Mecánica Cuántica: Hoja de ejercicios n^o 7.

A entregar el día 26 de Marzo de 2012.

1. Considerad el oscilador armónico y la perturbación

$$\mathrm{H}_1(t) \;=\; i\lambda \left(\mathrm{A} \;-\; \mathrm{A}^\dagger\right)\, e^{-\mu t} \qquad\qquad (\mu > 0)\;, \tag{1}$$

que empezará a funcionar a partir del tiempo $t = 0$. Si en $t = 0$ el sistema está en el estado $|\,0\rangle$,

a) demostrad que a primer orden en teoría de perturbaciones, la probabilidad de que el sistema efectúe una transición del estado inicial a un estado $|\,n \neq 0\rangle$ viene dado por

$$|c_n|^2 \;=\; \alpha\, \delta_{n,1}\, \left[e^{-2\mu t} - 2e^{-\mu t}\cos(\omega t) + 1\right] \qquad \text{donde:}\;\; \alpha \;=\; \frac{\lambda^2}{\hbar^2(\mu^2+\omega^2)} \tag{2}$$

b) Demostrad que a primer orden en teoría de perturbaciones tenemos $c_0 = 1$.

c) Usad la teoría de perturbaciones a segundo orden para calcular c_0 y demostrar que hasta primer orden en α se cumple

$$|c_0|^2 \;=\; 1 \;-\; \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2\;. \tag{3}$$

2. Considerad el mismo sistema que en el ejercicio anterior y

a) calculad el hamiltoniano de interacciones (H_I), es decir la perturbacion H_1 en la imagen de interacciones.

b) Suponed que la forma del estado a tiempo t en la imagen de interacciones tiene la forma

$$|\,\Psi, t\rangle_I \;=\; e^{\xi(t)}\; e^{\beta(t)\;\mathrm{A}^\dagger}\;\; |0\rangle\;, \tag{4}$$

con la restricción de que $\xi(0) = 0$ y $\beta(0) = 0$ para satisfacer la condición incial que $|\,\Psi, t=0\rangle = |\,0\rangle$. Demostrad que si

$$\beta \;=\; \frac{\lambda}{\hbar\bar\Gamma}\,\left(e^{-\bar\Gamma t} - 1\right) \quad , \quad \xi \;=\; \frac{\lambda^2}{\hbar^2\;|\Gamma|^2}\,\left(e^{-\Gamma t}-1\right) \;+\; \frac{\lambda^2}{2\mu\hbar^2\bar\Gamma}\,\left(1 - e^{-2\mu t}\right)\;, \tag{5}$$

donde $\Gamma \equiv \mu + i\omega$, se resuelve la ecuación de Schrödinger en la imagen de interacciones.

c) Demostrad que el estado $|\,\Psi, t\rangle_I$ así obtenido está normalizado. ¿Por qué la solución que acabamos de hallar es la única que puede representar la situación que intentabamos aproximar en el ejercicio anterior?

d) Demostrad que

$$|c_0|^2 \;=\; \exp\left(-\alpha\;\left[1 - 2e^{-\mu t}\cos(\omega t) + e^{-2\mu t}\right]\right)\;, \tag{6}$$

$$|c_1|^2 \;=\; \alpha\,|c_0|^2\,\left(1 - 2e^{-\mu t}\cos(\omega t) + e^{-2\mu t}\right)\;. \tag{7}$$

e) Calculad la probabilidad de que en el límite $t \to \infty$ el estado se encuentre en el vacío.

f) Para tiempos t pequeños, ¿el comportamiento de $|c_0|^2$ es del tipo $e^{-t/<t>}$?

3. En este ejercicio vamos a ver una aproximación que en Inglés se llama *the sudden approximation*, traducido libremente como la aproximación del cambio instantáneo.

Supongamos que tenemos un sistema físico descrito por un hamiltoniano que depende del tiempo de tal forma que no se le puede escribir como $\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1(t)$, con lo cual no podemos aplicar la teoría de perturbaciones, pero que tiene la característica de que durante un intervalo de tiempo $(-t_0, t_0)$ hace la transición de una descripción en términos de un hamiltoniano independiente del tiempo $\mathrm{H}^<$ a una descripción en términos de un hamiltoniano independiente del tiempo $\mathrm{H}^>$. La idea fundamental de la aproximación reside en suponer que la transición es tan rápida, que podamos tomar $t_0 = 0$.

Sea $|\ \Psi^<, t\rangle$ un estado para $t < 0$ y llamad $|\ \Psi^>, t\rangle$ al estado para $t > 0$, entonces el hecho de que el cambio es instantaneo quiere decir que

$$\lim_{t\downarrow 0}\ |\Psi^>, t\rangle\ =\ \lim_{t\uparrow 0}\ |\Psi^<, t\rangle\ , \tag{8}$$

Sea $\{|\ E_n^<\rangle\}$ un conjunto completo de auto-estados ortonormales del hamiltoniano $\mathrm{H}^<$ y $\{|\ E_a^>\rangle\}$ otro para el hamiltoniano $\mathrm{H}^>$. Usando esos conjuntos podemos escribir

$$\lim_{t\downarrow 0}\ |\Psi^<, t\rangle\ =\ \sum_n\ c_n\ |E_n^<\rangle \quad , \quad \lim_{t\uparrow 0}\ |\Psi^>, t\rangle\ =\ \sum_a\ b_a\ |E_b^>\rangle\ , \tag{9}$$

y la ec. (8) nos permite relacionar los coeficientes b_a con los coeficientes a_n como

$$b_a\ =\ \sum_n\ a_n\ \langle\ E_a^>\ |\ \ E_n^<\ \rangle\ . \tag{10}$$

El problema (técnico) consiste claramente en como calcular los elementos de transformación $\langle\ E_a^>\ |\ \ E_n^<\ \rangle$.

Como ejemplo de la aproximación del cambio instantáneo, considerad el caso de que para $t < 0$ el sistema es un pozo infinito de anchura $2a$. El hamiltoniano del sistema es

$$\mathrm{H}^<\ =\ \frac{\mathrm{P}^2}{2m}\ +\ V^< \quad \text{donde } V^<\ =\ \begin{cases} 0 & : \ |q| < a \\ \infty & : \ |q| \geq a \end{cases} \tag{11}$$

El espectro de este hamiltoniano es puramente discreto y los valores de energía y las correspondientes funciones de onda son ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$E_n^<\ =\ \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}\ n^2\ \longrightarrow\ \Psi_n^<(q)\ =\ \begin{cases} a^{-1/2}\ \cos\left(\frac{\pi n}{2a}q\right) & : \ n \text{ impar} \\[2mm] a^{-1/2}\ \sin\left(\frac{\pi n}{2a}q\right) & : \ n \text{ par} \end{cases} \tag{12}$$

De repente, en $t = 0$ el pozo se hace el doble de ancho!

a) Caracterizad el hamiltoniano $\mathrm{H}^>$, sus autovalores $E^>$ y las correspondientes funciones de onda.

b) Suponed que el sistema para $t < 0$ estaba en su estado fundamental (es decir el estado $|\,E_1^<\rangle$), y demostrad que

$$\langle\ E_n^> \mid E_1^<\ \rangle \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} dq\ \overline{\Psi_n^>(q)}\ \Psi_1^<(q) \;=\; \int_{-a}^{a} dq\ \overline{\Psi_n^>(q)}\ \Psi_1^<(q) \tag{13}$$

c) Usad la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\ \cos(n\sigma/4)\cos(\sigma/2) \;=\; -\frac{16}{n^2-4}\ \cos(n\pi/4)\ , \tag{14}$$

para calcular la probabilidad de que el sistema se encuentra para $t > 0$ en un autoestado $|\,E_n^>\rangle$.

4. El tritio, ^{3}H, es un isótopo del hidrógeno que es radioactivo con una vida media de unos 40 años: el proceso de desintegración es $^3\mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{He} + e^- + \bar{\nu}_e$. Si suponemos que tanto el electrón como el anti-neutrino salen emitidos con una velocidad alta, podemos aplicar la aproximación del cambio instantáneo para estimar p.ej. las probabilidades de que el electrón que estaba orbitando el nucleo del tritio, esté después de la desintegración en una orbita al rededor del nucleo del helio.

a) Suponed que antes de la desintegración el electrón estaba en el estado $1s$, es decir en el estado $|\,0,0,0\rangle$.[1] Después de la desintegración ¿puede el electrón estar en un estado $|\,n,l,m\rangle$ con $l \neq 0$ y $m \neq 0$?

b) Calculad la probabilidad de que después de la desintegración el electrón esté en el estado $|\,0,0,0\rangle$.

c) La probabilidad total de que después de la desintegración el electrón esté en algún estado $|\,n,0,0\rangle$ $(n = 0,1,\ldots)$ se puede calcular y es $0,976$. ¿Por qué esta probabilidad no es 1?

5. Considerad un sistema con prepotencial $W = \tanh(q)$ que en $t = 0$ efectúa una transición a un sistema con un prepotencial $W = 2\tanh(q)$. Si antes de la transición el sistema estaba en el estado ligado, ¿cuál es la probabilidad de que después de la transición el sistema se encuentre en un estado no-ligado?
Pista: Usad la integral $\int_{-\infty}^{\infty} dq\ \cosh^{-3}(q) = \frac{\pi}{2}$.

[1] Recordad que al estado de energía mínima de sistemas como el hidrógeno lo llamamos $|\,0,0,0\rangle$ mientras que en los libros de texto lo suelen llamar $|\,1,0,0\rangle$.