Tema 6: Teoría de Perturbaciones
Boletín de ejercicios

1) Supongamos que tenemos un oscilador armónico unidimensional

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2x^2$$

sometido a la perturbación $V = bx$, donde b es una constante real.

a) Calcular la variación de energía del estado fundamental a orden más bajo (no nulo) en teoría de perturbaciones.

b) Resolver el problema de forma exacta resolviendo la ecuación de Schrodinger y comparar el resultado con el obtenido en el apartado a).

Nota: Utilizar para la resolución del problema el siguiente resultado:

$$< n'|x|n >= \sqrt{\frac{\hbar}{2mw}} \left(\sqrt{n+1}\, \delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\, \delta_{n',n-1} \right)$$

2) Consideremos ahora que el oscilador armónico unidimensional está sometido a una perturbación de la forma $V = \lambda\, \mathrm{sen}(kx)$.

a) Calcular la variación de energía del estado fundamental a primer y segundo orden en teoría de perturbaciones, así como la corrección a primer orden del estado fundamental.

b) Comparar el resultado obtenido oara las energías en el límite $k \to 0$ con el resultado del ejercicio anterior.

Nota: Utilizar para la resolución del problema $\mathrm{sen} x = Im(e^{ix})$ así como la siguiente relación entre operadores

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}$$

3) Considerar ahora el oscilador armónico isotrópico en dos dimensiones:

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{mw^2}{2}(x^2 + y^2)$$

a) Hay alguna degeneración en las energías de los estados con autovalores mas bajos? Comprobarlo para los tres estados con menor energía.

b) Consideremos ahora la perturbación $V = \lambda m w^2 xy$. Encontrar la variación de energía a primer orden en teoría de perturbaciones para dichos tres estados.

c) Resolver el problema de forma exacta y comparar con el resultado obtenido en el apartado b) (podeis usar el resultado dado en la nota del ejercicio 1).

4) Supongamos que tenemos un electrón en un orbital p, es decir, caracterizado por los números cuánticos $|n, l = 1, m = 0, \pm 1 >$ y consideremos la perturbación $V = \lambda(x^2 - y^2)$. Argumentar si dicha perturbación rompe la degeneración existente entre estos tres autoestados de la energía.

5) Supongamos que tenemos una partícula en un pozo infinito en dos dimensiones:

$$V = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x, y \leq L \\ \infty & \text{si } x, y < 0 \text{ ó } x, y > L \end{cases}$$

y consideremos la siguiente perturbación:

$$V = \begin{cases} \lambda xy & \text{si } 0 \leq x, y \leq L \\ 0 & \text{si } x, y < 0 \text{ ó } x, y > L \end{cases}$$

Obtener los autovalores de la energía a primer orden en teoría de perturbaciones para el estado fundamental y el primer estado excitado.

6) Supongamos que tenemos una partícula de masa m y carga e sometida al siguiente potencial central

$$V = \begin{cases} -\frac{e^2}{r} & \text{si } 0 < r < R \\ -\frac{e^2}{r} e^{-\lambda(r-R)} & \text{si } R < r < \infty \end{cases}$$

que difiere del de Coulomb únicamente en la región $r > R$ (en la cual el potencial de Coulomb está apantallado) y coincide con el de Coulomb en el límite $\lambda \to 0$. Considerando el término con λ como una perturbación calcular utilizando teoría de perturbaciones la primera corrección a la energía del estado fundamental.

Nota: Utilizar para la resolución del problema la forma explícita de la parte radial de la función de onda $\Psi_{100} = (\pi a_0^3)^{-1/2} e^{-r/a_0}$.

7) Supongamos que tenemos un oscilador armónico unidimensional sometido a la siguiente perturbación

$$V = \frac{mw^2 x^2}{2} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^{2\lambda} - 1 \right]$$

donde $\lambda << 1$ y a es una constante.

Calcular la corrección a la energía del estado fundamental a primer orden.

Nota: Utilizar para la resolución del problema el siguiente resultado:

$$\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2(1+\lambda)} dy \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 + \lambda(2 - 2\log(2) - \gamma) \right]$$

donde $\gamma = 0.57721...$ es la constante de Euler.

Los alumnos que quieran que cuente para la nota del parcial deberán entregar las soluciones como muy tarde el día 5 de marzo antes de comenzar la clase.