Boletín 8: Partículas Idénticas

A entregar el día 10 de Abril de 2011

1. Consideremos la siguiente clase de estados en la representación del número de ocupación $|n_b, n_\uparrow, n_\downarrow\rangle$, donde n_b es el número de bosones, y $n_\uparrow$ y $n_\downarrow$ son los números de ocupación de fermiones de spin 1/2. La energía de los estados viene dada por

$$\mathrm{H}_0 \, |n_b, n_\uparrow, n_\downarrow\rangle \; = \; \mathcal{E} \; (\alpha n_b + n_\uparrow + n_\downarrow) \, |n_b, n_\uparrow, n_\downarrow\rangle \; . \tag{1}$$

Supongamos ahora que a partir del tiempo $t = 0$ activamos la siguiente perturbación

$$\mathrm{H}_1 \; = \; \lambda \, \left[\mathrm{F}_\uparrow^\dagger \, \mathrm{F}_\downarrow^\dagger \, \mathrm{A} \; + \; \mathrm{A}^\dagger \, \mathrm{F}_\downarrow \, \mathrm{F}_\uparrow \, \right] \; . \tag{2}$$

   a) ¿Cual es la interpretación de esta perturbación?
   b) Usando teoría de perturbaciones a primer orden analizar lo que le puede pasar al estado inicial $| \, n_b, 0, 0\rangle$. ¿Que valor tiene que tener α para que la perturbación tenga algún efecto?
   c) Utilizando la regla de oro de Fermi estimar el tiempo medio del estado inicial $|n_b, 0, 0\rangle$.

2. Supongamos que tenemos un sistema compuesto por 2 fermiones de espín 1/2 sin interacción algúna entre sí y cuyo hamiltoniano es el del oscilador armónico. Si denotamos el posible autoestado de energía de un fermion como $| \, n, s\rangle$, donde $n = 0, 1, \ldots$ es el número del nivel del oscilador y s el espín ($s =\uparrow$ ó $s =\downarrow$) podemos suponer que los estados $| \, n, s\rangle$ forman un conjunto ortonormal y completo. La energía del sistema de dos partículas en ese caso viene dado por

$$\mathrm{H} \;\; |n, s\rangle \otimes |n', s'\rangle \; = \; \hbar\omega \; \big(\; n + n' + 1 \; \big) \;\; |n, s\rangle \otimes |n', s'\rangle \; . \tag{3}$$

   a) Considerar los siguientes estados

$$n \;\; : \;\; |n; 0\rangle_f \; \equiv \; \tfrac{1}{\sqrt{2}} \; (|n, \uparrow\rangle \otimes |n, \downarrow\rangle \; - \; |n, \downarrow\rangle \otimes |n, \uparrow\rangle) \;\; ,$$

$$m > n \;\; : \;\; \left\{ \begin{array}{lcl} |n, m; 1\rangle_f & \equiv & \frac{1}{\sqrt{2}} \; (|n, \uparrow\rangle \otimes |m, \uparrow\rangle \; - \; |m, \uparrow\rangle \otimes |n, \uparrow\rangle) \\ |n, m; 0^+\rangle_f & \equiv & \frac{1}{\sqrt{2}} \; (|n, \uparrow\rangle \otimes |m, \downarrow\rangle \; - \; |m, \downarrow\rangle \otimes |n, \uparrow\rangle) \\ |n, m; 0^-\rangle_f & \equiv & \frac{1}{\sqrt{2}} \; (|n, \downarrow\rangle \otimes |m, \uparrow\rangle \; - \; |m, \uparrow\rangle \otimes |n, \downarrow\rangle) \\ |n, m; -1\rangle_f & \equiv & \frac{1}{\sqrt{2}} \; (|n, \downarrow\rangle \otimes |m, \downarrow\rangle \; - \; |m, \downarrow\rangle \otimes |n, \downarrow\rangle) \end{array} \right.$$

   y demostrar que el conjunto de estados $| \;\; \rangle_f$ es ortonormal. ¿Hay estados antisimétricos aparte de los que acabamos de definir?

   b) Supongamos ahora que en vez de fermiones de espín 1/2 tuviéramos fermiones de espín 3/2, ¿que cambiaría en ese caso?

3. Consideremos ahora un sistema de N partículas idénticas de espín 3/2 en el que podemos despreciar el efecto de la interacción entre partículas.

a) Supongamos que dichas partículas están sometidas al potencial del oscilador armónico. Calcular la energía del estado fundamental y la energía de Fermi.

b) Calcular lo mismo para el caso en el que dichas partículas estén constreñidas a moverse en una caja de lado L.

4. Supongamos que tenemos un sitema de 2 partículas idénticas de espín 1/2 que se mueven en una dimensión en un pozo infinito de longitud L sin interaccionar entre sí.

a) Escribir la función de ondas del estado fundamental en el caso en el que la parte de espín sea simétrica.

b) Escribir la función de ondas del estado fundamental en el caso en el que la parte de espín sea antisimétrica.

c) Suponer ahora que las dos partículas interaccionan débilmente entre sí via una perturbación de la forma:

$$V = -\lambda \delta(x_1 - x_2)\,, \qquad \lambda > 0$$

Utilizando teoría de perturbaciones, discutir qualitativamente como cambiarían los niveles de energía bajo la influencia de dicha perturbación.

5. Consideremos ahora un sitema de N partículas idénticas de espín 1, que no interaccionan entre ellas.

a) Suponiendo que la parte espacial de la función de ondas es simétrica bajo el intercambio de partículas discutir que forma toma la parte de espín en los casos: i) las tres partículas tienen m_s=+1, ii) dos partículas tienen $m_s = +1$ y una m_s=0 y iii) todas tienen un valor diferente de m_s. Calcular el espín total final en todos los casos.

b) Discutir lo que pasaría si la parte espacial de la función de ondas fuera antisimétrica.