Mecánica Teórica: Hoja de ejercicios n$^{\underline{o}}$ 3.

A entregar el día 28 de noviembre de 2012.

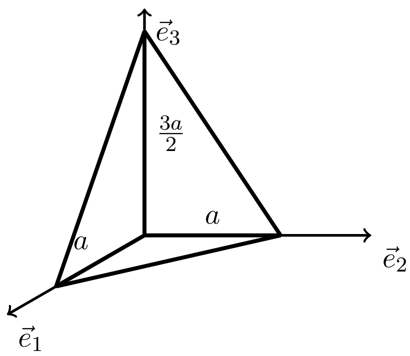
1. En clase demostramos el teorema de Euler usando el hecho de que cualquier rotación en tres dimensiones, R, tenía un autovalor 1, lo cual implica la existencia de un vector ω tal que $R\omega = \omega$. A la misma conclusión se puede llegar usando las rotaciones infinitesimales, pero ¿cuál es el argumento?

2. Suponed que estamos tratando un problema de un solido rígido no en 3 sino en 2 dimensiones y que además los sistemas de ejes no son Cartesianos pero satisfacen las siguientes normalizaciones: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \eta_{ij}$ y $\vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j{}' = \eta_{ij}$, donde η es una matriz diagonal con $\eta_{11} = 1$ y $\eta_{22} = -1$. ¿Podemos relacionar los dos sistemas de ejes como $\vec{e}_i{}' = \vec{e}_j\ R_{ji}$? Si la respuesta es afirmativa, hallad la forma mas general de las matrices R y de las transformaciones infinitesimales.

3. En 2009 un francotirador del ejercito Inglés estableció el actual récord mundial al acertar en un blanco que se situaba a 2.475 m. El francotirador se encontraba en un lugar del mundo donde $\theta = 56^o$ y al salir del rifle la bala se movía a 936 ms^{-1}. Estimad la desviación horizontal debida a la fuerza de Coriolis ignorando la gravedad y la fricción, pero asumiendo que disparaba hacia el Norte.

4. En clase definimos el vector de velocidad angular, $\vec{\omega}$, mediante la identidad matricial $R^{-1}\dot{R} \equiv \vec{\omega} \cdot \vec{J}$. Usad la expresiń de la matriz de rotación en términos de los ángulos de Euler para hallar $\vec{\omega}$.

5. Considerad el siguiente solido rígido con forma pirámidal, cuya densidad de masa es constante, es decir que $\rho(\vec{r}) = \rho_0$.



   a) Demostrad que la masa total contenida en el solido rígido viene dada por

$$M = \int dV\ \rho(\vec{r}) = \int_0^{3a/2} dz \int_0^{a-2z/3} dy \int_0^{a-y-2z/3} dx\ \rho_0 = \frac{\rho_0 a^3}{4}\ . \qquad (1)$$

eq:2

   b) Calculad las siguientes componentes del tensor de inercia: I_{12} y I_{33}.

c) El tensor de inercia completo es

$$I \;=\; \frac{Ma^2}{40} \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 13 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix} \;\equiv\; \frac{Ma^2}{40}\; \hat{I}\ . \tag{2}$$ eq:3

A ojo se ve que

$$\vec{E}_1 \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\;(\;\vec{e}_1 \;-\; \vec{e}_2\;)\ , \tag{3}$$ eq:4

es un eje principal de rotación. ¿Cuales son los otros dos ejes principales de rotación? Normalizad los ejes tal que $\vec{E}_i \cdot \vec{E}_j = \delta_{ij}$ y que satisfaga $\vec{E}_i \times \vec{E}_j = \varepsilon_{ijk}\, \vec{E}_k$, es decir que el sistema de ejes principales satisfaga el convenio de la mano derecha.

d) ¿Cuál es la forma del tensor de inercia con respecto a los ejes principales de rotación?