Mecánica Cuántica: Hoja de ejercicios n$^{\underline{o}}$ 5.

A entregar el día 30 de enero de 2012.

1. Dada la representación diferencial de los operadores J

$$\Gamma\left(\mathrm{L}_i\right) \;=\; -i\varepsilon_{ijk}\, q_j\partial_k \;\text{ demostrad que }\; \Gamma\left(\vec{\mathrm{L}}^2\right) \;=\; -\vec{q}^{\,2}\,\vec{\partial}^2 \;+\; \vec{q}\cdot\vec{\partial}\,\vec{q}\cdot\vec{\partial} \;+\; \vec{q}\cdot\vec{\partial}\,.$$

¿Por qué en coordenadas esféricas se cumple $\vec{q}\cdot\vec{\partial} = r\partial_r$?

2. Sean L_i y S_i ($i = 1, 2, 3$) los operadores del momento angular y de espín 1/2, es decir que cumplen las reglas de conmutación $[\mathrm{L}_i, \mathrm{L}_j] = i\varepsilon_{ijk}\mathrm{L}_k$, $[\mathrm{S}_i, \mathrm{S}_j] = i\varepsilon_{ijk}\mathrm{S}_k$ y $[\mathrm{L}_i, \mathrm{S}_j] = 0$. Deducid el espectro del operador $\vec{\mathrm{L}}\cdot\vec{\mathrm{S}}$.

3. Considerad un sistema constituyente de dos partículas de espín 1/2 y asumid que el hamiltoniano del sistema viene dado por

$$\mathrm{H} \;=\; \lambda^2\, \vec{\mathrm{S}}_1\cdot\vec{\mathrm{S}}_2\;.$$

   a) Si en $t = 0$ el sistema está en el estado $|\!\uparrow\uparrow\rangle$, calculad la probabilidad de que en el tiempo t el sistema se encuentre en el estado $|\!\downarrow\downarrow\rangle$.
   b) Si en $t = 0$ el sistema está en el estado $|\!\uparrow\downarrow\rangle$, ¿cuál es la probabilidad de que en el instante t el sistema se encuentre en el estado $|\!\downarrow\uparrow\rangle$?

4. Dada la siguiente serie de Clebsch-Gordon $\mathcal{V}_1\otimes\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2\oplus\mathcal{V}_1\oplus\mathcal{V}_0$, construid los estados normalizados pertenecientes a $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_0$.

5. Dado dos operadores tensoriales esféricos de espín 1 llamados $\mathrm{V}_m^{(1)}$ y $\mathrm{K}_m^{(1)}$, construid un operador tensorial esférico de espín 2.

6. Vamos a considerar una pequeña variación del álgebra de las rotaciones infinitesimales, al considerar tres operadores $\mathrm{K}_\pm$ y J_3 cuyos reglas de conmutación son

$$[\mathrm{J}_3, \mathrm{K}_\pm] \;=\; \pm\,\mathrm{K}_\pm \qquad \text{y} \qquad [\mathrm{K}_+, \mathrm{K}_-] \;=\; -\mathrm{J}_3\;.$$

   Si comparáis estas reglas de conmutación con las de las rotaciones, veréis que la única diferencia reside en el signo menos en el último conmutador. Para investigar las implicaciones del signo

   a) Demostrad que el operador $\mathrm{C} = \mathrm{J}_3^2 - \mathrm{K}_+\mathrm{K}_- - \mathrm{K}_-\mathrm{K}_+$ conmuta con J_3 y $\mathrm{K}_\pm$.
   b) El CMOC natural está formado por J_3 y C y postulamos la existencia de un estado normalizado $|c,\xi\rangle$, tal que

$$\mathrm{C}|c,\xi\rangle \;\equiv c\;|c,\xi\rangle \;\;,\;\; \mathrm{J}_3|c,\xi\rangle \;\equiv\; \xi\;|c,\xi\rangle \;\;,\;\; \mathrm{K}_-|c,\xi\rangle \;=\; 0\;.$$

   ¿Cuál es la relación entre c y ξ?
   c) Demostrad que no existe ningún $p\in\mathbb{N}^+$ tal que $(\mathrm{K}_+)^{p+1}\,|c,\xi\rangle \;=\; 0$.
   Pista: Obtened primero $\xi > 0$ de la existencia del estado $\mathrm{K}_+|c,\xi\rangle$.