

2º Parcial de Mecánica Cuántica, curso 2011/12
Miércoles 16/05/2012, Aula S03, 9:30

1: [2 puntos] Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) Supongamos que tenemos un hamiltoniano H_0 y sus correspondientes autoestados de energía $|E_n^{(0)}\rangle$. Si consideramos una pequeña perturbación por medio de un hamiltoniano $H_1 = V$ que no depende del tiempo, los autovalores de energía de estados no-degenerados vienen dados, a primer orden en teoría de perturbaciones, por $E_n = E_n^{(0)} + \langle E_n^{(0)} | V | E_n^{(0)} \rangle$.
- b) El método variacional tiene como punto de partida el hecho de que para cualquier estado normalizado $|\Psi\rangle$, la expresión $\langle \Psi | H | \Psi \rangle$ es mayor o igual que la energía del estado fundamental.
- c) Los estados en la imagen de interacciones $|\Psi\rangle_I$ se obtienen a partir de los estados en la imagen de Schrödinger definiendo $|\Psi, t\rangle_I = \exp\left(-\frac{t}{i\hbar} H_0\right) |\Psi, t\rangle_S$.
- d) Siempre se cumple la siguiente identidad: $\langle \Psi, t | Q | \Psi, t \rangle = {}_I\langle \Psi, t | Q_I(t) | \Psi, t \rangle_I$, donde $Q_I(t)$ es el operador de posición en la imagen de interacciones.
- e) La ecuación de Schrödinger en la imagen de interacciones es $i\hbar\partial_t |\Psi\rangle_I = H |\Psi\rangle_I$, donde $H = H_0 + H_1$ es el hamiltoniano total.
- f) La función de onda correspondiente a n fermiones idénticos es simétrica bajo la permutación de cualquier par de partículas.
- g) La energía de Fermi, E_F , en sistemas fermiónicos a temperatura cero, es aquella energía a partir de la cual los niveles de energía no están completamente ocupados por fermiones.
- h) El principio de exclusión de Pauli no se aplica a partículas de espín 3/2.
- i) El determinante de Slater sirve para construir funciones de onda que son totalmente antisimétricas.
- j) La regla de oro de Fermi aplicada a perturbaciones que no dependen del tiempo, dice que la velocidad de transición de un estado $|E_a\rangle$ a un conjunto de estados con energía $E(= E_a)$ viene dado por

$$\frac{2\pi}{\hbar} \rho(E) |\langle E | H_1 | E_a \rangle|^2,$$

donde $\rho(E)$ es la densidad de estados con energía E .

2: [4 puntos] Consideremos el oscilador armónico isotrópico en tres dimensiones:

$$H_0 = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + \frac{P_3^2}{2m} + \frac{mw^2}{2}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \quad (1)$$

- a) ¿Hay alguna degeneración en las energías de los estados con autovalores mas bajos? Comprobarlo para el estado fundamental y el primer estado excitado.

b) Consideremos ahora la perturbación

$$V = \lambda X_1 X_2 X_3^2.$$

Encontrar la variación de energía a primer orden en teoría de perturbaciones tanto para el estado fundamental como para el primer estado excitado. ¿Rompe la perturbación la degeneración existente (en los casos en los que dicha degeneración exista)?

c) Discutir el efecto de la perturbación en los autoestados de la energía, ¿cuál es la base de autoestados en la teoría perturbada? ¿Rompe la perturbación la degeneración existente (en los casos en los que dicha degeneración exista)?

Pista: Utilizar para la resolución del problema el siguiente resultado:

$$\langle n' | X_i | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n+1} \delta_{n',n+1} + \sqrt{n} \delta_{n',n-1})$$

3: [4 puntos] Consideremos un oscilador armónico cuántico con frecuencia ω . A partir de $t = 0$ le aplicamos la siguiente perturbación

$$H_1 = \hbar\lambda e^{it\omega} A + \hbar\lambda e^{-it\omega} A^\dagger.$$

Como sabemos, los estados coherentes $|z\rangle$ ($z \in \mathbb{C}$) son estados normalizados de incertidumbre mínimo, con lo cual son las mejores aproximaciones al movimiento clásico, y satisfacen

$$A |z\rangle = z |z\rangle \quad \longrightarrow \quad |z\rangle = e^{-|z|^2/2} e^{zA^\dagger} |0\rangle.$$

Vamos a investigar ahora la influencia de la perturbación sobre los estados coherentes, diciendo que en $t = 0$ el sistema se halla en un estado coherente con $z = i\mu$, es decir $|\Psi, 0\rangle = |i\mu\rangle$.

a) Utilizar la definición

$$A \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} P - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} Q,$$

para expresar H_1 en términos de los operadores P y Q y calcular $\langle Q \rangle(t=0)$.

b) Calcular el hamiltoniano de interacciones H_I .

c) Considerando

$$|\Psi, t\rangle_I = e^{\xi(t)} e^{\beta(t) A^\dagger} |0\rangle,$$

como solución de prueba para el estado en la imagen de interacciones para $t > 0$, resolver la ecuación de Schrödinger en la imagen de interacciones para hallar el estado $|\Psi, t\rangle_I$.

d) ¿Es el estado $|\Psi, t\rangle_I$ un estado coherente?

Pista: Calculad $A |\Psi, t\rangle_I$.

e) Calculad el valor de expectación del operador de posición Q para $t > 0$.

f) Calculad la energía total, $E = \langle H_0 + H_1 \rangle$, de la solución.