UNIVERSIDAD DE OVIEDO
Departamento de Física

Apellidos y Nombre				D.N.I./ Nº Matrícula
Asignatura	Curso	Grupo		Fecha
Centro	HOJA......... DE...........			Calificación

2) a) El sistema se descompone en tres copias del oscilador armónico unidimensional

$$H_0 = \sum_{i=1}^{3} \frac{P_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} X_i^2 = \sum_{i=1}^{3} \hbar\omega\left(N_i + \frac{1}{2}\right)$$

donde $N_i = A_i^+ A_i$ .. los estados son entonces autoestados de energía son.

$|n_1, n_2, n_3\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_3\rangle$ con $\boxed{H_0 |n_1, n_2, n_3\rangle = \hbar\omega\left(\sum n_i + \frac{3}{2}\right) |n_1, n_2, n_3\rangle}$

Esta claro que todos los estados salvo el estado fundamental estan degenerado.

$\Rightarrow$ Estado fund. $|0,0,0\rangle$ con energía $E_{000} = \hbar\omega \cdot \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ Primer nivel tiene degeneración triple.

$$\left.\begin{aligned} |1,0,0\rangle &\rightarrow E_{100} = \tfrac{5}{2}\hbar\omega \\ |0,1,0\rangle &\rightarrow E_{010} = \tfrac{5}{2}\hbar\omega \\ |0,0,1\rangle &\rightarrow E_{001} = \tfrac{5}{2}\hbar\omega \end{aligned}\right\}$$

El grado de degeneración es 3.

$$\boxed{\deg\left(\frac{5\hbar\omega}{2}\right) = 3.}$$

b) Dado la perturbación V para estados no-degenerados tenemos a primer orden en TdP que

$$E_n = E_n^{(0)} + \langle E_n^{(0)} | V | E_n^{(0)} \rangle$$ en este caso para el estado

fundamental $\begin{cases} E_n^{(0)} = E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega \\ |E_{(n)}^{(0)}\rangle = |0,0,0\rangle \end{cases}$

Apellidos y Nombre				D.N.I./ Nº Matrícula
Asignatura	Curso	Grupo	Fecha	
Centro	HOJA......... DE...........		Calificación	

UNIVERSIDAD DE OVIEDO
Departamento de Física

$$\Rightarrow \quad E_{000} = \frac{3}{2}\hbar\omega + \lambda\langle 0,0,0 | X_1 X_2 X_3^2 | 0,0,0\rangle$$

$$= \frac{3}{2}\hbar\omega + \lambda\langle 0|X_1|0\rangle \cdot \langle 0|X_2|0\rangle \cdot \langle 0|X_3^2|0\rangle$$

Okay: $\underset{n'}{\langle 0|}X_1\underset{n}{|0\rangle} = \text{pista} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cdot \left(\sqrt{n+1}\,\underbrace{\delta_{n',n+1}}_{\Downarrow} + \sqrt{n}\,\underset{\Downarrow}{\delta_{n',n-1}}\right)$

$$\delta_{0,1} = 0 \qquad \delta_{0,-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\langle 0|X_1|0\rangle = 0}$$

Con lo cual $E_{000} = \frac{3}{2}\hbar\omega$ no hay contribución a la energía debido a la perturbación.

- para los estados degenerados tenemos que calcular los autovalores de la matriz

$$\begin{pmatrix} \langle 100|V|100\rangle & \langle 100|V|010\rangle & \langle 100|V|001\rangle \\ \langle 010|V|100\rangle & \langle 010|V|010\rangle & \langle 010|V|001\rangle \\ \langle 001|V|100\rangle & \langle 001|V|010\rangle & \langle 001|V|001\rangle \end{pmatrix}$$

y estos autovalores nos darían la contribución a 1er orden en TdP a la energía $E^{(0)} = \frac{5}{2}\hbar\omega$.

Ya que $\quad \langle n|X|n\rangle = \text{pista} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\,\underbrace{\delta_{n,n+1}}_{=0} + \sqrt{n}\,\underbrace{\delta_{n,n-1}}_{=0}\right) = 0$

y $\quad \langle n, m, \ell|V|n', m', \ell'\rangle = \lambda \langle n|X_1|n'\rangle\langle m|X_2|m'\rangle\langle \ell|X_3^2|\ell'\rangle$

vemos que: $\quad \langle 100|V|100\rangle = \langle 010|V|010\rangle = \langle 001|V|001\rangle = 0$

$$\langle 010|V|001\rangle = 0 = \langle 100|V|001\rangle$$

y

$$\langle 100|V|010\rangle = \lambda\,\langle 1|X_1|0\rangle\langle 0|X_2|1\rangle\langle 0|X_3^2|0\rangle$$

$$\Rightarrow \langle 1|X_1|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{1}\,\delta_{1,1} + 0\,\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\delta_{1,-1}}}\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$\xrightarrow{\text{automatico}} \langle 0|X_2|1\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$\langle 0|X_3^2|0\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle 0|X_3|k\rangle\langle k|X_3|0\rangle = \left(\begin{array}{c}\text{solo contribuye} \\ k=1\end{array}\right.$$

$$= \langle 0|X_3|1\rangle\langle 1|X_3|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cdot\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$\to \quad \langle 100|V|\cancel{1}010\rangle = \lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2$

$$\langle 010|V|100\rangle = \overline{\langle 100|V|010\rangle} = \lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2$$

Apellidos y Nombre												D.N.I./ Nº Matrícula	
Asignatura										Curso	Grupo	Fecha	
Centro										HOJA.......... DE............		Calificación	

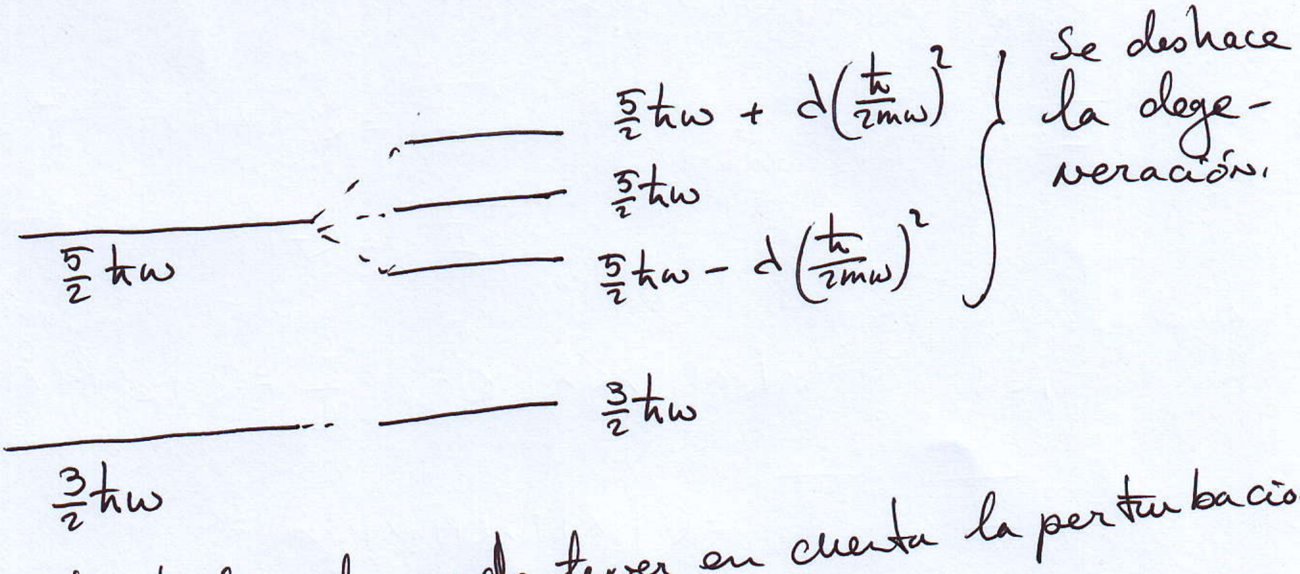
UNIVERSIDAD DE OVIEDO
Departamento de Física

Con lo cual la matriz cuyos autovalores nos dan la corrección de energías es

$$d\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y sus autovalores son $E^{(1)} = 0, \pm d\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2$

gráficamente tenemos



c) los autoestados después de tener en cuenta la perturbación son

→ Estado fundamental $|000\rangle$

→ $E_1^+ = \frac{5}{2}\hbar\omega + d\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \rightarrow |E_1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|100\rangle + |010\rangle\right)$

→ $E_1^0 = \frac{5}{2}\hbar\omega \rightarrow |E_1^0\rangle = |001\rangle$

$E_0^- = \frac{5}{2}\hbar\omega - d\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \rightarrow |E_1^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|100\rangle - |010\rangle\right)$

Estos son los autoestados de $H_0 + V$.

"El osilador armónico Mareado"

3)

UNIVERSIDAD DE OVIEDO
Departamento de Física

Apellidos y Nombre			D.N.I./ Nº Matrícula
Asignatura	Curso	Grupo	Fecha
Centro	HOJA..........	DE............	Calificación

$$H_0 = \hbar\omega\left(N + \tfrac{1}{2}\right)$$ osc. armónico

$$H_1 = \hbar\lambda\, e^{it\omega} A + \hbar\lambda\, e^{-it\omega} A^+$$

at $t=0$ the system is in a coherent state

$$|\psi,0\rangle = |z\rangle \quad \begin{cases} |z\rangle = e^{-|z|^2/2}\, e^{zA^+}|0\rangle \\ A|z\rangle = z|z\rangle \end{cases}$$

And we choose $z = i\mu$

a) as then $\langle\psi,0|Q|\psi,0\rangle = -\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\mu$

Vean el apartado e) o Ejercicio 3 del 3er hoja de ejercicios.

We will try to find an exact solution to this problem using the interaction picture:

$$i\hbar\,\partial_t|\psi\rangle_I = H_I|\psi\rangle_I$$

→ Calc. H_I:

b) $$H_I \equiv e^{-\frac{t}{i\hbar}H_0} H_1\, e^{\frac{t}{i\hbar}H_0} = e^{it\omega N} H_1\, e^{-it\omega N}$$

$$= \hbar\lambda\, e^{it\omega}\, e^{it\omega N} A\, e^{-it\omega N} + \hbar\lambda\, e^{-it\omega}\, e^{it\omega N} A^+ e^{-it\omega N}$$

$$e^{it\omega N} A\, e^{-it\omega N} = A\, e^{it\omega(N-1)}\, e^{-it\omega N} = A e^{-it\omega}$$

$$\left[\begin{array}{l} [N,A] = -A \Rightarrow \\ NA = A(N-1) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow f(N)A = Af(N-1)$$

$$\Rightarrow e^{it\omega N} A^+ e^{-it\omega N} = A^+ e^{it\omega}$$

$$\Rightarrow \quad H_I = \hbar\lambda e^{it\omega} A e^{-it\omega} + \hbar\lambda e^{-it\omega} A^\dagger e^{it\omega}$$

$$\boxed{H_I = \hbar\lambda A + \hbar\lambda A^\dagger}$$

c)

Make the ansatz. $|\psi\rangle_I = e^{\xi} e^{\beta A^\dagger}|0\rangle$

$$\left.\begin{aligned} \beta(0) &= z = i\mu \\ \xi(0) &= -|z|^2/2 = -\mu^2/2 \end{aligned}\right\} \quad \underline{\text{Relevant B.C.}}$$

$$i\hbar\partial_t|\psi\rangle_I = i\hbar(\dot\xi + \dot\beta A^\dagger)|\psi\rangle_I$$

$$H_I|\psi\rangle_I = \hbar\lambda A|\psi\rangle_I + \hbar\lambda A^\dagger|\psi\rangle_I$$

but $A|\psi\rangle_I = \beta[A, A^\dagger]|\psi\rangle_I = \beta|\psi\rangle_I \rightarrow$ $|\psi\rangle_I$ is a coherent state and normalized to 1. ~~if you~~ at $t=0$. ~~and for all t~~ if you satisfy the S-eq.

$$\hookrightarrow \quad H_I|\psi\rangle_I = \hbar\lambda\beta|\psi\rangle_I + \hbar\lambda A^\dagger|\psi\rangle_I$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} i\hbar\dot\xi &= \hbar\lambda\beta \\ i\hbar\dot\beta &= \hbar\lambda \end{aligned} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot\xi &= -i\lambda\beta \\ \dot\beta &= -i\lambda \end{aligned}} \rightarrow \begin{aligned} &\beta = \beta(0) - i\lambda t \\ &\boxed{\beta = i(\mu - \lambda t)} \end{aligned}$$

$$\dot\xi = -i\lambda \cdot i(\mu - \lambda t) = \lambda\mu - \lambda t$$

$$\Rightarrow \quad \xi = \xi(0) + \lambda\mu t - \frac{\lambda}{2}t^2 = -\frac{\mu^2}{2} + \lambda\mu t - \frac{\lambda}{2}t^2 = -\frac{1}{2}(\mu - \lambda t)^2$$

d)

$$\boxed{\xi(t) = -\frac{1}{2}(\mu - \lambda t)^2} \rightarrow \boxed{|\psi, t\rangle_I \text{ is a coherent state.}}$$

ya que es de la forma $|z\rangle = e^{-|z|^2/2} e^{zA^\dagger}|0\rangle$

UNIVERSIDAD DE OVIEDO
Departamento de Física

Apellidos y Nombre			D.N.I./ Nº Matrícula
Asignatura	Curso	Grupo	Fecha
Centro	HOJA.......... DE............		Calificación

a)

$$\langle Q\rangle = {}_I\langle\psi| Q_I |\psi\rangle$$

$$\cancel{Q = i\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(} \qquad A - A^+ = -2i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,Q$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(A - A^+)}$$

$$Q_I = e^{-\frac{t}{i\hbar}H_0}\, Q\, e^{\frac{t}{i\hbar}H_0}$$

$$= i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{ e^{it\omega N}(A - A^+)\, e^{-it\omega N}\right.$$

$$= i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(A e^{-it\omega} - A^+ e^{it\omega}\right)$$

$$\Rightarrow {}_I\langle\psi| Q_I |\psi\rangle_I = i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\; {}_I\langle\psi| A |\psi\rangle_I\, e^{-it\omega} + c.c.$$

$$A|\psi\rangle_I = \beta|\psi\rangle_I = i(\mu - \lambda t)|\psi\rangle_I$$

$$= -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\mu - \lambda t)\, e^{-it\omega} + c.c.$$

$$\boxed{\langle Q\rangle(t) = -\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(\mu - \lambda t)\cos(\omega t)} \Leftarrow$$

UNIVERSIDAD DE OVIEDO
Departamento de Física

Apellidos y Nombre			D.N.I./ Nº Matrícula
Asignatura	Curso	Grupo	Fecha
Centro	HOJA......... DE...........		Calificación

$$H^* = H_0 + H_1$$

f) $E^{(t)} = \langle H^* \rangle = {}_I\langle \psi,t|\, H^*_I \,|\psi,t\rangle_I$

$$= {}_I\langle \psi,t|\, H_0 + H_I \,|\psi,t\rangle_I = {}_I\langle \psi,t|\, \underset{②}{H_0} \,|\psi,t\rangle_I + {}_I\langle \psi,t|\, \underset{①}{H_I} \,|\psi,t\rangle_I$$

$$① = \hbar\lambda\, {}_I\langle \psi,t| A |\psi,t\rangle_I + \hbar\lambda \langle \psi,t| A^\dagger |\psi,t\rangle_I$$

$$= 2\hbar\lambda\, \mathrm{Re}\left({}_I\langle \psi,t| A |\psi,t\rangle_I \right)$$

But $A|\psi,t\rangle_I = \beta|\psi,t\rangle_I$

$$= 2\hbar\lambda\, \mathrm{Re}(\beta) = 0 \quad \text{ya que} \quad \beta = i(\mu - \lambda t)$$

$$② = \hbar\omega\left({}_I\langle \psi,t| N |\psi,t\rangle + \tfrac{1}{2} \right)$$

$\Rightarrow \quad N = A^\dagger A$

$$= \hbar\omega\left({}_I\langle \psi,t| A^\dagger A |\psi,t\rangle_I + \tfrac{1}{2} \right)$$

$\leftrightarrow$ $A|\psi,t\rangle_I = \beta|\psi,t\rangle_I$, ${}_I\langle \psi,t| A^\dagger = \bar{\beta}\, {}_I\langle \psi,t|$

$$= \hbar\omega\left(|\beta|^2 + \tfrac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E(t) = \hbar\omega\left((\mu - \lambda t)^2 + \tfrac{1}{2} \right)}$$