Mecánica Cuántica: Hoja de ejercicios n$^{\underline{o}}$ 3.

A entregar el día 25 de octubre de 2012.

1. Dado el operador de posición Q, calculad su representación en la imagen de Heisenberg, $\mathrm{Q}_H(t)$, usando el hamiltoniano de la partícula libre.

   En $t = 0$ fabricamos un *estado de incertidumbre mínima*, es decir un estado $|\Psi\rangle$ tal que $\Delta\mathrm{P}\ \Delta\mathrm{Q} = \hbar/2$, y lo dejamos evolucionar con el hamiltoniano de la partícula libre. Demostrad que

$$\Delta\mathrm{P}(t)\ \Delta\mathrm{Q}(t) \;=\; \frac{\hbar}{2}\sqrt{1 \;+\; \frac{4t^2}{\hbar^2 m^2}\ (\Delta\mathrm{P})^4}\ . \tag{1}$$

   Pista: Usad la relación $\langle\Psi(t)|\mathrm{Q}|\Psi(t)\rangle = \langle\Psi|\mathrm{Q}_H(t)|\Psi\rangle$.

2. Dado el oscilador armónico con los operadores A, $\mathrm{A}^\dagger$ y N con

$$[\mathrm{N},\mathrm{A}] \;=\; -\mathrm{A}\ \ ,\ \ \left[\mathrm{N},\mathrm{A}^\dagger\right] \;=\; \mathrm{A}^\dagger\ \ ,\ \ \left[\mathrm{A},\mathrm{A}^\dagger\right] \;=\; 1\ , \tag{2}$$

   definid el estado $|z\rangle$ como un autoestado del operador A, es decir $\mathrm{A}|z\rangle = z|z\rangle$.

   a) ¿Por qué podemos asumir que $z \in \mathbb{C}$? ¿Puede $|z\rangle$ ser un autoestado del operador $\mathrm{A}^\dagger$?

   b) Usad los autoestados del operador N, $|n\rangle$, para demostrar que

$$|z\rangle \;=\; \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \;=\; \rho_0\ \exp\left(z\mathrm{A}^\dagger\right)|0\rangle\ , \tag{3}$$

   donde ρ_0 es una constante de normalización.

   c) Usad la asociación usual de un bra a un ket para ver que

$$\langle z| \;\equiv\; \bar{\rho}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}}\ \langle n| \;=\; \bar{\rho}_0\ \langle 0|\exp\left(\bar{z}\mathrm{A}\right)\ , \tag{4}$$

   y usad este resultado para hallar, fijando la fase a ser la unidad,

$$\rho_0 \;=\; \exp\left(-|z|^2/2\right)\ . \tag{5}$$

   Pista: Usad la formula de Glauber, ejercicio 5d de la primera hoja de ejercicios.

3. Dado el estado $|z\rangle$ del ejercicio anterior

   a) Verificad que

$$\langle\mathrm{P}\rangle \;=\; \sqrt{2\hbar m\omega}\ \mathrm{Re}(z) \quad \text{y} \quad \langle\mathrm{Q}\rangle \;=\; -\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\ \mathrm{Im}(z)\ . \tag{6}$$

   b) Demostrad que el estado $|z\rangle$ es un estado de incertidumbre mínimo, es decir que

$$\Delta(\mathrm{P})\Delta(\mathrm{Q}) \;=\; \frac{\hbar}{2}\ . \tag{7}$$

c) Definimos la evolución temporal del estado $|z\rangle$ como $|z(t)\rangle \equiv \mathrm{U}(t)|z\rangle$. Demostrad que

$$\mathrm{A}|z(t)\rangle \;=\; z e^{-i\omega t}\;|z(t)\rangle\;. \tag{8}$$

d) Calculad $\langle \mathrm{Q}\rangle(t) = \langle z(t)|\mathrm{Q}|z(t)\rangle$ y $\langle \mathrm{P}\rangle(t) = \langle z(t)|\mathrm{P}|z(t)\rangle$, asumiendo que $\mathrm{Re}(z) = 0$.

e) Usad el resultado del apartado d), para demostrar que el estado $|z(t)\rangle$ es un estado de incertidumbre mínimo para cualquier t.

4. Considerad de nuevo el oscilador armónico y definid la función de onda asociado al estado $|n\rangle$ como $\Psi_n(q) \equiv \langle q|n\rangle$. Demostrad que

$$\Psi_n(q) \;=\; \frac{i^n}{\sqrt{2^n n!}}\;\left(\frac{\mu}{\pi}\right)^{1/4}\;\exp\left(-\mu/2\;q^2\right)\;\mathbf{H}_n(\sqrt{\mu}q)\;,\quad \mu \equiv \frac{m\omega}{\hbar}\;, \tag{9}$$

donde $\mathbf{H}_n$ es el n-ésimo polinomio de Hermite,

$$\mathbf{H}_n(x) \;=\; (-1)^n\; e^{x^2}\;\partial_x^n\; e^{-x^2}\;. \tag{10}$$

5. Considerad el problema hamiltoniano del potencial de Pöschl-Teller con superpotencial $\mathrm{W}^{(2)} = 2\tanh(q)$. Como sabreis el espectro discreto de este problema se compone de 2 estados y a las funciones de onda asociadas les llamaremos $\Psi_0^{(2)}$ y $\Psi_1^{(2)}$. Usad el resultado anterior para demostrar que las funciones de onda normalizadas son

$$\Psi_0^{(2)} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2\cosh^2(q)}\quad \text{y}\quad \Psi_1^{(2)} \;=\; \sqrt{\frac{3}{2}}\;\frac{\sinh(q)}{\cosh^2(q)}\;, \tag{11}$$

donde elegimos las fases a ser 1.

6. Considerad el problema con superpotencial $\mathrm{W}^{(3)} = 3\tanh(q)$ y hallad la forma funcional de las funciones de onda $\Psi_0^{(3)}$, $\Psi_1^{(3)}$ y $\Psi_2^{(3)}$ (no hace falta normalizarlas!).

7. Introducimos la operación de paridad, Π, como $\Pi\circ q = -q$ y definimos su actuación sobre una función cualquiera como $\Pi \circ f(q) \equiv f(\Pi \circ q) = f(-q)$. Como pueden comprobar fácilmente, las soluciones del ejercicio 5) satisfacen $\Pi \circ \Psi_k^{(2)} = (-1)^k\;\Psi_k^{(2)}$. Demostrad que las funciones de onda $\Psi_k^{(n)}$ asociados al superpotencial $\mathrm{W}^{(n)} = n\tanh(q)$ satisfacen

$$\Pi \circ \Psi_k^{(n)} \;=\; (-1)^k\;\Psi_k^{(n)}\;. \tag{12}$$

8. Considerad los operadores F y $\mathrm{F}^\dagger$ que satisfacen

$$\left\{\mathrm{F}, \mathrm{F}^\dagger\right\} \;=\; \mathrm{Id}\quad,\quad \mathrm{F}^2 \;=\; \left(\mathrm{F}^\dagger\right)^2 \;=\; 0\;. \tag{13}$$

a) Definid el operador $\mathrm{N}_F \equiv \mathrm{F}^\dagger\mathrm{F}$ y demostrad que $[\mathrm{N}_F, \mathrm{F}] = -\mathrm{F}$ y $\left[\mathrm{N}_F, \mathrm{F}^\dagger\right] = \mathrm{F}^\dagger$.

b) Hallad el espectro del operador N_F.