Tema 1: Conceptos fundamentales en mecánica cuántica

Boletín de problemas 2

1- Dado un hamiltoniano $H(t)$ tal que $[H(t), H(t')] = 0$, verificar que el operador evolución temporal se puede escribir como:

$$\mathcal{U}(t, t_0) \;=\; \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} d\tau \; H(\tau) \right) \,. \tag{1}$$

2- Utilizando la ecuación de Schrodinger para el operador evolución temporal demostrar que cuando $[H(t), H(t')] \neq 0$ tenemos que su expresión viene dada por la serie de Dyson:

$$\mathcal{U}(t, \tau) \;=\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^{n} \int_{\tau}^{t} dt_1 \int_{\tau}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{\tau}^{t_{n-1}} dt_n \; H(t_1) \ldots H(t_n) \,. \tag{2}$$

3- El *oscilador de Rabi* es un sistema físico con 2 estados ortonormales posibles (que denotamos como $|- >$ y $|+ >$), cuya dinámica viene determinada por el siguiente hamiltoniano:

$$H(t) \;=\; \hbar\omega_0 \, |+ >< +| \;+\; \frac{\hbar\omega_1}{2} \Big\{ \, e^{-i\omega t} \, |+ >< -| \;+\; e^{i\omega t} \, |- >< +| \, \Big\} \,. \tag{3}$$

a) Demostrar que en el caso $\omega_0 = 0$ se cumple

$$[H(t), H(0)] \;=\; \frac{\hbar^2\omega_1^2}{2i} \; \sin(\omega t) \; \big(\, |+ >< +| \;-\; |- >< -| \, \big) \,. \tag{4}$$

b) Demostrar también que si en $t = 0$ el sistema se encuentra en el estado $|- >$, la probabilidad de que en el tiempo t el sistema se encuentre en el estado $|+ >$ viene dada por:

$$\mathcal{P}_{|+>}(t) \;=\; \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \, \sin^2\left(\tfrac{\Omega}{2} t\right) \quad \text{donde} \quad \Omega^2 \;=\; (\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2 \,, \tag{5}$$

Ω recibe el nombre de *frequencia de Rabi.*
Nota: Formular el problema en términos de una ecuación diferencial para la función $f(t) =< +|\mathcal{U}(t)|- >$.

4- En un colectivo de sistemas físicos caracterizados por estados $|\alpha^{(i)}>$ el operador densidad se escribe como

$$\varphi = \sum_i w_i |\alpha^{(i)} >< \alpha^{(i)}|$$

entonces:

a) Probar que en el formalismo de Scrodinger la evolución temporal del operador densidad se puede escribir como:

$$\varphi(t) = \mathcal{U}(t)\varphi(0)\mathcal{U}^+(t)$$

donde $\mathcal{U}(t)$ es el operador evolución temporal

b) Supongamos que tenemos una colectividad pura en $t = 0$. Probar que no se puede evolucionar con el tiempo a una colectividad mixta (usar que la evolución temporal está gobernada por la ecuación de Schrodinger)

5- Supongamos que tenemos un sistema físico unidimensional en el cual la masa de la partícula depende del tiempo, es decir:

$$H(t) \;=\; \frac{P^2}{2m(t)} \;+\; V(X)\;, \tag{6}$$

Demostrar que en dicho caso se cumple la siguiente relación de conmutación:

$$[H(t)\;,\;H(t')] \;=\; i\hbar\frac{m(t)-m(t')}{2m(t)m(t')}\;\{P, V'(X)\}\;. \tag{7}$$

Nota: los alumnos que quieran que cuente para la nota del parcial deberán entregar las soluciones como muy tarde el día 4 de octubre antes de comenzar la clase.