Mecánica Cuántica: Hoja de ejercicios n^o 1.

A entregar el día 10 de octubre de 2012.

1: Dado dos estados, $|-\rangle$ y $|+\rangle$, que forman una base ortonormal de un espacio de Hilbert. Define la operación de negación, Not, que actúa sobre los estados como

$$\mathsf{Not} \ : \ \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \ : \ |\pm\rangle \longmapsto |\mp\rangle \ .$$

a) Hallad el operador unitario, $\mathcal{O}_{\mathsf{Not}}$, que implementa la operación Not sobre el espacio de Hilbert.

b) Sea Σ un operador tal que $\Sigma|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$, ¿conmutan o anti-conmutan $\mathcal{O}_{\mathsf{Not}}$ y Σ?

c) El operador de Walsh-Hadamard, W, actúa sobre los estados en la siguiente forma

$$\mathrm{W}|-\rangle \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ |-\rangle + |+\rangle \ \right) \quad , \quad \mathrm{W}|+\rangle \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ |-\rangle - |+\rangle \ \right) \ .$$

Demostrad que el operador de Walsh-Hadamard es hermítico, $\mathrm{W}^\dagger = \mathrm{W}$, e involutivo, $\mathrm{W}^2 = \mathrm{Id}$.

d) ¿conmutan o anti-conmutan $\mathcal{O}_{\mathsf{Not}}$ y W? ¿Y Σ y W?

e) Finalmente, dado el operador F que actúa como

$$\mathrm{F}|-\rangle \ = \ 0 \quad , \quad \mathrm{F}|+\rangle \ = \ |-\rangle \ ,$$

demostrad que el operador F es nilpotente, es decir que satisface $\mathrm{F}^2 = 0$. ¿Es F un operador hermítico?

2: Dado los operadores $\mathcal{O}_{\mathsf{Not}}$, Σ, W y F del ejercicio anterior, calculad

$$\exp\left(\ i\alpha \ \mathcal{O}_{\mathsf{Not}} \ \right) \ , \ \exp\left(\ i\lambda \ \Sigma \ \right) \ , \ \exp\left(\ i\beta \ \mathrm{W} \ \right) \ \ \mathrm{y} \ \ \exp\left(\ i\tau \ \mathrm{F} \ \right) \ .$$

4: Dado un operador S que es invertible, es decir que existe un operador S^{-1} tal que $\mathrm{SS}^{-1} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{S} = \mathrm{Id}$, y una función f, demostrad que $\mathrm{S} \ f(\mathrm{A}) \ \mathrm{S}^{-1} = f\left(\mathrm{SAS}^{-1}\right)$, donde A es un operador.

3: Demostrad las siguientes propriedades del conmutador

a) $[\mathrm{A},\mathrm{B}]^\dagger \ = \ -\left[\mathrm{A}^\dagger,\mathrm{B}^\dagger\right]$,

b) $\left[\ S^{-1}\mathrm{A}S \ , \ S^{-1}\mathrm{B}S \ \right] \ = \ S^{-1} \ [\mathrm{A},\mathrm{B}] \ S$,

c) $[\mathrm{A},[\mathrm{B},\mathrm{C}]] + [\mathrm{A},[\mathrm{B},\mathrm{C}]] + [\mathrm{A},[\mathrm{B},\mathrm{C}]] = 0$ ssi la multiplicación de operadores es asociativa. Esta identidad es la *identidad de Jacobi.*

d) $[\mathrm{A},\mathrm{BC}] \ = \ [\mathrm{A},\mathrm{B}]\,\mathrm{C} + \mathrm{B}\,[\mathrm{A},\mathrm{C}]$. Dicho de otra forma, el conmutador satisface la regla de la cadena, también llamada la regla de Leibnitz, al igual que una derivada.

5: Dado dos operadores hermíticos A y B cuyo conmutador es un c-número, es decir $[\mathrm{A},\mathrm{B}] = i\mu \ \mathrm{Id}$ con $\mu \in \mathbb{C}$, demostrad que

a) por consistencia μ tiene que ser real ($\mu \in \mathbb{R}$).

b) si $F(\mathrm{B})$ es una función del operador B, entonces $[\mathrm{A}, F(\mathrm{B})] = i\mu\ F'(\mathrm{B})$, donde F' es la derivada de F.

c)
$$e^{-i\alpha\ \mathrm{B}}\ \mathrm{A}\ e^{i\alpha\ \mathrm{B}} \ = \ \mathrm{A}\ - \mu\alpha\ \mathrm{Id}\ . \tag{1}$$

d)
$$e^{\mathrm{A}}\ e^{\mathrm{B}} \ = \ e^{\mathrm{A}+\mathrm{B}}\ e^{[\mathrm{A},\mathrm{B}]/2}\ . \tag{2}$$

Pista: Definid la función $f(t) = \exp\left(\mathrm{A} + t\mathrm{B}\right)$ y demostrad que $\dot{f} = f\ \left(\mathrm{B} - \frac{1}{2}\left[\mathrm{A}, \mathrm{B}\right]\right)$ y $f(0) = e^{\mathrm{A}}$.