Métodos Matemáticos de la Física Teórica: Hoja de ejercicios n^o 1.

A entregar el día 23 de abril de 2013.

1: ¿Cuáles de los siguientes son grupos? Si no lo son, ¿por qué razón no lo son?

d) El conjunto de vectores sobre $\mathbb{R}^3$ con la multiplicación definida por el producto exterior.

e) El conjunto de mapas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$f(z) \equiv \frac{a\ z + b}{c\ z + d} \quad \text{con:} \quad ad - bc = 1 \ \text{ y } \ a, b, c, d \in \mathbb{C} \,, \tag{1}$$

la multiplicación es la composición de mapas, es decir que dado dos mapas f y g, la composición $g \circ f$ es definido como $(g \circ f)(z) = g(f(z))$.

f) El conjunto de matrices $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$ y determinante 1, con la multiplicación siendo la multiplicación de matrices. A este conjunto se le conoce como $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{Z})$.
Pista: ¿Cuál es la relación entre la matriz de adjuntos de una matriz A y la inversa de A?

2: Considerad el grupo simétrico Sym(3).

a) Construid la tabla de Cayley,

b) Hallad las clases de conjugación.

3: Considerad el grupo diedral $\mathrm{D}_3 = \left\{ \ \mathrm{a}, \mathrm{b} \mid \mathrm{a}^3 = \mathrm{b}^2 = (\mathrm{ba})^2 = \mathrm{e} \ \right\}$.

a) Construid la tabla de Cayley para el grupo,

b) Hallad las clases de conjugación.

4: Demostrad que $\mathrm{D}_2 \simeq \mathrm{Sym}(2)$ y $\mathrm{D}_3 \simeq \mathrm{Sym}(3)$.

5: Demostrad que $\mathrm{Sl}(2; \mathbb{R}) \simeq \mathrm{Sp}(1; \mathbb{R})$.

6: Demostrad que cualquier elemento del grupo matricial $\mathrm{SU}(1,1)$ se puede escribir como

$$M(\varphi, \psi, \eta) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi}\cosh(\eta) & e^{i\psi}\sinh(\eta) \\ e^{-i\psi}\sinh(\eta) & e^{-i\varphi}\cosh(\eta) \end{pmatrix}$$

Vemos pues que $\mathrm{SU}(1,1)$ es un grupo de dimensión 3, pero ¿es un grupo compacto? ¿Es conexo? Si no es conexo, ¿cuantas componentes conexas tiene $\mathrm{SU}(1,1)$?

Considerad el conjunto de matrices $\mathcal{S} = \{M(\varphi, 0, 0)\}$. Demostrad que $\mathcal{S}$ es un subgrupo abeliano de $\mathrm{U}(1,1)$ que es isomorfo a $\mathrm{U}(1)$: lo que acabáis de demostrar lo abreviaremos como $\mathrm{U}(1) \subset \mathrm{SU}(1,1)$.

Demostrad que $\mathrm{SO}_0(1,1) \subset \mathrm{SU}(1,1)$. ¿Es $\mathrm{SO}(1,1)$ también un subgrupo?