Métodos Matemáticos de la Física Teórica: Hoja de ejercicios n^o 2.

A entregar el día 29 de abril de 2013.

2: Considerad el grupo $\mathrm{SU}(n)$ $(n \geq 3)$ y demostrad que la aplicación $\phi : \mathrm{SU}(n) \to \mathrm{SU}(n) : U \mapsto U^\star$ es un automorfismo.

1: Dados dos números enteros no nulos p y q, demostrad que $\mathbb{Z}_p \triangleleft \mathbb{Z}_{pq}$ y que $\mathbb{Z}_{pq}/\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}_q$.

3: Dado el grupo $\mathrm{G} \times \mathrm{H}$, demostrad que $\mathrm{G} \triangleleft (\mathrm{G} \times \mathrm{H})$ y que $(\mathrm{G} \times \mathrm{H})/\mathrm{G} \simeq \mathrm{H}$.

4: En clase vimos que $\mathrm{SO}(3) \simeq \mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$ y ya que $\mathrm{SO}_0(1,3)$ contiene a $\mathrm{SO}(3)$ como subgrupo y tiene cierta relevancia para la física moderna, la pregunta obvia es si también $\mathrm{SO}_0(1,3)$ tiene una estructura de grupo de factores.

Para encontrar la respuesta:

a) Considerad la clase de matrices hermíticas $\mathcal{H} = \left\{X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid X^\dagger = X\right\}$: demostrad que una base para estas matrices viene dada por las cuatro matrices

$$\sigma_0 = \mathrm{diag}(1,1) \; , \; \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; , \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; , \; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; .$$

Podemos, pues, descomponer cualquier matriz hermítica $X \in \mathcal{H}$ como $X = x^\mu \, \sigma_\mu$ $(\mu = (0,1,2,3))$ con $x^\mu \in \mathbb{R}$.

b) Demostrad que

$$\mathrm{Tr}\,(\sigma_\mu \sigma_\nu) = 2\delta_{\mu\nu} \;\text{ y que }\; \det(X) = x^\mu \, \eta_{\mu\nu} \, x^\nu \; .$$

c) Demostrad que la clase de transformaciones $X \to X' = (MXM^\dagger) \in \mathcal{H}$ que dejan invariante $\det(X)$ forman el grupo $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{Sl}(2;\mathbb{C})$. Al igual que en clase ignoraremos el factor $\mathrm{U}(1)$ y tomaremos $M \in \mathrm{Sl}(2;\mathbb{C})$.

d) Si escribimos $M\sigma_\mu M^\dagger = \sigma_\nu \; \Lambda^\nu{}_\mu$, entonces el resultado del apartado a) indica que la matriz $\Lambda \in \mathrm{O}(1,3)$. Demostrad que de hecho $\Lambda \in \mathrm{SO}_0(1,3)$.

e) Demostrad que la aplicación

$$\phi \; : \; \mathrm{Sl}(2;\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}_0(1,3) \; : \; M \;\mapsto\; \Lambda^\mu{}_\nu \;=\; \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\sigma_\mu M \sigma_\nu M^\dagger\right) \; ,$$

es un homomorfismo.

f) Determinad el núcleo de ϕ.