Mecánica Teórica: Hoja de ejercicios n^o 1.

A entregar el día 10 de octubre de 2012.

1. Dadas las siguientes fuerzas $\vec{F}$, hallad la energía potencial correspondiente:

$$\texttt{a)}\ \vec{F} \ = \ -\kappa\, \vec{e}_3 \ , \qquad \texttt{b)}\ \vec{F} \ = \ -\kappa\, \vec{r} \ , \qquad \texttt{c)}\ \vec{F} \ = \ -\tfrac{\kappa}{r^3}\, \vec{r} \ , \qquad \texttt{d)}\ \vec{F} \ = \ \vec{r} \times \vec{d}\ ,$$

donde κ es una constante, $\vec{d}$ es un vector constante, y $r = \sqrt{\vec{r}^2}$.

2. Demostrad que la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) \ - \ \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_\alpha} \ = \ \mathrm{Q}_\alpha \ ,$$

se puede escribir de la siguiente forma, llamada la forma de Nielsen,

$$\frac{\partial \dot{\mathrm{T}}}{\partial \dot{q}_\alpha} \ - \ 2\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_\alpha} \ = \ \mathrm{Q}_\alpha \ .$$

3. Considerad el sistema de una partícula con una energía potencial dado por

$$V \ = \ -\mathrm{q}\ \vec{v} \cdot \vec{A} \qquad \text{donde} \quad \vec{A} \ = \ \vec{A}(x) \ .$$

Usad la definición $\vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}$ para demostrar que las ecuaciones de movimiento derivadas de la ecuación de Euler-Lagrange son

$$\dot{\vec{p}} \ = \ \mathrm{q}\ \vec{v} \times \vec{B} \ .$$

4. Considerad una partícula de masa m que siente dos fuerzas, la atracción gravitatoria $\vec{F} \ = \ -mg\ \vec{e}_3$ y una fuerza dependiente de la velocidad que se puede derivar de la siguiente función de disipación de Rayleigh[1] $\mathcal{F} = \frac{\kappa}{2}\vec{v}^2$. Demostrad que si la velocidad inicial es cero, la velocidad máxima de la partícula viene dada por

$$\vec{v}_{max} \ = \ -\frac{mg}{\kappa}\ \vec{e}_3 \ .$$

[1] Observad que $[\kappa] = \mathrm{g\ s}^{-1}$.