Tema 2: Principios variacionales y ecuaciones de Lagrange

Boletín de problemas

1- Supongamos que tenemos un conjunto de coordenadas generalizadas q_1, q_2,..., q_n que describen un sistema con n grados de libertad y Lagrangiano $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Consideremos ahora que efectuamos una transformación de coordenadas a un nuevo conjunto de coordenadas generalizadas independientes s_1, s_2,.., s_n mediante las siguientes ecuaciones de transformación

$$q_i = q_i(s_1, \cdots, s_n)$$

Demostrar que, si expresamos el Lagrangiano como función de las nuevas coordenadas s_i a través de las ecuaciones de transformación $q_i = q_i(s_1, \cdots, s_n)$, entonces las ecuaciones de Lagrange toman la forma:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0$$

y por tanto permanecen invariantes bajo transformaciones de coordenadas.

2- Utilizando el cálculo de variaciones demostrar que las curvas geodésicas sobre una esfera (las que determinan la distancia mínima entre dos puntos) son aquellas que unen dos puntos de forma que el centro del círculo que une ambos puntos está colocado en el centro de la esfera.

3- El término Mecánica Generalizada se suele reservar para los casos en el que el Lagrangiano contiene derivadas con respecto al tiempo de las coordenadas generalizadas q_i de ordenes superiores a uno: $\dot{q}_i$, $\ddot{q}_i$, ... Aplicando las técnicas del cálculo variacional probar que si el principio de Hamilton se satisface para un lagrangiano $L = L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$ entonces las ecuaciones de Lagrange se modifican de la siguiente manera:

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Aplicar este resultado al Lagrangiano $L = -\frac{m}{2}q\ddot{q} - \frac{1}{2}kq^2$. Identificar a que sistema físico corresponden las ecuaciones del movimiento resultantes.

Nota: los alumnos que quieran que cuente para la nota del parcial deberán entregar las soluciones como muy tarde el día 4 de octubre antes de comenzar la clase.