frac{\partial G(\varphi_i, \varphi^{*j})}{\partial \varphi_i} = \tilde{K}^i + \frac{1}{|W|^2} \frac{\partial |W|^2}{\partial \varphi_i}$
- $G_j \equiv \frac{\partial G(\varphi_i, \varphi^{*j})}{\partial \varphi^{*j}} = \tilde{K}_j + \frac{1}{|W|^2} \frac{\partial |W|^2}{\partial \varphi^{*j}}$
- $G^i{}_j \equiv \frac{\partial G(\varphi_i, \varphi^{*j})}{\partial \varphi_i \partial \varphi^{*j}} = \tilde{K}^i{}_j$
- $e^G = e^{\tilde{K}} \cdot |W|^2 = e^{\tilde{\tilde{K}}^i{}_j \varphi_i \varphi^{*j}} \cdot |W|^2$

donde:

- $\tilde{K} = \tilde{\tilde{K}}^m{}_n \, \varphi_m \varphi^{*n}$
- $\tilde{K}^i \equiv \frac{\partial \tilde{K}(\varphi_i, \varphi^{*j})}{\partial \varphi_i} = \tilde{\tilde{K}}^i{}_n \, \varphi^{*n} + \tilde{\tilde{K}}^{im}{}_n \, \varphi_m \varphi^{*n}$
- $\tilde{K}_j \equiv \frac{\partial \tilde{K}(\varphi_i, \varphi^{*j})}{\partial \varphi^{*j}} = \tilde{\tilde{K}}^m{}_j \, \varphi_m + \tilde{\tilde{K}}_j{}^m{}_n \, \varphi_m \varphi^{*n}$
- $\tilde{K}^i{}_j \equiv \frac{\partial \tilde{K}(\varphi_i, \varphi^{*j})}{\partial \varphi_i \partial \varphi^{*j}} = \tilde{\tilde{K}}^i{}_j + \tilde{\tilde{K}}^{im}{}_j \, \varphi_m + \tilde{\tilde{K}}_j{}^i{}_n \, \varphi^{*n} + \tilde{\tilde{K}}^i{}_j{}^m{}_n \, \varphi_m \varphi^{*n}$

Para esta elección de $\tilde{K}(\varphi_i, \varphi^{*j})$, el potencial escalar toma la forma:

$$
\begin{aligned}
V(\varphi_i, \varphi^{*j}) &= e^G \left[-3 + G_i (G^{-1})^i{}_j G^j \right] = \\
&= e^{\tilde{K}} \left\{ (\tilde{K}^{-1})^i{}_j \left[|W|^2 (\tilde{K})_i (\tilde{K})^j + (\tilde{K})_i W^* \frac{\partial W}{\partial \varphi_j} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. (\tilde{K})^j W \frac{\partial W^*}{\partial \varphi^{*i}} + \frac{\partial W^*}{\partial \varphi^{*i}} \frac{\partial W}{\partial \varphi_j} \right] - 3|W|^2 \right\}.
\end{aligned}
$$

Este potencial[6] se puede reescribir de una forma más clara definiendo una *"derivada covariante en el espacio de campos"*. Esta nueva derivada

[6]Observar que ahora estamos considerando todos los términos del superpotencial W sea cual sea su dimensión. La teoría es SUGRA N=1 d=4 y no hemos de tener en cuenta la renormalizabilidad de la teoría.

reza:

$$D_i W^* \equiv e^{-\tilde{K}} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi^{*i}} \left(e^{\tilde{K}} W^* \right) \right] = \frac{\partial W^*}{\partial \varphi^{*i}} + \tilde{K}_i W^*$$

$$D^j W \equiv e^{-\tilde{K}} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi_j} \left(e^{\tilde{K}} W \right) \right] = \frac{\partial W}{\partial \varphi_j} + \tilde{K}^j W$$

y la expresión para el potencial se expresa como:

$$V(\varphi_i, \varphi^{*j}) = e^{\tilde{K}} \left[(\tilde{K}^{-1})^i{}_j \, (D_i W^*) \left(D^j W \right) - 3|W|^2 \right]$$

Entonces el Lagrangiano escalar de SUGRA N=1 d=4, reza[7]:

$$L_{scal} = \eta^{\mu\nu} \tilde{K}^i{}_j (D_\mu \varphi_i)(D_\nu \varphi^{*j}) - e^{\tilde{K}} \left[(\tilde{K}^{-1})^i{}_j \, (D_i W^*) \left(D^j W \right) - 3|W|^2 \right]$$

La clave al generalizar a métricas de Kähler dependientes del punto en el espacio de campos es que se generaliza el resultado que obtuvimos para métricas de Kähler constantes:

- $\tilde{K} = \tilde{\tilde{K}}^{m}{}_{n} \, \varphi_m \varphi^{*n}$
- $\tilde{K}^i = \tilde{\tilde{K}}^{i}{}_{n} \, \varphi^{*n} + \underbrace{\tilde{\tilde{K}}^{im}{}_{n} \, \varphi_m \varphi^{*n}}_{\textit{término extra}} \neq \tilde{\tilde{K}}^{i}{}_{n} \, \varphi^{*n}$
- $\tilde{K}_j = \tilde{\tilde{K}}^{m}{}_{j} \, \varphi_m + \underbrace{\tilde{\tilde{K}}_j{}^{m}{}_{n} \, \varphi_m \varphi^{*n}}_{\textit{término extra}} \neq \tilde{\tilde{K}}^{m}{}_{j} \, \varphi_m$
- $\tilde{K}^i{}_j = \tilde{\tilde{K}}^{i}{}_{j} + \underbrace{\tilde{\tilde{K}}^{im}{}_{j} \, \varphi_m + \tilde{\tilde{K}}_j{}^{i}{}_{n} \, \varphi^{*n} + \tilde{\tilde{K}}^{i}{}_{j}{}^{m}{}_{n} \, \varphi_m \varphi^{*n}}_{\textit{términos extras}} \neq \tilde{\tilde{K}}^{i}{}_{j}$

Estos términos extras se anulan para el caso de métricas de Kähler constantes en el espacio de campos y recuperamos los resultados anteriores antes de que tomásemos el límite $M_P \to \infty$ para recuperar SUSY N=1 d=4 no canónica[8].

[7]Para campos escalares, $D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi$

[8]Siempre estamos en el caso non-gauge

Este nuevo Lagrangiano general que hemos obtenido, generaliza de forma natural la ecuación movimiento y la "Creek equation" para los campos escalares ahora ya en una teoría con métricas de Kähler dependientes del punto en el espacio de campos. Utilizando la nueva expresión general para el potencial escalar (y manteniendo la simetría del problema en el plano x-y):

- Ecuación de movimiento

$$\tilde{K}^i{}_j(\partial_z^2\varphi_i) = \frac{\partial}{\partial\varphi^{*j}} \left\{ e^{\tilde{K}} \left[(\tilde{K}^{-1})^m{}_n \left(D_m W^*\right)\left(D^n W\right) - 3|W|^2 \right] \right\}$$

- *Creek equation*[9]

$$(\partial_z\varphi_i) = e^{\frac{\tilde{K}}{2}} (\tilde{K}^{-1})^j{}_i \left(D_j W^*\right) e^{i\delta_W(z)}$$

En el caso general en el que estamos ahora, la fase del superpotencial variará con la coordenada z.

Con esto termina la generalización de SUSY N=1 d=4 canónica al caso no canónico en el espacio de campos escalares de la teoría.

12 $D-terms$ y su contribución al potencial escalar de la teoría.

Al introducir interacción gauge entre los supercampos quirales (mediada por un supercampo vectorial), aparecerá una nueva aportación al potencial escalar $SUGRA$ que viene dada por:

$$V_D(\varphi_i,\varphi^{*j}) = \frac{1}{2} g^2 Re\left\{f_{ab}^{-1}\right\} \left[G^i (t^a)_i{}^j \varphi_j\right] \left[G_i (t^b)_i{}^j \varphi_j\right]$$

donde (t^a) son los generadores (hermíticos) del grupo gauge.

Utilizando el resultado que obtuvimos antes:

- $G^i \equiv \frac{\partial G(\varphi_i,\varphi^{*j})}{\partial\varphi_i} = \tilde{K}^i + \frac{1}{|W|^2}\frac{\partial |W|^2}{\partial\varphi_i} = \frac{D^i W}{W}$
- $G_j \equiv \frac{\partial G(\varphi_i,\varphi^{*j})}{\partial\varphi^{*j}} = \tilde{K}_j + \frac{1}{|W|^2}\frac{\partial |W|^2}{\partial\varphi^{*j}} = \frac{D_j W^*}{W^*}$
- $G^i{}_j \equiv \frac{\partial G(\varphi_i,\varphi^{*j})}{\partial\varphi_i\partial\varphi^{*j}} = \tilde{K}^i{}_j$

podemos escribir el potencial escalar que aparece al considerar interacción gauge como

$$V_D(\varphi_i,\varphi^{*j}) = \frac{1}{2} g^2 Re\left\{f_{ab}^{-1}\right\} \left[\frac{D^i W}{W} (t^a)_i{}^j \varphi_j\right] \left[\frac{D^i W}{W} (t^b)_i{}^j \varphi_j\right]$$

[9]De nuevo estamos tomando $\alpha(x) = 0$.

Si consideramos el caso $f_{ab} = f\delta_{ab} \rightarrow f_{ab}^{-1} = \frac{1}{f}\delta_{ab}$, el potencial escalar gauge queda de la forma [10]

$$
\begin{aligned}
V_D(\varphi_i, \varphi^{*j}) &= \\
&= \frac{1}{2} Re\{f\} \sum_a \left(\frac{1}{Re\{f\}} \frac{D^i W}{W} \underbrace{g\ (t^a)_i^{\ j} \varphi_j}_{-i\eta_i^a} \right)^2 = \\
&= \frac{1}{2} Re\{f\} \sum_a \left(-i \frac{1}{Re\{f\}} \frac{D^i W}{W} \eta_i^a \right)^2 = \\
&= \frac{1}{2} Re\{f\} \sum_a D^a D^a
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado $D^a = -i\frac{1}{Re\{f\}}\frac{D^i W}{W}\eta_i^a$

Utilizando ahora la condición de invariancia gauge del superpotencial W:

$$W^i \eta_i^a = 0$$

obtenemos

$$D^a = -i \frac{1}{Re\{f\}} K^i \eta_i^a$$

Por tanto, hemos deducido un Lagrangiano para la parte escalar de la teoría SUGRA N=1 D=4 que tiene la siguiente expresión:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
L_{scal} &= \eta^{\mu\nu} \tilde{K}^i_{\ j} (D_\mu \varphi_i)(D_\nu \varphi^{*j}) - e^{\tilde{K}} \left[(\tilde{K}^{-1})^i_{\ j} \, (D_i W^*) \left(D^j W \right) - 3|W|^2 \right] - \\
&- \frac{1}{2} Re\{f\} \sum_a \left(-i \frac{1}{Re\{f\}} K^i \eta_i^a \right)^2 \qquad donde \ \ \eta_i^a = ig(t^a)_i^{\ j} \varphi_j
\end{aligned}
}
$$

13 Variables del Moduli Space. Mesones

Partiremos de un grupo gauge G y de un contenido de materia que vive en la fundamental/antifundamental de G (dim $= N_c$). Consideraremos en primer lugar el caso massless para el contenido de materia y luego el caso en el que un término explícito de masa se añade a la teoría. Como contenido de materia tendremos $\Phi_i, \tilde{\Phi}^{\tilde{i}}$, donde $i, \tilde{i} = 1, \ldots, N_f$ siendo N_f el número de flavours.

[10] $\delta\varphi_i = igA_{\mu_a}(t^a)_i^{\ j}\varphi_j = A_{\mu_a}\eta_i^a$

Los $\Phi's$ son supercampos quirales, cuyas componentes escalares (que denotaremos mediante φ) tomarán un $v.e.v$ para definir el ground state de la teoría. Como es habitual, no utilizaremos las componentes escalares propiamente dichas como las variables del moduli space. En lugar de éstas (que NO son invariantes gauge), utilizaremos una redefinición de ellas en función de mesones y bariones (que SÍ son invariantes gauge).

$$\langle \varphi \rangle \longrightarrow \langle M \rangle, \langle B \rangle, \left\langle \tilde{B} \right\rangle$$

La simetría (global en el espacio de flavour) de la teoría a nivel clásico es

$$SU_L(N_f) \times SU_R(N_f) \times U_A(1) \times U_B(1) \times U_R(1)$$

con

$$\varphi \to \left(N_f, 1, 1, 1, \frac{N_f - N_c}{N_f} \right)$$
$$\tilde{\varphi} \to \left(1, \tilde{N}_f, 1, -1, \frac{N_f - N_c}{N_f} \right)$$

donde φ,$\tilde{\varphi}$ los entenderemos como vectores del espacio de flavour con componentes φ_i,$\tilde{\varphi}^{\tilde{i}}$.

Veamos los grupos unitarios propios de la interacción de materia (supercampos complejos). Vamos a estudiar la posibilidad de que se genere o no un superpotencial de forma dinámica que me rompa la degeneración del ground state en la teoría clásica.

14 Superpotencial generado dinámicamente $(SU(N_c)\ /\ N_f < N_c)$

Veamos los grupos unitarios propios de la interacción de materia (supercampos complejos). Vamos a estudiar la posibilidad de que se genere o no un superpotencial de forma dinámica que me rompa la degeneración del ground state en la teoría clásica.

- *Materia massless*.

  El único superpotencial compatible con la simetría a nivel clásico es:

  $$W_{eff} = C_{N_c,N_f} \left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{|M|} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}}$$

  donde Λ es la escala de la teoría generada dinámicamente.

El moduli space de la teoría es descrito en término de *mesones* M invariantes gauge:

$$M^{\tilde{i}}_{\ j} = \tilde{\varphi}^{\tilde{i}} \otimes \varphi_j$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi = \left(a_1, \cdots, a_{N_f}\right)$$

con a_i tomando un valor cualquiera.

▷ Si obtenemos el potencial escalar para el W_{eff} éste tiende a cero cuando $|M| \to \infty$ de forma monótona, por lo que no rompemos la degeneración del ground state. No hay mínimos.

- *Materia con masa*.

  Consideremos un término de masa explícito en el superpotencial:

  $$W_{tree} = Tr\left\{mM\right\} = m^{i}_{\ \tilde{j}} M^{\tilde{j}}_{\ i}$$

  tal que

  $$W_{full} = W_{eff} + W_{tree} = C_{N_c,N_f}\left(\frac{\Lambda^{3N_c-N_f}}{|M|}\right)^{\frac{1}{N_c-N_f}} + Tr\left\{mM\right\}$$

  Si buscamos configuraciones que preserven SUSY:

  $$\left[\frac{\partial W_{full}}{\partial M^{\tilde{i}}_{\ j}}\right]_{\langle M\rangle} = 0$$

  obtenemos

  $$\left\langle M^{\tilde{i}}_{\ j}\right\rangle = \left(|m|\Lambda^{3N_c-N_f}\right)^{\frac{1}{N_c}}\left(m^{-1}\right)^{\tilde{i}}_{\ j}$$

  ▷ Encontramos N_c soluciones correspondientes a las N_c ramas de la raíz de un número complejo.

En ambos casos un cálculo detallado nos lleva a que $C_{N_c,N_f} = (N_c - N_f)$.

15 Superpotencial generado dinámicamente para n condensados

Vamos a considerar la presencia de n condensados de squarks asociados a n grupos gauge $SU(N_\alpha)$ existentes en el grupo de simetría gauge de la teoría

$$G = \left[\prod_{\alpha=1}^{n} SU(N_\alpha)\right] \times U_X(1)$$

donde el índice α corre sobre los distintos grupos $SU(N_\alpha)$ de la teoría.

El superpotencial total de la teoría tendrá una contribución con origen en flujos y una suma de superpotenciales no perturbativos generados dinámicamente debido al regimen de confinamiento en el infrarrojo de los grupos gauge $SU(N_\alpha)$ de la teoría

$$W = W_0 + \sum_{\alpha=1}^{n} W_\alpha^{np}$$

que reescribiremos de una forma más compacta como

$$W = \sum_{\alpha=0}^{n} W_\alpha$$

donde W_0 es el superpotencial que aparece al considerar flujos.

Si escribimos el contenido de materia como campos escalares complejos que poseen dos índices, α que designa el grupo gauge SU en el que el campo se transforma en la fundamental (siendo singlete para el resto de los grupos SU) y i_α que designa el número de familias (réplicas de flavours) que posee el $\alpha - esimo$ grupo SU, llegamos a un Kahler de la forma

$$K = -3Log\left(T + T^\dagger\right) + \left(\phi^\dagger\right)^{\alpha i_\alpha} (\phi)_{\alpha i_\alpha} + \left(\overline{\phi}^\dagger\right)^{\alpha i_\alpha} \left(\overline{\phi}\right)_{\alpha i_\alpha}$$

donde

$$\alpha = 1, \dots n$$

$$i_\alpha = 1, \dots N_{f_\alpha}$$

Entonces

$$W = W_0 + \sum_{\alpha=1}^{n} W_\alpha \left((\phi)_{\alpha i_\alpha}, \left(\overline{\phi}\right)_{\alpha i_\alpha}, T\right)$$

Utilizando la expresión del superpotencial no perturbativo generado dinámicamente para un único condensado de squarks, podemos generalizarla imponiendo índices como:

$$W_\alpha|_{\alpha\neq 0} = (N_\alpha - N_{f_\alpha}) \left(\frac{1}{\prod_{i_\alpha=1}^{N_{f_\alpha}} \left(\overline{\phi}\phi\right)_{\alpha i_\alpha}}\right)^{\frac{1}{N_\alpha - N_{f_\alpha}}} e^{-C_\alpha T}$$

donde $C_\alpha = \frac{4\pi K_{N_\alpha}}{N_\alpha - N_{f_\alpha}}$

Ahora bien, como estamos en la fase confinante, sabemos (Seiberg) que $\langle \phi_{\alpha i_\alpha} \rangle = \left\langle \overline{\phi}_{\alpha i_\alpha} \right\rangle$ lo que se traduce en

$$K = -3Log\left(T + T^{\dagger}\right) + 2\left(\phi^{\dagger}\right)^{\alpha i_\alpha} (\phi)_{\alpha i_\alpha}$$

Redefiniremos (normalización) los campos de tal manera que no arrastremos el factor 2 durante todo el cálculo. Esto tiene consecuencias en la forma del superpotencial generado dinámicamente y en el cálculo de los $D - terms$ que veremos al final. La redefinición que hacemos es:

$$\phi \Longrightarrow \frac{\varphi}{\sqrt{2}}$$

lo que hace que el superpotencial resulte ahora, para el caso de flavours degenerados en cada grupo gauge que es el que nos interesa

$$W = W_0 + \sum_{\alpha=1}^{n} W_\alpha\left((\varphi)_\alpha, T\right)$$

con

$$W_\alpha|_{\alpha\neq 0} = (N_\alpha - N_{f_\alpha})\left(\frac{2^{N_{f_\alpha}}}{(\varphi_\alpha^2)^{N_{f_\alpha}}}\right)^{\frac{1}{N_\alpha - N_{f_\alpha}}} e^{-C_\alpha T}$$

16 $F-terms$ para el caso $G = \left[\prod_{\alpha=1}^{n} SU(N_\alpha)\right] \times U_X(1)$

Vamos a hacer un análisis sistemático de todos los modulis que tenemos en la teoría. Para ello, utilizaremos las siguientes cantidades:

$$\bullet \frac{\partial W}{\partial T} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial W_\alpha}{\partial T} = \sum_{\alpha=1}^{n}(-C_\alpha) W_\alpha$$

$$\bullet \frac{\partial W}{\partial(\varphi_{\alpha i_\alpha})} = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial W_\beta}{\partial \varphi_{\alpha i_\alpha}} = \left(\frac{-2}{(N_\alpha - N_{f_\alpha})}\right)\frac{1}{\varphi_{\alpha i_\alpha}} W_\alpha$$

- **moduli T**

$$\begin{aligned} D_T W &= \frac{\partial W}{\partial T} + K_T W = \sum_{\alpha=1}^{n}(-C_\alpha) W_\alpha + K_T\left(W_0 + \sum_{\alpha=1}^{n} W_\alpha\right) = \\ &= K_T W_0 + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(K_T - C_\alpha\right) W_\alpha = K_T W_0 + \sum_{\alpha=1}^{n} \chi_T^\alpha W_\alpha = \\ &= \sum_{\alpha=0}^{n} \chi_T^\alpha W_\alpha \end{aligned}$$

donde $\chi_T^\alpha = K_T - C_\alpha$ y $C_0 = 0$.

- **moduli $\varphi_{\alpha i_\alpha}$**

$$
\begin{aligned}
D_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}W &= \frac{\partial W}{\partial(\varphi_{\alpha i_\alpha})} + K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}W = \\
&= \left(\frac{-2}{(N_\alpha - N_{f_\alpha})}\right)\frac{1}{\varphi_{\alpha i_\alpha}}W_\alpha + K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}\left(W_0 + \sum_{\beta=1}^{n} W_\beta\right) = \\
&= \sum_{\beta=1}^{n}\left(\frac{-2}{(N_\beta - N_{f_\beta})}\right)\frac{\delta_\alpha^\beta}{\varphi_{\beta i_\beta}}W_\beta + K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}\left(W_0 + \sum_{\beta=1}^{n} W_\beta\right) = \\
&= K_{\varphi_{\alpha i_\alpha}}W_0 + \sum_{\beta=1}^{n}\left(K_{\varphi_{\alpha i_\alpha}} + \left(\frac{-2}{(N_\beta - N_{f_\beta})}\right)\frac{\delta_\alpha^\beta}{\varphi_{\beta i_\beta}}\right)W_\beta = \\
&= K_{\varphi_{\alpha i_\alpha}}W_0 + \sum_{\beta=1}^{n}\chi^\beta_{\varphi_{\alpha i_\alpha}}W_\beta = \\
&= \sum_{\beta=0}^{n}\chi^\beta_{\varphi_{\alpha i_\alpha}}W_\beta
\end{aligned}
$$

donde

$$
\chi^\beta_{\varphi_{\alpha i_\alpha}} = \left(K_{\varphi_{\alpha i_\alpha}} + \left(\frac{-2}{(N_\beta - N_{f_\beta})}\right)\frac{\delta_\alpha^\beta}{\varphi_{\beta i_\beta}}\right)
$$

Entonces, hemos llegado a las expresiones compactas:

$$
\bullet D_T W = \sum_{\beta=0}^{n}\chi_T^\beta W_\beta
$$

$$
\bullet D_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}W = \sum_{\beta=0}^{n}\chi^\beta_{\varphi_{\alpha i_\alpha}}W_\beta
$$

Para calcular el potencial escalar debido a $F - terms$ es:

$$
V_F = e^K\left[(K^{-1})_{TT^\dagger}|D_T W|^2 + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i_\alpha=1}^{N_{f\alpha}}(K^{-1})_{\varphi_{\alpha i_\alpha}\varphi^\dagger_{\alpha i_\alpha}}|D_{\varphi_{\alpha i_\alpha}}W|^2 - 3|W|^2\right]
$$

Tenemos que calcular de forma general

$$
|D_T W|^2 = \sum_{\gamma=0}^{n}\sum_{\delta=0}^{n}\chi_T^\gamma\ {\chi^\dagger}^\delta_{T^\dagger}W_\gamma W_\delta^\dagger
$$

$$|D_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}W|^2 = \sum_{\gamma=0}^{n}\sum_{\delta=0}^{n} \chi^{\gamma}_{\varphi_{\alpha i_\alpha}} {\chi^{\dagger}}^{\delta}_{{\varphi^\dagger}_{\alpha i_\alpha}} W_\gamma W^\dagger_\delta$$

$$|W|^2 = \sum_{\gamma=0}^{n}\sum_{\delta=0}^{n} W_\gamma W^\dagger_\delta$$

Si pasamos a polares $W_\sigma = |W|e^{i\theta_\sigma}$

$$|D_T W|^2 = \sum_{\gamma=0}^{n}\sum_{\delta=0}^{n} \chi^{\gamma}_{T}\ {\chi^{\dagger}}^{\delta}_{T^\dagger} |W_\gamma||W_\delta| e^{i(\theta_\gamma - \theta_\delta)}$$

$$|D_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}W|^2 = \sum_{\gamma=0}^{n}\sum_{\delta=0}^{n} \chi^{\gamma}_{\varphi_{\alpha i_\alpha}} {\chi^{\dagger}}^{\delta}_{{\varphi^\dagger}_{\alpha i_\alpha}} |W_\gamma||W_\delta| e^{i(\theta_\gamma - \theta_\delta)}$$

$$\begin{aligned} |W|^2 &= \sum_{\gamma=0}^{n}\sum_{\delta=0}^{n} |W_\gamma||W_\delta| e^{i(\theta_\gamma - \theta_\delta)} = \\ &= \sum_{\sigma=0}^{n} |W_\sigma|^2 + \sum_{\gamma<\delta}^{n} 2\, cos(\theta_\gamma - \theta_\delta)|W_\gamma||W_\delta| \end{aligned}$$

donde

$$\theta_\alpha = \frac{-2}{N_\alpha - N_{f_\alpha}} \left[2\pi k_{N_\alpha}\tau + \sum_{i_\alpha=1}^{N_{f_\alpha}} \vartheta_{\alpha i_\alpha} \right]$$

Estamos haciendo:

$$\varphi_{\alpha i_\alpha} = |\varphi_{\alpha i_\alpha}|\ e^{i\vartheta_{\alpha i_\alpha}}$$

$$T = t + i\tau$$

Estas expresiones son para el caso más general que podemos tener.

Veamos de forma explícita

$$K_T = \frac{-3}{(T + T^\dagger)} = K_{T^\dagger}$$

$$K_{TT^\dagger} = \frac{3}{(T + T^\dagger)^2}$$

$$K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})} = (\varphi_{\alpha i_\alpha})^\dagger \quad ; \quad K_{(\varphi^\dagger_{\alpha i_\alpha})} = (\varphi_{\alpha i_\alpha})$$

$$K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})(\varphi^\dagger_{\alpha i_\alpha})} = 1$$

Teniendo en cuenta que $k_{N_\alpha} \in \Re \rightarrow C_\zeta = C_\zeta^* \rightarrow \chi_T^\sigma = {\chi^\dagger}_{T^\dagger}^\sigma$ vemos que

$$\chi_T^\gamma \; {\chi^\dagger}_{T^\dagger}^\delta = \chi_T^\delta \; {\chi^\dagger}_{T^\dagger}^\gamma$$

con lo que podemos escribir un coseno en la expresión de $D_T W$ debido a la simetría.

$$|D_T W|^2 = \sum_{\sigma=0}^{n} (\chi_T^\sigma)^2 |W_\sigma|^2 + \sum_{\gamma<\delta}^{n} 2 \; \chi_T^\gamma \; \chi_T^\delta cos(\theta_\gamma - \theta_\delta) |W_\gamma||W_\delta| \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} |D_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})} W|^2 &= \sum_{\gamma=0}^{n} \sum_{\delta=0}^{n} \chi_{\varphi_{\alpha i_\alpha}}^\gamma {\chi^\dagger}_{{\varphi^\dagger}_{\alpha i_\alpha}}^\delta |W_\gamma||W_\delta| e^{i(\theta_\gamma - \theta_\delta)} \\ &= \sum_{\sigma=0}^{n} |\chi_{\varphi_{\alpha i_\alpha}}^\sigma|^2 |W_\sigma|^2 + \sum_{\gamma \neq \delta}^{n} \chi_{\varphi_{\alpha i_\alpha}}^\gamma {\chi^\dagger}_{{\varphi^\dagger}_{\alpha i_\alpha}}^\delta |W_\gamma||W_\delta| e^{i(\theta_\gamma - \theta_\delta)} \end{aligned}$$

$$|W|^2 = \sum_{\sigma=0}^{n} |W_\sigma|^2 + \sum_{\gamma<\delta}^{n} 2 \, cos(\theta_\gamma - \theta_\delta) |W_\gamma||W_\delta|$$

Si utilizamos la forma explícita del Kahler obtenemos

$$|D_T W|^2 = \sum_{\sigma=0}^{n} (K_T - C^\sigma)^2 |W_\sigma|^2 + \sum_{\gamma<\delta}^{n} 2 \left((K_T - C^\gamma)(K_T - C^\delta) \right) cos(\theta_\gamma - \theta_\delta) |W_\gamma||W_\delta|$$

$$\begin{aligned} |D_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})} W|^2 &= \sum_{\sigma=0}^{n} \left(|K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}|^2 + \frac{4}{(N_\sigma - N_{f_\sigma})^2} \frac{\delta_\alpha^\sigma}{|\varphi_{\sigma i_\sigma}|^2} - \right. \\ &- \left. \frac{2\,\delta_\alpha^\sigma}{(N_\sigma - N_{f_\sigma})} \left(\frac{K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}}{(\varphi_{\sigma i_\sigma}^\dagger)} + \frac{K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha}^\dagger)}}{(\varphi_{\sigma i_\sigma})} \right) \right) |W_\sigma|^2 + \\ &+ \sum_{\gamma \neq \delta}^{n} \left(|K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}|^2 + \frac{4}{(N_\gamma - N_{f_\gamma})(N_\delta - N_{f_\delta})} \frac{\delta_\alpha^\gamma \delta_\alpha^\delta}{(\varphi_{\gamma i_\gamma})(\varphi_{\delta i_\delta}^\dagger)} - \right. \\ &- \left. 2 \left(\frac{\delta_\alpha^\gamma}{(N_\gamma - N_{f_\gamma})} \frac{K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}}{(\varphi_{\gamma i_\gamma}^\dagger)} + \frac{\delta_\alpha^\delta}{(N_\delta - N_{f_\delta})} \frac{K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha}^\dagger)}}{(\varphi_{\delta i_\delta})} \right) \right) e^{i(\theta_\gamma - \theta_\delta)} |W_\gamma||W_\delta| = \\ &= |K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}|^2 \sum_{\sigma=0}^{n} |W_\sigma|^2 + \frac{4}{(N_\alpha - N_{f_\alpha})^2} \frac{1}{|\varphi_{\alpha i_\alpha}|^2} |W_\alpha|^2 - \frac{4}{(N_\alpha - N_{f_\alpha})} |W_\alpha|^2 + \\ &+ |K_{(\varphi_{\alpha i_\alpha})}|^2 \sum_{\gamma<\delta}^{n} 2cos(\theta_\gamma - \theta_\delta)|W_\gamma||W_\delta| - \frac{2}{(N_\alpha - N_{f_\alpha})} |W_\alpha| \sum_{\sigma \neq \alpha} 2cos(\theta_\sigma - \theta_\alpha)|W_\sigma| \end{aligned}$$

Entonces ya tenemos todo para construir V_F para nuestro caso general:

$$\begin{aligned}
V_F &= e^K\left[(K^{-1})_{TT^\dagger}|D_T W|^2+\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i_\alpha=1}^{N_{f\alpha}}(K^{-1})_{\varphi_{\alpha i_\alpha}\varphi^\dagger_{\alpha i_\alpha}}|D_{\varphi_{\alpha i_\alpha}}W|^2-3|W|^2\right]=\\
&= e^{\left(-3log(2t)+\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i_\alpha=1}^{N_{f\alpha}}|\varphi_{\alpha i_\alpha}|^2\right)}\left[\left(\frac{4\,t^2}{3}\right)\left(\sum_{\sigma=0}^{n}\left(\left(\frac{-3}{2t}\right)-C^\sigma\right)^2|W_\sigma|^2\;+\right.\right.\\
&+ \left.\sum_{\gamma<\delta}^{n}2\left(\left(\left(\frac{-3}{2t}\right)-C^\gamma\right)\left(\left(\frac{-3}{2t}\right)-C^\delta\right)\right)cos(\theta_\gamma-\theta_\delta)|W_\gamma||W_\delta|\right)\;+\\
&+ \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i_\alpha=1}^{N_{f\alpha}}\left(|\varphi_{\alpha i_\alpha}|^2\sum_{\sigma=0}^{n}|W_\sigma|^2+\frac{4}{(N_\alpha-N_{f_\alpha})^2}\frac{1}{|\varphi_{\alpha i_\alpha}|^2}|W_\alpha|^2-\right.\\
&- \frac{4}{(N_\alpha-N_{f_\alpha})}|W_\alpha|^2+|\varphi_{\alpha i_\alpha}|^2\sum_{\gamma<\delta}^{n}2cos(\theta_\gamma-\theta_\delta)|W_\gamma||W_\delta|-\\
&- \left.\left.\frac{2}{(N_\alpha-N_{f_\alpha})}|W_\alpha|\sum_{\sigma\neq\alpha}2cos(\theta_\sigma-\theta_\alpha)|W_\sigma|\right)-3\left(\sum_{\sigma=0}^{n}|W_\sigma|^2+\sum_{\gamma<\delta}^{n}2\,cos(\theta_\gamma-\theta_\delta)|W_\gamma||W_\delta|\right)\right]
\end{aligned}$$

donde, para el caso de flavours degenerados en cada grupo gauge

$$W_\alpha|_{\alpha\neq 0}=(N_\alpha-N_{f_\alpha})\left(\frac{2^{N_{f\alpha}}}{(\varphi_\alpha^2)^{N_{f\alpha}}}\right)^{\frac{1}{N_\alpha-N_{f\alpha}}}e^{-C_\alpha t}\;e^{i\theta_\alpha}$$

$$\theta_\alpha=\frac{-2}{N_\alpha-N_{f_\alpha}}\left[2\pi k_{N_\alpha}\tau+N_{f_\alpha}\vartheta_\alpha\right]$$

$$C_\alpha=\frac{4\pi k_{N_\alpha}}{N_\alpha-N_{f_\alpha}}$$

Estamos haciendo:

$$\varphi_\alpha=|\varphi_\alpha|\;e^{i\vartheta_\alpha}$$

$$T=t+i\tau$$

Vemos que, para el caso de que cada grupo esté degenerado, el número de fases que tendremos es $\frac{n(n+1)}{2}$

•Caso $n=1$ con los flavours degenerados.

$$A=\frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2}}{8t^3}N_{f_1}|\varphi_1|^2|W_0|^2$$

$$\begin{aligned}B &= \frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2}}{8t^3}\left(\frac{2^{N_{f_1}}}{|\varphi_1|^{2N_{f_1}}}\right)^{\frac{2}{N_1-N_{f_1}}} e^{-\frac{8\pi k_{N_1}}{N_1-N_{f_1}}}\left[\frac{(8\pi k_{N_1}t)^2}{3}+(16\pi k_{N_1}t)(N_1-N_{f_1})+\right.\\ &+ \left.\frac{N_{f_1}}{|\varphi_1|^2}\Big(|\varphi_1|^2(N_1-N_{f_1})-2\Big)^2\right]\end{aligned}$$

$$C = \frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2}}{8t^3}\left(\frac{2^{N_{f_1}}}{|\varphi_1|^{2N_{f_1}}}\right)^{\frac{1}{N_1-N_{f_1}}} e^{-\frac{4\pi k_{N_1}}{N_1-N_{f_1}}}\ 2\ |W_0|\left[8\pi k_{N_1}t+N_{f_1}|\varphi_1|^2(N_1-N_{f_1})-2N_{f_1}\right]$$

•Caso $n=2$ con los flavours degenerados.

$$A=\frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2+N_{f_2}|\varphi_2|^2}}{8t^3}\Big(N_{f_1}|\varphi_1|^2+N_{f_2}|\varphi_2|^2\Big)|W_0|^2$$

$$\begin{aligned}B &= \frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2+N_{f_2}|\varphi_2|^2}}{8t^3}\left(\frac{2^{N_{f_1}}}{|\varphi_1|^{2N_{f_1}}}\right)^{\frac{2}{N_1-N_{f_1}}} e^{-\frac{8\pi k_{N_1}}{N_1-N_{f_1}}}\left[\frac{(8\pi k_{N_1}t)^2}{3}+(16\pi k_{N_1}t)(N_1-N_{f_1})+\right.\\ &+ \left.\frac{N_{f_1}}{|\varphi_1|^2}\Big(|\varphi_1|^2(N_1-N_{f_1})-2\Big)^2+(N_1-N_{f_1})^2N_{f_2}|\varphi_2|^2\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= \frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2+N_{f_2}|\varphi_2|^2}}{8t^3}\left(\frac{2^{N_{f_2}}}{|\varphi_2|^{2N_{f_2}}}\right)^{\frac{2}{N_2-N_{f_2}}} e^{-\frac{8\pi k_{N_2}}{N_2-N_{f_2}}}\left[\frac{(8\pi k_{N_2}t)^2}{3}+(16\pi k_{N_2}t)(N_2-N_{f_2})+\right.\\ &+ \left.\frac{N_{f_2}}{|\varphi_2|^2}\Big(|\varphi_2|^2(N_2-N_{f_2})-2\Big)^2+(N_2-N_{f_2})^2N_{f_1}|\varphi_1|^2\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= \frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2+N_{f_2}|\varphi_2|^2}}{8t^3}\left(\frac{2^{N_{f_1}}}{|\varphi_1|^{2N_{f_1}}}\right)^{\frac{1}{N_1-N_{f_1}}} e^{-\frac{4\pi k_{N_1}}{N_1-N_{f_1}}}\ 2\ |W_0|\,[(8\pi k_{N_1}t)+\\ &+ \left.(N_1-N_{f_1})(N_{f_1}|\varphi_1|^2+N_{f_2}|\varphi_2|^2)-2N_{f_1}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F &= \frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2+N_{f_2}|\varphi_2|^2}}{8t^3}\left(\frac{2^{N_{f_2}}}{|\varphi_2|^{2N_{f_2}}}\right)^{\frac{1}{N_2-N_{f_2}}} e^{-\frac{4\pi k_{N_2}}{N_2-N_{f_2}}}\ 2\ |W_0|\,[(8\pi k_{N_2}t)+\\ &+ \left.(N_2-N_{f_2})(N_{f_1}|\varphi_1|^2+N_{f_2}|\varphi_2|^2)-2N_{f_2}\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
G &= \frac{e^{N_{f_1}|\varphi_1|^2+N_{f_2}|\varphi_2|^2}}{8t^3}\left(\frac{2^{N_{f_1}}}{|\varphi_1|^{2N_{f_1}}}\right)^{\frac{1}{N_1-N_{f_1}}} e^{-\frac{4\pi k_{N_1}}{N_1-N_{f_1}}}\left(\frac{2^{N_{f_2}}}{|\varphi_2|^{2N_{f_2}}}\right)^{\frac{1}{N_2-N_{f_2}}} e^{-\frac{4\pi k_{N_2}}{N_2-N_{f_2}}}\, 2\ \cdot \\
&\cdot\ \Big[(8\pi k_{N_1} t)(N_2-N_{f_2})+(8\pi k_{N_2} t)(N_1-N_{f_1})+(N_1-N_{f_1})(N_2-N_{f_2})(N_{f_1}|\varphi_1|^2+N_{f_2}|\varphi_2|^2)- \\
&-\ 2N_{f_1}(N_2-N_{f_2})-2N_{f_2}(N_1-N_{f_1})+\frac{(8\pi t)^2 k_{N_1}k_{N_2}}{3}\Big]
\end{aligned}
$$

Entonces, para estos dos casos que son los que nos interesan:

- Caso $n=1$

$$V_F=(A+B)+C\ cos(\theta_0-\theta_1)$$

- Caso $n=2$

$$V_F=(A+B+C)+D\ cos(\theta_0-\theta_1)+F\ cos(\theta_0-\theta_2)+G\ cos(\theta_1-\theta_2)$$

17 $D-terms$ para el caso $G=[\prod_{\alpha=1}^{n} SU(N_\alpha)]\times U_X(1)$

Vamos a suponer que cada campo de materia transformándose en la fundamental de $SU(N_\alpha)$ es singlete de los $SU(N_\beta)|_{\beta\neq\alpha}$ y que el moduli T no se transforma gauge bajo ninguno de los $SU(N_\alpha)$ $\forall\alpha$.

Además, como los grupos gauge están en la fase confinante (I.R), vimos que $\langle\phi_{\alpha i_\alpha}\rangle=\left\langle\overline{\phi}_{\alpha i_\alpha}\right\rangle$, lo que hace que, al transformarse en las representaciones fundamental y antifundamental (respectivamente), no se genere $D-term$ para los $SU(N_\alpha)$.

Todo queda pues a calcular los $D-terms$ que genere el $U_X(1)$ anómalo de la teoría, bajo el cual, todos los campos (incluído el moduli T) están cargados:

$$D=D_X=-i\frac{1}{Re\{f_X\}}\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i_\alpha=1}^{N_{f\alpha}}K_{(\phi_{\alpha i_\alpha})}\eta^X_{(\phi_{\alpha i_\alpha})}+K_T\eta^X_T\right]$$

donde $f_X=\frac{k_X}{2\pi}T$.

Ahora bien, como el $U_X(1)$ no transforma $\varphi_{\alpha i_\alpha}$ y $\overline{\varphi}_{\alpha i_\alpha}$ con cargas opuestas, habr que tener en cuenta que el Kahler a tener en cuenta **NO** es:

$$K=-3Log\left(T+T^\dagger\right)+2\left(\phi^\dagger\right)^{\alpha i_\alpha}(\phi)_{\alpha i_\alpha}$$

sino

$$K = -3Log\left(T + T^{\dagger}\right) + \left(\phi^{\dagger}\right)^{\alpha i_{\alpha}} \left(\phi\right)_{\alpha i_{\alpha}} + \left(\overline{\phi}^{\dagger}\right)^{\alpha i_{\alpha}} \left(\overline{\phi}\right)_{\alpha i_{\alpha}}$$

Definiremos la transformación de los campos bajo el $U_X(1)$ como:

$$\eta^X_{(\phi_{\alpha i_{\alpha}})} = iq_{(\alpha i_{\alpha})}\phi_{(\alpha i_{\alpha})}$$

$$\eta^X_{(\overline{\phi}_{\alpha i_{\alpha}})} = i\overline{q}_{(\alpha i_{\alpha})}\overline{\phi}_{(\alpha i_{\alpha})}$$

$$\eta^X_T = i\frac{\delta_{GS}}{2}$$

Los $D - terms$ que tenemos son:

$$D_{(\phi_{\alpha i_{\alpha}})} = -i\frac{1}{Re\left\{f_x\right\}}K_{(\phi_{\alpha i_{\alpha}})}\eta^X_{(\phi_{\alpha i_{\alpha}})} = \left(\frac{2\pi}{k_x t}\right) q_{(\alpha i_{\alpha})}|\phi_{(\alpha i_{\alpha})}|^2$$

$$D_{(\overline{\phi}_{\alpha i_{\alpha}})} = -i\frac{1}{Re\left\{f_x\right\}}K_{(\overline{\phi}_{\alpha i_{\alpha}})}\eta^X_{(\overline{\phi}_{\alpha i_{\alpha}})} = \left(\frac{2\pi}{k_x t}\right) \overline{q}_{(\alpha i_{\alpha})}|\overline{\phi}_{(\alpha i_{\alpha})}|^2$$

$$D_T = -i\frac{1}{Re\left\{f_x\right\}}K_T\eta^X_T = \left(\frac{2\pi}{k_x t}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-3\delta_{GS}}{2t}\right)$$

Entonces:

$$V_D = \frac{1}{2}Re\left\{f_x\right\}D^2 = \frac{\pi}{k_x t}\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i_{\alpha}=1}^{N_{f_{\alpha}}} q_{(\alpha i_{\alpha})}|\phi_{(\alpha i_{\alpha})}|^2 + \overline{q}_{(\alpha i_{\alpha})}|\overline{\phi}_{(\alpha i_{\alpha})}|^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3\delta_{GS}}{2t}\right)\right]^2$$

y como $\langle\phi_{\alpha i_{\alpha}}\rangle = \left\langle\overline{\phi}_{\alpha i_{\alpha}}\right\rangle$

$$V_D = \frac{\pi}{k_x t}\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i_{\alpha}=1}^{N_{f_{\alpha}}} (q_{(\alpha i_{\alpha})} + \overline{q}_{(\alpha i_{\alpha})})|\phi_{(\alpha i_{\alpha})}|^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3\delta_{GS}}{2t}\right)\right]^2$$

Haciendo de nuevo el cambio de variable (normalización) que hicimos en el cálculo de los $F - terms$

$$\phi \Longrightarrow \frac{\varphi}{\sqrt{2}}$$

obtenemos la expresión definitiva de los $D - terms$ como expresión de los mismos campos que teníamos en los $F - Terms$

$$V_D = \frac{\pi}{4k_x t}\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i_\alpha=1}^{N_{f_\alpha}}(q_{(\alpha i_\alpha)} + \overline{q}_{(\alpha i_\alpha)})|\varphi_{(\alpha i_\alpha)}|^2 - \left(\frac{3\delta_{GS}}{2t}\right)\right]^2$$

18 Programa en *Mathematica*: Caso de 2 condensados.

El programa que se presenta es el original en formato .ps que se obtuvo con *Mathematica*

19 Apéndice

- *Convenciones gauges*
  - $[t_a, t_b] = i f_{abc} t_c$
  - $D_\mu \varphi_i = \partial_\mu \varphi_i + i g A^a_\mu (t_a)_i^{\ j} \varphi_j$
  - $D_\mu \psi_i = \partial_\mu \psi_i + i g A^a_\mu (t_a)_i^{\ j} \psi_j$
  - $D_\mu \lambda^a = \partial_\mu \lambda^a + i g A^b_\mu (i\, f_{abc}) \lambda^c = \partial_\mu \lambda^a - g A^b_\mu (f_{abc}) \lambda^c$
  - $L_{YM} = -\frac{1}{2} Tr\left\{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right\} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$
  - $F^a_{\mu\nu} = -\frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + i g [A_\mu, A_\nu] = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu -$ $- g f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu$
- *Transformaciones gauge de los campos ordinarios*
  - $\varphi'_i = e^{i g A_{\mu_a} (t^a)_i^{\ j}} \varphi_j \rightarrow \delta \varphi_i = i g A_{\mu_a} (t^a)_i^{\ j} \varphi_j$
  - $\psi'_i = e^{i g A_{\mu_a} (t^a)_i^{\ j}} \psi_j \rightarrow \delta \psi_i = i g A_{\mu_a} (t^a)_i^{\ j} \psi_j$
  - $A'^a_\mu = A^a_\mu + \partial_\mu \Lambda^a + g f_{abc} \Lambda^b A^c_\mu$
- *Transformaciones gauge de los supercampos quirales*
  - $\Phi'_i = e^{-2 i g \Lambda_a (t^a)_i^{\ j}} \Phi_j \rightarrow \delta \Phi_i = -2 i g \Lambda_a (t^a)_i^{\ j} \Phi_j$
  - $e^{2 g V'_a (t^a)_i^{\ j}} = e^{-2 i g \Lambda^\dagger_a (t^a)_i^{\ j}} \ \cdot\ e^{2 g V_a (t^a)_i^{\ j}} \ \cdot\ e^{2 i g \Lambda_a (t^a)_i^{\ j}}$
- *Desarrollo de Baker-Hausdorff*

$$\begin{aligned} e^{V'} - e^{V} &= (V' - V) + \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2!}[(V' - V)\, V + V\,(V' - V)] + \\ &+ \frac{1}{3!}[(V' - V)\, V^2 + V\,(V' - V)\, V + V^2\,(V' - V)] + \ldots}_{se\ anulan\ en\ el\ WZ\ gauge} \end{aligned}$$

entonces,

$$V'_{WZ} = V_{WZ} + i(\Lambda - \Lambda^\dagger) + \frac{1}{2}[V_{WZ}, i(\Lambda - \Lambda^\dagger)]$$

donde, sustituyendo

$$V_{WZ} \rightarrow 2 g V^a_{WZ}(t_a)$$

y

$$i(\Lambda + \Lambda^\dagger)_{WZ} \rightarrow i\, 2 g (\Lambda^a + \Lambda^{\dagger a})_{WZ} (t_a)$$

y utilizando $[t_a, t_b] = i f_{abc} t_c$, llegamos a

$$A'^a_\mu = A^a_\mu + \partial_\mu \Lambda^a + g f_{abc} \Lambda^b A^c_\mu$$

- *Términos que aparecen en el Lagrangiano*

$$\circ \, [W \, + \, h.c]_F$$

$$\circ \frac{1}{64} \left[W^a_\alpha W^\alpha_a \, + \, h.c \right]_F = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a + i \lambda^a \sigma^\mu D^\dagger_\mu \bar{\lambda}_a + \frac{1}{2} D^a D^a$$

$$\begin{aligned} \circ \left[\Phi^\dagger \, e^{2gV_{WZ}} \, \Phi \right]_D \;\; &= \;\; (D^\dagger_\mu \varphi^\dagger)(D^\mu \varphi) \; + \; i\psi \sigma^\mu D^\dagger_\mu \bar{\psi} \; + \; F^\dagger F \; + \\ &+ \;\; i\sqrt{2} g \left(\varphi^\dagger (t_a) \psi \; \lambda^a - \bar{\psi} (t_a) \varphi \; \bar{\lambda}^a \right) \; + \; g \varphi^\dagger (t_a) \varphi \; D^a \end{aligned}$$

- *Ecuaciones de movimiento para el campo escalar complejo*

  ⋄ La ecuación de movimiento para una coordenada generalizada q cuyas derivadas aparecen en el Lagrangiano hasta orden $n)$ es:

$$S = \int dt L(q, \dot{q}, q^{n)}) \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{d^{n)}}{dt^n} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{n)}} \right) = 0$$

  ⋄ Generalizando esto al caso de un campo escalar complejo φ y partiendo de su Lagrangiano (tomando $\eta_{\mu\nu} = diag(+1, -1, -1, -1)$):

$$L = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi^*) - V(\varphi, \varphi^*) = (\partial_0 \varphi)(\partial_0 \varphi^*) - (\partial_i \varphi)(\partial_i \varphi^*) - V(\varphi, \varphi^*)$$

  ⋄ Si realizamos la transformada de Legendre, llegamos al Hamiltioniano:

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \varphi)} = (\partial_0 \varphi^*)$$

$$H = (\partial_0 \varphi)(\partial_0 \varphi^*) + (\partial_i \varphi)(\partial_i \varphi^*) + V(\varphi, \varphi^*)$$

  con lo que vemos, que **en el caso estático** $\partial_0 \varphi = \partial_0 \varphi^* = 0$ encontramos que

$$L_{stat} = -H_{stat}$$

  ⋄ Si sacamos las ecuaciones de movimiento del Lagrangiano, podemos verlo de dos maneras equivalentes:

  – Utilizando $L = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi^*) - V(\varphi, \varphi^*)$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V(\varphi, \varphi^*)}{\partial \varphi}$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) = \Box \varphi^*$$

entonces

$$E.O.M. \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) = 0$$

$$\Box \varphi^* = - \frac{\partial V(\varphi, \varphi^*)}{\partial \varphi}$$

– Utilizando[11] $L = -\varphi(\Box\varphi^*) - V(\varphi, \varphi^*)$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) = 0$$

$$\Box \left(\frac{\partial L}{\partial(\Box \varphi)} \right) = 0$$

entonces

$$E.O.M. \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Box \varphi^* = - \frac{\partial V(\varphi, \varphi^*)}{\partial \varphi}$$

$\diamond$ En el **caso estático** ($L_{stat} = -H_{stat}$), la **ecuación de movimiento** que podemos utilizar es:

$$\frac{\partial H_{stat}}{\partial \varphi} = 0$$

[11] $(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi^*) = \underbrace{\partial_\mu(\varphi(\partial^\mu \phi^*))}_{surface\ term} - \varphi(\Box\varphi^*) \Rightarrow \varphi = 0$ ó $(\partial^\mu \varphi^*) = 0 = (\partial_\mu \varphi)$ en la superficie frontera de integración.

20 Bibliografía

• *BPS-saturated walls in supersymmetric theories.* B.Chibisov, M.Shifman. 1997. Physical Review.

• *Static Domain Walls in N=1 Supergravity.* Mirjam Cvetic, Stephen Griffies. hep-th/9201007.

• *Supersymmetric gauge field theory and string theory.* D.Bailin, A.Love. 1996. Graduate student series in physics.

• *The Power of Duality- Exact Results in 4D SUSY Field Theory.* N. Seiberg. hep-th/9606077

• *Lectures on supersymmetric gauge theories and electric-magnetic duality.* K. Intriligator, N. Seiberg. hep-th/9509066

• *de Sitter vacua from uplifting D-terms in effecrive supergravities from realistic strings.* A. Achúcarro, B. de Carlos, J. A. Casas, L. Doplicher. hep-th/0601190

• *Racetrack Inflation.* J.J Blanco-Pillado, C.P. Burgess, J.M. Cline, C. Escoda, M. Gómez Reino, R. Kallosh, A. Linde, F. Quevedo. hep-th/0406230

• *Inflating in a Better Racetrack.* J.J Blanco-Pillado, C.P. Burgess, J.M. Cline, C. Escoda, M. Gómez Reino, R. Kallosh, A. Linde, F. Quevedo. hep-th/0406230