Documento

3/02

HISPALINK-ASTURIAS

Documentos de trabajo

# LA MEDIDA DE INQUIETUD DOBLE CUADRÁTICA Y SUS APLICACIONES ECONÓMICAS

Mercedes Alvargonzález Rodríguez

Ana Jesús López Menéndez

Rigoberto Pérez Suárez

**DOCUMENTO DE TRABAJO 3/02- (Diciembre 2002)**

Han participado en la elaboración de este documento de trabajo:

Mercedes Alvargonzález Rodríguez

Ana Jesús López Menéndez

Rigoberto Pérez Suárez

**Depósito Legal: AS-5297-2002**

# LA MEDIDA DE INQUIETUD DOBLE CUADRÁTICA
# Y SUS APLICACIONES ECONÓMICAS

| ÍNDICE DE CONTENIDOS | Página |
|---|---|

## LA MEDIDA DE INQUIETUD DOBLE CUADRÁTICA Y SUS APLICACIONES ECONÓMICAS

### 1.- INTRODUCCIÓN

Las medidas de información proporcionan un contexto adecuado para el tratamiento de ciertos problemas económicos como la concentración industrial, la desigualdad de la renta, el estudio de la dependencia estadística, el análisis de regresión o la evaluación de predicciones.

En este trabajo se realiza una breve introducción a las medidas de información, incluyendo indicadores de incertidumbre, de incertidumbre útil y de inquietud. Entre ellas destacamos por su interés la familia de medidas de orden $\beta$, y especialmente un caso particular de esta familia especialmente relevante por sus propiedades y sus aplicaciones económicas: el caso $\beta=2$, que da lugar a las medidas de tipo cuadrático.

En el tercer apartado se introduce la medida de inquietud doble cuadrática, que se define a partir de dos medidas de la familia de indicadores de orden $\beta$, y se estudian sus principales propiedades, analizando sus aplicaciones en el ámbito de la desigualdad de renta.

El cuarto epígrafe del trabajo aborda la relación entre desigualdad doble cuadrática y crecimiento económico mediante el planteamiento de la U invertida propuesto por S. Kuznets (1955) y siguiendo el enfoque analítico de S. Anand y S.M.R. Kanbur (1993).

Finalmente se realiza una aplicación para ciertos países del ámbito latinoamericano utilizando tanto datos de corte transversal como en serie temporal y muestras de panel para el período 1950-2000.

## 2.- MEDIDAS DE INFORMACIÓN, INCERTIDUMBRE E INQUIETUD

El primer autor que introdujo el concepto de incertidumbre o falta de certeza fue C.E. Shannon (1948), asociando a una variable aleatoria X que toma valores $x_i$ con probabilidades $p_i$, i=1,..., M ($p_i \geq 0 \ \forall i;\ \sum_{i=1}^{M} p_i = 1$) la medida de incertidumbre:

$$H(X) = H(p_1,\dots,p_M) = -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 p_i$$

Esta medida permite resolver problemas de reducción del tiempo de transmisión de mensajes, proporcionando además relevantes aplicaciones estadísticas como el estudio de la suficiencia de los estimadores, la determinación del tamaño muestral óptimo, los contrastes de hipótesis o el análisis de la dependencia.

A pesar de sus indudables ventajas, la entropía de Shannon presenta el inconveniente de no considerar todos los factores que contribuyen a la indeterminación de una población, puesto que depende únicamente de las probabilidades de los valores. Por esta razón M. Belis y S. Giasu (1968) proponen una medida que incorpora utilidades en términos absolutos. Posteriormente P. Gil (1974) introduce una medida de incertidumbre útil en la que aparecen utilidades en términos relativos y M.A. Gil (1979, 1981) propone otra medida de incertidumbre útil y una incertidumbre debida únicamente a las utilidades o inquietud.

Algunos autores como como A. Rényi (1961) y J. Havrda y F. Charvát (1967) han propuesto medidas generalizadas de información, destacando por su interés las medidas de orden β para la incertidumbre, la incertidumbre útil y la inquietud. Así, J. Havrda y F. Charvát (1967) definen la familia de medidas de incertidumbre de orden β (β>0, β≠1) como el valor de la expresión:

$$H^{\beta}(X) = H^{\beta}(p_1,\dots,p_M) = \frac{1}{2^{1-\beta}-1}\sum_{i=1}^{M}\left(p_i^{\beta} - p_i\right)$$

que, en el caso de que β tienda a 1, conduce a la entropía de Shannon.

Con el objetivo de disponer de una medida de incertidumbre que contemple las utilidades se define la incertidumbre útil de orden $\beta$ ($\beta \neq 1,\ \beta > 0$) como el valor de la expresión:

$$HU^{\beta}(X)=HU^{\beta}(p_1,...,p_M,u_1,...,u_M)=\frac{1}{2^{1-\beta}-1}\sum_{i=1}^{M}p_i\left[p_i^{\beta-1}-\left(\frac{u_i}{E(u)}\right)^{1-\beta}\right]$$

A partir de la incertidumbre de orden β y de la incertidumbre útil de orden β se obtiene por diferencia una medida de inquietud de orden β que recoge únicamente la incertidumbre debida a las utilidades:

$$HU^{*\beta}(X)=HU^{*\beta}(p_1,...,p_M,u_1,...,u_M)=HU^{\beta}(p_1,...,p_M,u_1,...,u_M)-H^{\beta}(p_1,...,p_M)=$$
$$=\frac{1}{2^{1-\beta}-1}\sum_{i=1}^{M}p_i\left[p_i^{\beta-1}-\left(\frac{u_i}{E(u)}\right)^{1-\beta}\right]-\frac{1}{2^{1-\beta}-1}\sum_{i}\left(p_i^{\beta}-p_i\right)=\frac{1}{2^{1-\beta}-1}\sum_{i=1}^{M}p_i\left[1-\left(\frac{u_i}{E(u)}\right)^{1-\beta}\right]$$

Un caso particular especialmente interesante de la familia de medidas de orden β es el caso β=2, que se corresponde con las medidas cuadráticas cuya relevancia se justifica mediante las siguientes razones:

- Cumplen un gran número de propiedades descriptivas.
- Presentan un buen comportamiento inferencial.
- Son adecuadas conceptualmente para el análisis de diversos problemas (concentración, desigualdad, estudio conjunto de caracteres,...).

La incertidumbre cuadrática es el caso particular β=2, de la incertidumbre de orden β, que se define para una variable X como el valor de la expresión:

$$H^2(X)=H^2(p_1,...,p_M)=2\left(1-\sum_{i=1}^{M}p_i^2\right)$$

Las propiedades de este indicador fueron estudiadas, entre otros autores, por Z. Daróczy (1970), J. Aczél y Z. Daróczy (1975), T.N. Bhargava y V.R.R. Uppuluri (1975), A.M. Mathai y P.N. Rathie (1975) y R. Pérez (1985).

De modo análogo, la incertidumbre útil cuadrática se corresponde con el caso particular β=2 de la incertidumbre útil de orden β. En esta medida, cuyas propiedades fueron estudiadas por R. Pérez (1985), se tiene en cuenta, además de las probabilidades asociadas a los valores de la variable, las utilidades de los mismos:

$$HU^2(X)=HU^2(p_1,...,p_M,u_1,...,u_M)=2\sum_{i=1}^{M}p_i\left(\frac{E(u)}{u_i}-p_i\right)$$

A partir de la incertidumbre cuadrática y de la incertidumbre útil cuadrática se define la inquietud cuadrática como una medida debida a las utilidades:

$$HU^{*2}(X) = HU^2(p_1,...,p_M,u_1,...,u_M) - H^2(p_1,...,p_M) = 2\sum_{i=1}^{M} p_i\left(\frac{E(u)}{u_i} - 1\right)$$

Las principales propiedades de esta medida, que fueron estudiadas exhaustivamente por R. Pérez (1985), son las siguientes:

(i) Continuidad.

(ii) Principio de población o independencia del tamaño muestral.

(iii) Simetría o imparcialidad.

(iv) Si no existe incertidumbre sobre el valor que va a asumir la población tampoco existe inquietud cuadrática sobre dicho valor.

(v) Es suficiente considerar aquellos resultados que realmente se verifican.

(vi) La inquietud cuadrática toma un valor no negativo.

(vii) Normalización o minimalidad.

(viii) Invarianza por homotecias.

(ix) Variación ante traslaciones.

(x) Propiedad de ramificación.

(xi) Condición de Pigou-Dalton o principio de transferencias progresivas.

Las medidas tipo Shannon presentan ciertas limitaciones en el estudio de la estimación, puesto que, como pone de manifiesto R. Pérez (1985), no es posible obtener a partir de los estimadores analógicos, estimadores insesgados, debido a la imposibilidad de establecer una relación funcional entre la esperanza del logaritmo y el logaritmo de la esperanza.

R. Pérez (1985) obtiene de forma sistemática estimadores insesgados de la incertidumbre cuadrática y de la inquietud cuadrática tanto en el muestreo con reposición como en el muestreo sin reemplazamiento. El mismo autor obtiene las varianzas de estos estimadores y, puesto que éstas en la práctica no pueden ser calculadas, deduce también la expresión del estimador insesgado de la varianza en ambos tipos de muestreo, analizando la ganancia de precisión asociada al muestreo sin reposición.

El estimador analógico de la incertidumbre cuadrática proporciona mayor precisión, en el sentido de que tiene menor error cuadrático medio relativo, que el estimador analógico del índice de Shannon, según ha sido comprobado de forma empírica mediante una simulación de Monte Carlo por I. Martínez, R. Pérez y M.A. Gil (1985) y R. Pérez, M.A. Gil y P. Gil (1986).

Posteriormente C. Caso, M.A. Gil y R. Pérez (1986) y C. Caso (1987 y 1988) obtuvieron estimadores de la incertidumbre cuadrática y de la inquietud cuadrática en un muestreo estratificado con afijación proporcional, tanto para el muestreo con reposición como para el muestreo sin reemplazamiento.

C. Caso, M.A. Gil y R. Pérez. (1986) obtuvieron la varianza de estos estimadores y los estimadores de dichas varianzas, comprobando que se produce una ganancia de precisión en el muestreo estratificado respecto al muestreo simple superior al 60%. Además C. Caso (1988) estudió el comportamiento asintótico de la incertidumbre cuadrática y de la inquietud cuadrática, aspecto que permite construir intervalos de confianza y realizar contrastes de hipótesis sobre dichas medidas poblacionales.

Además de los desarrollos teóricos anteriormente descritos, las medidas de tipo cuadrático han sido aplicadas a diversos campos de la Economía, entre los que se incluye el estudio de la concentración industrial, la desigualdad de renta, la dependencia estadística, los contrastes de hipótesis y la evaluación de predicciones.

En el caso de la concentración industrial, las principales medidas tradicionalmente empleadas son los índices de Herfindahl, de Hannah y Kay y de Theil, presentando el primero de ellos la limitación de que no es descomponible y los restantes ciertos inconvenientes de tipo operativo que dificultan la obtención de estimadores insesgados (el índice de Hannah y Kay está definido en términos de radicales, mientras el de Theil es una función logarítmica).

M. J. Río y R. Pérez (1986, 1987 y 1988) abordan el estudio del índice cuadrático o incertidumbre cuadrática como medida de concentración industrial y una vez analizadas sus propiedades concluyen que, desde el punto de vista conceptual, resulta ser una medida adecuada para cuantificar la concentración ya que cumple los requisitos considerados como *exigibles* por M. Hall y N. Tideman (1967) y por L. Hannah y J.A. Kay (1977). Además esta medida es descomponible y está acotada entre 0 y 1, resultando posible mejorar esas acotaciones cuando se conoce la estructura del sector. Estos análisis han sido complementados con algunas aplicaciones empíricas como las realizadas por R. Pérez (1994) para la concentración sectorial en Asturias cuantificada a partir de los datos del PIB proporcionados por SADEI.

Las medidas tradicionalmente empleadas para el estudio de la desigualdad de renta son las propuestas por M.O. Lorenz (1905) y por C. Gini (1921). A pesar de sus indudables ventajas, ambos indicadores presentan la limitación de que no son aditivamente descomponibles[1], de manera que en general no se puede obtener la desigualdad de una población dividida en estratos a partir de las desigualdades de los grupos y de la desigualdad entre los estratos.

H. Theil (1967) fue el primer autor que propuso las medidas de información como marco adecuado para el estudio de la desigualdad, basándose en razones de tipo conceptual y operativo, sobre todo en la propiedad de ramificación o descomponibilidad.

Algunos autores, como F. Bourguignon (1979), F.A. Cowell (1977), A.E. Schorrocks (1980) y D. Zagier (1983), han propuesto caracterizaciones axiomáticas para las medidas de desigualdad aditivamente descomponibles. Así, según la caracterización propuesta por D. Zagier (1983), toda medida descomponible y que cumple las propiedades de normalización o minimalidad, independencia del tamaño poblacional, invarianza por homotecias, continuidad y condición de Pigou-Dalton es de la forma:

$$I_\beta (X) = \sum_i \phi_\beta \left( \frac{x_i}{\mu} \right) p_i$$

donde $x_i$ son las rentas, $\mu$ es la renta *per capita* y $\phi_\beta(x)$ es una función definida para cada $\beta$ real como:

$$\phi_\beta(x) = \begin{cases} x^\beta - 1 & \text{si } \beta < 0 \\ -\log x & \text{si } \beta = 0 \\ 1 - x^\beta & \text{si } 0 < \beta < 1 \\ x \log x & \text{si } \beta = 1 \\ x^\beta - 1 & \text{si } \beta > 1 \end{cases}$$

[1] Estos indicadores admiten una descomponibilidad en el caso de poblaciones divididas en grupos que no se solapan, esto es, subpoblaciones incompatibles.

El índice de Theil se corresponde con el caso $\beta=1$ de esta familia, mientras la varianza normalizada es el caso $\beta=2$ y la inquietud cuadrática coincide, salvo constante, con el caso $\beta=-1$.

Cabe además señalar que el parámetro $\beta$ es indicativo de la aversión a la desigualdad de manera que cuanto menor sea su valor la medida tendrá mayor aversión a la desigualdad.

En el marco del equipo MECO[2] (1990) hemos realizado un estudio de carácter analítico en el que hemos considerado una serie de propiedades que sería deseable que cumpliera toda medida de desigualdad, concluyendo que las medidas idóneas para el estudio de la desigualdad son el índice de Theil y el de orden -1. Puesto que el primero de ellos presenta ciertas limitaciones en los problemas de estimación, cuando es necesario realizar inferencias, resultará preferible emplear el índice de orden –1.

Por otro lado, desde un punto de vista conceptual, A.J. López y R. Pérez (1991) y A.J. López (1991) han propuesto un índice de desigualdad individual que se define como: $d_i = \frac{\mu}{x_i} - 1$ y recoge la posición relativa de un individuo de la población, tomando valores positivos para los rentistas que sufren desigualdad y negativos para aquéllos que la generan. El valor esperado de los índices de desigualdad individual proporciona una medida de desigualdad colectiva, cuya expresión viene dada por:

$$D(X) = \sum_i \left( \frac{\mu}{x_i} - 1 \right) p_i \, .$$

La representación gráfica de los índices individuales es una curva que corta al eje de abscisas, siendo la desigualdad colectiva la diferencia entre las áreas comprendidas entre la curva y dicho eje, representación que muestra cierto paralelismo con la curva de Lorenz[3].

[2] Los integrantes del equipo MECO (Métodos de Economía Cuantitativa Oviedo) son: R. Pérez, A.J. López, C. Ramos, M. Alvargonzález, M.R. Pérez, M.J. Río y C. Caso.

[3] En estos trabajos se aborda la desigualdad desde un punto de vista normativo, estudiando la relación entre el índice de orden –1 y los indicadores propuestos por A.B. Atkinson (1970). Además a partir de esta medida de desigualdad se define una familia de Funciones de Bienestar Social y se analiza su contenido ético.

Las medidas de información proporcionan también un contexto adecuado para el estudio de la dependencia estadística.

C. Rajski (1961, 1964) propone dos medidas para cuantificar la dependencia entre dos variables X e Y definidas a partir de la de la incertidumbre conjunta y condicionada de Shannon.

Por su parte, P. Gil (1981) define la razón de información, que puede ser interpretada como la proporción de pérdida de incertidumbre sobre la distribución conjunta provocada por el conocimiento que cada variable proporciona sobre la otra. Para el caso de las medidas cuadráticas, en N. Muñoz y M. Alvargonzález (1991) se ha propuesto una medida similar que se define como razón cuadrática de correlación. En este mismo estudio se considera una medida que cuantifica el grado de relación entre dos variables sin especificar cuál es la variable explicativa y cuál la explicada, que recibe el nombre de coeficiente cuadrático de correlación.

Estas medidas resultan de utilidad para estudiar la relación entre características cualitativas, permiten distinguir el caso de independencia en información cuadrática y además proporcionan una condición necesaria y suficiente de dicho tipo de independencia.

Puesto que en muchas ocasiones resulta conveniente tener en cuenta la importancia que se asigna a las diferentes alternativas de una variable, en M. Alvargonzález y N. Muñoz (1992) se ha propuesto un coeficiente de correlación basado en medidas de inquietud cuadrática que proporciona un criterio para estudiar la dependencia entre una variable y un atributo sin necesidad de prescindir de los valores de la primera ni de asignar valores a las modalidades del segundo.

El estudio de determinados contrastes de hipótesis puede ser abordado desde la teoría de la información. Así, para contrastes de hipótesis simple y alternativa simple, P. Gil (1981) ha obtenido un enunciado del Teorema de Neyman-Pearson en términos de medidas tipo Shannon.

En M. Alvargonzález, N. Muñoz y R. Pérez (1990) hemos realizado un planteamiento similar considerando la incertidumbre cuadrática en lugar de la entropía de Shannon, para lo cual hemos definido la cantidad de información cuadrática puntual y adoptado un criterio de decisión análogo. La región crítica óptima está basada en la diferencia entre las cantidades de información cuadrática puntuales que sobre la muestra proporcionan los parámetros de la hipótesis nula y de la alternativa.

Otro ámbito en el que las medidas de información se han revelado adecuadas es el estudio de la capacidad predictiva de los modelos econométricos. Las medidas habitualmente empleadas para evaluar las predicciones son el error cuadrático medio (o su raíz) y el error absoluto medio, que presentan las limitaciones de no estar acotadas y no contemplar la dificultad inherente a cada predicción. Por esa razón H. Theil (1966) propuso una medida que compara las tasas de variación previstas y efectivas.

Este mismo autor propone una medida de evaluación de predicciones basada en la incertidumbre de Shannon. Siguiendo un planteamiento análogo, A.J. López y B. Moreno (1999) proponen una medida para cuantificar la imprecisión de las previsiones basada en la incertidumbre cuadrática que recibe el nombre de medida cuadrática de imprecisión.

Además, dado que en general las realizaciones llevan asociada una utilidad, parece razonable considerar medidas de imprecisión basadas en medidas de inquietud, tal y como proponen A.J. López y B. Moreno (1999).

## 3.- MEDIDA DE INQUIETUD DOBLE CUADRÁTICA

El principal objetivo de este apartado es proponer una medida de información, la inquietud doble cuadrática, que se define a partir de dos indicadores de la familia de medidas de inquietud de orden β, estudiar sus principales propiedades y presentar algunas aplicaciones económicas de dicha medida.

### 3.1.- Definición y propiedades

Dado un sistema de probabilidades $\{p_1,...,p_M\}$ y un sistema de utilidades $\{u_1,...,u_M\}$ no nulas, sobre una variable X definida en una población E llamamos inquietud doble cuadrática al valor de la expresión:

$$HU^{*+2}(X) = HU^{*+2}(p_1,..., p_M, u_1,..., u_M) = \sum_{i=1}^{M}\left(\frac{E(u)}{u_i} - 1\right)^2 p_i$$

En general, la utilidad representa la valoración que el observador puede asociar a un suceso de forma que refleje la satisfacción o insatisfacción que le produce su aparición, no siendo en principio necesario que dichas utilidades cumplan ninguna de las axiomáticas habituales.

La expresión de esta medida es similar a la de la inquietud cuadrática, con la diferencia de que en este caso el sumando $\left(\frac{E(u)}{u_i}-1\right)$ aparece elevado al cuadrado. La notación empleada en este caso es $HU^{*+2}(X)$, mientras la inquietud cuadrática se denota por $HU^{*2}(X)$, es decir consideramos el superíndice "+" para las medidas doble cuadráticas.

La medida de inquietud doble cuadrática no pertenece a la familia de medidas de inquietud de orden β, pero se puede obtener a partir de dos medidas de esa familia, que son el caso β=2 y el caso β=3:

$$HU^{*\beta}(X)=\frac{1}{2^{1-\beta}-1}\sum_{i=1}^{M}p_i\left[1-\left(\frac{u_i}{E(u)}\right)^{1-\beta}\right]$$

$$HU^{*+2}(X)=\frac{3}{4}HU^{*3}(X)-\frac{1}{2}HU^{*2}(X)$$

La inquietud doble cuadrática cumple las siguientes propiedades:

(i) Continuidad.

$HU^{*+2}(p_1,\dots,p_M,u_1,\dots,u_M)$ es una función continua de sus argumentos, es decir un pequeño cambio en las utilidades o en las probabilidades supondrá una reducida variación en la inquietud doble cuadrática.

(ii) Principio de población o independencia del tamaño muestral.

La inquietud doble cuadrática permanece constante si se considera una superpoblación que sea una réplica de m veces la población original:

$HU^{*+2}(mX)=HU^{*+2}(X)$ siendo m=1,2, …

La inquietud doble cuadrática depende de la estructura de la población, pero no del tamaño de la misma.

(iii) Simetría o imparcialidad.

La inquietud doble cuadrática no depende de la numeración de los individuos, es decir: $HU^{*+2}(p_1,...,p_M,u_1,...,u_M) = HU^{*+2}(p_{\sigma(1)},...,p_{\sigma(M)},u_{\sigma(1)},...,u_{\sigma(M)})$, siendo $\sigma$ una permutación cualquiera del conjunto $\{1,...,M\}$.

(iv) Si no existe incertidumbre sobre el valor que va a asumir la población tampoco existe inquietud doble cuadrática sobre dicho valor, es decir:

$HU^{*+2}(1,u) = 0$ para todo u> 0.

(v) Es suficiente considerar aquellos resultados que realmente se verifican, es decir:

$HU^{*+2}(p_1,...,p_{M-1},0,u_1,...,u_M) = HU^{*+2}(p_1,...,p_{M-1},u_1,...,u_{M-1})$ cualesquiera que sean $\{u_1,...,u_M\}$ positivos y $\{p_1,...,p_M\}$ no negativos con $\sum_{i=1}^{M-1} p_i = 1$.

(vi) La inquietud doble cuadrática toma un valor no negativo, es decir:

$HU^{*+2}(p_1,...,p_M,u_1,...,u_M) \geq 0$.

(vii) Normalización o minimalidad.

La inquietud doble cuadrática se anula si y sólo si todas las utilidades son iguales, es decir en caso de equiutilidad:

$HU^{*+2}(p_1,...,p_M,u_1,...,u_M) = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 = ... = u_M$.

(viii) Invarianza por homotecias.

La inquietud doble cuadrática es invariante por homotecias positivas respecto a las utilidades, esto es para todo $\lambda$>0 se tiene que:

$HU^{*+2}(p_1,..., p_M, u_1,..., u_M) = HU^{*+2}(p_1,..., p_M, \lambda u_1,..., \lambda u_M)$.

(ix) La inquietud doble cuadrática toma el mismo valor considerando utilidades y utilidades relativas $\left(\frac{u_i}{E(u)}\right)$, es decir:

$$HU^{*+2}(p_1,...,p_M,u_1,...,u_M) = HU^{*+2}(p_1,...,p_M,v_1,...,v_M) \text{ con } v_i = \frac{u_i}{E(u)} \quad i=1,...,M.$$

(x) Variación ante traslaciones.

Si se produce un aumento lineal en las utilidades la inquietud doble cuadrática disminuye, es decir:

$HU^{*+2}(p_1,...,p_M,u_1+\lambda,...,u_M+\lambda) < HU^{*+2}(p_1,...,p_M,u_1,...,u_M)$, para todo $\lambda>0$.

(xi) Propiedad de ramificación. La inquietud doble cuadrática cumple que:

$$\begin{aligned}
HU^{*+2}(p_1,...,p_M,u_1,...,u_M) &= HU^{*+2}\left(p_1+p_2,p_3,...,p_M,\frac{p_1u_1+p_2u_2}{p_1+p_2},u_3,...,u_M\right)+ \\
&+(p_1+p_2)^3\frac{[E(u)]^2}{(p_1u_1+p_2u_2)^2}HU^{*+2}\left(\frac{p_1}{p_1+p_2},\frac{p_2}{p_1+p_2},u_1,u_2\right)+ \\
&+(p_1+p_2)^3\frac{[E(u)]^2}{(p_1u_1+p_2u_2)^2}HU^{*2}\left(\frac{p_1}{p_1+p_2},\frac{p_2}{p_1+p_2},u_1,u_2\right)- \\
&-(p_1+p_2)^2\frac{E(u)}{p_1u_1+p_2u_2}HU^{*2}\left(\frac{p_1}{p_1+p_2},\frac{p_2}{p_1+p_2},u_1,u_2\right).
\end{aligned}$$

Alternativamente esta propiedad de ramificación de la inquietud doble cuadrática puede ser enunciada de la siguiente forma: si tenemos una población dividida en dos subpoblaciones A y B la inquietud doble cuadrática de la población puede ser obtenida como suma de tres componentes: una que resume la inquietud doble cuadrática de las subpoblaciones, otra que considera la inquietud cuadrática de las subpoblaciones y una tercera que se obtiene a partir de la inquietud doble cuadrática entre las subpoblaciones, es decir:

$$HU^{*+2}(X) = \frac{[E(u)]^2}{[E_A(u)]^2}\frac{N_A}{N}HU^{*+2}(X)_A + \frac{[E(u)]^2}{[E_B(u)]^2}\frac{N_B}{N}HU^{*+2}(X)_B +$$

$$+\left[\frac{[E(u)]^2}{[E_A(u)]^2}\frac{N_A}{N}HU^{*2}(X)_A + \frac{[E(u)]^2}{[E_B(u)]^2}\frac{N_B}{N}HU^{*2}(X)_B\right] -$$

$$-\left[\frac{E(u)}{E_A(u)}\frac{N_A}{N}HU^{*2}(X)_A + \frac{E(u)}{E_B(u)}\frac{N_B}{N}HU^{*2}(X)_B\right] + \frac{N_A}{N}\left(\frac{E(u)}{E_A(u)} - 1\right)^2 + \frac{N_B}{N}\left(\frac{E(u)}{E_B(u)} - 1\right)^2$$

(xii) Cuando las utilidades son inversamente proporcionales al número de individuos al que van asociadas, la inquietud doble cuadrática depende del número de utilidades diferentes y de la diversidad de las mismas que viene expresada por la incertidumbre doble cuadrática y por la incertidumbre cuadrática, es decir:

$$HU^{*+2}\left(\frac{N_1}{N},\ldots,\frac{N_M}{N},\frac{t}{N_1},\ldots,\frac{t}{N_M}\right) = (M-1)^2 + M^2H^{+2}\left(\frac{N_1}{N},\ldots,\frac{N_M}{N}\right) -$$
$$- M(M-1)H^2\left(\frac{N_1}{N},\ldots,\frac{N_M}{N}\right).$$

## 3.2.- Aplicaciones económicas. Análisis de desigualdad

De modo análogo al visto en un apartado anterior para las medidas cuadráticas, entre las aplicaciones económicas de la inquietud doble cuadrática destacan el análisis de la desigualdad de renta, el estudio de la dependencia estadística y el análisis de regresión. En este trabajo nos centraremos únicamente en el ámbito de la desigualdad[4], considerando un sistema de rentas $\{x_1,\ldots,x_M\}$ y definiendo un indicador de desigualdad cuadrática individual que viene dado por la expresión:

[4] El estudio de la dependencia entre una variable y un atributo puede ser abordado con medidas basadas en la inquietud doble cuadrática, para lo cual se introduce el concepto de inquietud doble cuadrática de un campo condicionada por una variable y la independencia en información útil doble cuadrática. Puesto que, en general un campo no dependen de una sola variable, sino de varias variables simultáneamente, se puede realizar un planteamiento múltiple de la dependencia, definiendo la razón doble cuadrática de correlación múltiple.
Por su parte, el estudio de la regresión puede ser abordado con medidas de información doble cuadráticas. Más concretamente, la consideración de la medida de inquietud de los errores relativos como función a minimizar conduce al método de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos (MCER) que presenta, respecto al procedimiento habitual de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) la ventaja de que, a igual cuantía de error absoluto, se penalizan más los errores cometidos entre valores pequeños de la variable que entre valores elevados.

$$d_i = \left(\frac{\mu}{x_i} - 1\right)^2$$

donde $\mu$ es la renta *per capita*, es decir: $\mu = E(X)$.

La consideración de una expresión cuadrática para el indicador individual garantiza resultados positivos, impidiendo que se compensen los agravios individuales cuantificados para distintos integrantes de la población, a diferencia de lo que sucede en la medida de desigualdad colectiva D.

Por otra parte, la consideración de expresiones cuadráticas supone enfatizar las percepciones de agravio por parte de los rentistas menos favorecidos, concretamente aquéllos cuya renta sea inferior a la mitad del valor esperado de la población[5].

Partiendo de este indicador $d_i$ es posible aproximar el nivel de desigualdad como un resumen de las posiciones relativas individuales. Se sigue así el planteamiento propuesto por S. Yitzhaki (1979) a partir del concepto de *privación relativa* acuñado por W.G. Runciman (1966) y relacionado con el índice de desigualdad de Gini.

Según Runciman (1966) es posible afirmar que una persona se siente agraviada en términos relativos por una renta X cuando: (1) no percibe dicha renta, (2) ve cómo otras personas (entre las que podría incluirse él mismo en otro instante del tiempo) perciben esa renta, (3) desea tener esa renta y (4) ve factible llegar a alcanzarla. De este modo, la magnitud de la privación relativa es la diferencia entre la situación deseada por una persona y su situación efectiva, y el resumen de estas posiciones para el conjunto de la población conduce a la expresión $\mu G_X$ (producto de la renta *per capita* y el índice de desigualdad de Gini).

La idea de agravio relativo fue aplicada también por A.J. López y R. Pérez (1991) y A.J. López (1991), en sus análisis de la desigualdad individual $d_i = \frac{\mu}{x_i} - 1$ y colectiva $\left(D(X) = \sum_{i=1}^{M} d_i p_i\right)$.

[5] Se comprueba fácilmente que: $d_i^2 > d_i, d_i > 0 \Rightarrow x_i < \frac{\mu}{2}$

En el caso que nos ocupa, la medida de desigualdad doble cuadrática puede ser obtenida como síntesis de las desigualdades individuales cuadráticas, es decir, como el valor esperado de las desigualdades cuadráticas individuales que vendrá dado por la expresión:

$$D^{+}(X)=\sum_{i=1}^{M} d_i^2 p_i = \sum_{i=1}^{M}\left(\frac{\mu}{x_i}-1\right)^2 p_i$$

Dado que esta medida de desigualdad doble cuadrática compara por cociente cada renta individual con la renta *per capita* de la población, su valor aumentará cuando el reparto de la renta sea más desigual, comprobándose además que en esta medida las rentas que se sitúan por debajo de la renta *per capita* proporcionan una contribución a la desigualdad mayor que las que están por encima de la media (es decir que la medida es muy sensible a la desigualdad, al penalizar la presencia de valores por debajo de la media).

Si bien la medida de desigualdad doble cuadrática no pertenece a la familia aditivamente descomponible caracterizada por D. Zagier (1983), se puede obtener a partir de dos medidas de esa familia, concretamente la inquietud de orden β=-2 y la inquietud de orden β=-1, mediante la expresión: $HU^{*+2}(X)=I_{-2}(X)-2I_{-1}(X)$.

Esta medida puede ser considerada, en cierto modo, como un caso fraccional de la familia de medidas aditivamente descomponibles[6] cuando el valor del parámetro se encuentra comprendido entre -1 y –2 y se cumple que la inquietud doble cuadrática está acotada inferiormente por 0 y superiormente por $I_{-2}(X)$, es decir:

$$0 \leq HU^{*+2}(X) \leq I_{-2}(X).$$

Las principales propiedades que cumple la medida de desigualdad doble cuadrática son las siguientes: continuidad, principio de población, simetría, no negatividad, normalización o minimalidad, invarianza por homotecias, variación ante traslaciones y descomponibilidad .

[6] De hecho, se observa que a medida que aumenta el nivel de desigualdad el resultado de la inquietud doble cuadrática puede ser aproximado mediante medidas aditivamente descomponibles con parámetros β próximos a –2, mientras para niveles de desigualdad reducidos la inquietud doble cuadrática se aproxima al caso β=-1.

## 4.- INQUIETUD DOBLE CUADRÁTICA, DESIGUALDAD Y CRECIMIENTO

La idea de que existe cierta relación entre el nivel de desigualdad de renta en un país y la evolución de su renta *per capita* fue introducida por S. Kuznets (1955), quien afirma que la desigualdad aumenta en las primeras etapas de crecimiento y después de un punto de retorno decrece, hipótesis que recibe el nombre de U invertida de Kuznets y que está basada en estudios empíricos de series de declaraciones de impuestos en Inglaterra, Alemania y Estados Unidos en los siglos XIX y XX.

En las últimas décadas un gran número de autores han abordado este tema, tanto desde el punto de vista teórico como desde una óptica empírica, originándose una cierta polémica a la que sin duda ha contribuido la diversidad de planteamientos, bases de datos y técnicas estadísticas utilizadas.

La justificación teórica de la relación postulada por S. Kuznets parte de un enfoque dual, considerando una economía con dos sectores, uno moderno y otro tradicional. Asumiendo que el sector tradicional (agrario) se caracteriza por bajos niveles de renta media y de desigualdad, el modelo contempla las migraciones hacia el sector moderno (industrial) en el que tanto la renta media como la desigualdad son superiores. De este modo las primeras etapas del crecimiento vendrán caracterizadas por un aumento en las rentas y la desigualdad, mientras en etapas posteriores se mantendrían los crecimientos de renta al mismo tiempo que la desigualdad disminuiría.

Si se denota por x la proporción de población del sector moderno (siendo por tanto 1-x la proporción de población del sector tradicional) y si $\mu_i$, i=1, 2 representan las rentas medias en los sectores moderno y tradicional respectivamente, entonces se tiene: $\mu = \mu_1 x + \mu_2(1-x)$ con $\theta = \frac{\mu_1}{\mu_2} > 1$ (siendo $\mu$ la renta media de la población). Por su parte, $I_i$, i=1, 2 son los niveles de desigualdad sectoriales para los que el modelo de Kuznets supone: $\frac{I_1}{I_2} > 1$.

La hipótesis de que la desigualdad aumenta en las primeras fases del crecimiento puede ser entonces formulada como: $\left[\frac{\partial I}{\partial x}\right]_{x=0} > 0$ y la existencia de un punto de retorno supone: $\left[\frac{\partial I}{\partial x}\right]_{x=1} < 0$.

El enfoque dual propuesto por Kuznets ha sido posteriormente adoptado por autores como S. Robinson (1976) y S. Anand y S.M.R. Kanbur (1993). No obstante, es preciso tener presente que este planteamiento de migraciones intersectoriales conlleva importantes limitaciones, como la consideración como exógenas de las productividades de los dos sectores, y por tanto las tasas de crecimiento, o el supuesto de constancia para la proporción de rentas medias de los dos sectores considerados[7].

Esta falta de realismo del modelo afecta a las conclusiones de las aplicaciones empíricas ya que, como señala R. Ram (1989): "Muy pocas economías mundiales son estrictamente dualistas y muchos otros aspectos, además de su nivel de desarrollo, afectan a la distribución de renta de un país".

La relación existente entre desigualdad y crecimiento económico vendrá condicionada, entre otros factores, por la elección de la medida de desigualdad. Conscientes de este hecho, Anand y S. M. R. Kanbur (1993) realizan un análisis exhaustivo del proceso de Kuznets, obteniendo la relación funcional y la condición necesaria para la existencia de puntos de retorno en el caso de las siguientes medidas de desigualdad: el índice de Theil, el coeficiente L de Theil, la varianza normalizada, el índice de Atkinson, el coeficiente de Gini y la varianza de los logaritmos[8].

---

[7] Un análisis de este supuesto de constancia de $\theta$ junto con algunas extensiones del modelo aparece en J. Vicente y L. Borge (2000).

[8] Las expresiones obtenidas para los índices T y L de Theil son respectivamente $T = A + B\frac{1}{\mu} + C\log\mu$ y $L = A + B\mu + C\log\mu$, mientras para la varianza normalizada se obtiene $S^2 = A + B\left(\frac{1}{\mu}\right) + C\left(\frac{1}{\mu}\right)^2$, para el índice de Atkinson $[1 - I(\varepsilon)]^{1-\varepsilon} = A + B\mu^{\varepsilon} + C\mu^{\varepsilon-1}$, para el índice de Gini $G = A + B\mu + C\frac{1}{\mu}$ y para la varianza del logaritmo $\sigma^2 = A + B\mu + C\mu^2$.

Por su parte, R. Pérez et al. (1996) estudiaron el proceso de Kuznets cuando la desigualdad se mide a través del índice cuadrático o medida de desigualdad colectiva, obteniendo los siguientes resultados:

- La desigualdad colectiva puede ser expresada como función parabólica de la renta media mediante la expresión: $D = A\mu^2 + B\mu + C$ con:

  $$A = \left(\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\right)\left(\frac{D_1 + 1}{\mu_1} - \frac{D_2 + 1}{\mu_2}\right)$$

  $$B = \left(\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\right)\left(\frac{\mu_1 (D_2 + 1)}{\mu_2} - \frac{\mu_2 (D_1 + 1)}{\mu_1}\right)$$

  $$C = -1$$

  donde $D_i$ i=1, 2 son los niveles de desigualdad sectoriales medidos con la inquietud cuadrática.

- La condición necesaria para que exista un punto de retorno es:

  $(2\theta - 1)D_1 - \theta^2 D_2 < \theta(\theta - 1)^2$.

Algunos autores señalan la conveniencia de disponer de expresiones para expresar la relación entre la desigualdad y el crecimiento económico que sean más flexibles que las consideradas habitualmente, así como modelos que tengan más de un punto de inflexión. En este sentido, G.H. Wan (2002) señala las limitaciones de los polinomios de segundo orden y propone dos expresiones genéricas que no han sido obtenidas a partir de ninguna medida concreta de desigualdad, mientras otros autores proponen extensiones de la hipótesis de Kuznets teniendo en cuenta el papel de variables como el progreso técnico [J. Vicente y L. Borge (2000)] o las transferencias y el empleo público [B. Milanovic (2000)].

Siguiendo el planteamiento propuesto por S. Anand y S.M.R. Kanbur (1993), es posible derivar una relación analítica asociada al proceso de Kuznets cuando la desigualdad se mide a través de la inquietud doble cuadrática.

La inquietud doble cuadrática de una población se puede expresar como suma de los componentes intersectorial e intrasectorial: $D^{+} = D^{*} + D_{\alpha}$ con:

$$D^{*} = x\left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right)^2 + (1-x)\left(\frac{\mu}{\mu_2} - 1\right)^2$$

$$D_{\alpha} = \frac{\mu^2}{\mu_1^2} x D_1^{+} + \frac{\mu^2}{\mu_2^2}(1-x)D_2^{+} + 2\left(\frac{\mu^2}{\mu_1^2} x D_1 + \frac{\mu^2}{\mu_2^2}(1-x)D_2\right) - 2\left(\frac{\mu}{\mu_1} x D_1 + \frac{\mu}{\mu_2}(1-x)D_2\right)$$

donde $D_i$ i=1, 2 son los niveles de desigualdad sectoriales medidos con la inquietud cuadrática y $D_i^{+}$ i=1, 2 son los niveles de desigualdad sectoriales medidos con la inquietud doble cuadrática.

Teniendo en cuenta que la renta media poblacional puede ser expresada como:

$$\mu = \mu_1 x + \mu_2 (1-x)$$

se obtiene: $x = \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}$ y la desigualdad colectiva puede ser expresada como función polinómica de la renta media a través de la expresión: $D^{+} = A\mu^3 + B\mu^2 + C\mu + E$ con:

$$A = \left(\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\right)\left(\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu_2^2} + \frac{1}{\mu_1^2}D_1^{+} - \frac{1}{\mu_2^2}D_2^{+} + \frac{2}{\mu_1^2}D_1 - \frac{2}{\mu_2^2}D_2\right)$$

$$B = \left(\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\right)\left(-\frac{2}{\mu_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1^2} + \frac{\mu_1}{\mu_2^2} + \frac{2}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1^2}D_1^{+} + \frac{\mu_1}{\mu_2^2}D_2^{+} - 2\frac{\mu_2}{\mu_1^2}D_1 + 2\frac{\mu_1}{\mu_2^2}D_2 - \frac{2}{\mu_1}D_1 + \frac{2}{\mu_2}D_2\right)$$

$$C = \left(\frac{2}{\mu_1 - \mu_2}\right)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1}D_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}D_2\right)$$

$$E = 1$$

Puede observarse que esta función polinómica proporciona una expresión más flexible que las obtenidas para otras medidas de desigualdad y además admite la posibilidad de la existencia de más de un punto de retorno, por lo que podría presentar una mejor adaptación a distintas realidades empíricas.

La condición necesaria para la existencia de punto de retorno puede expresarse:

$$\left.\frac{\partial D^{+}}{\partial x}\right|_{x=1} < 0$$

siendo aconsejable considerar separadamente las dos componentes de $D^{+}$.

La componente intersectorial se puede expresar como:

$$D^* = x\left(\frac{1}{\theta}-1\right)^2 + x^2\left(\theta^2 - 2\theta - \frac{2}{\theta^2} + \frac{4}{\theta} - 1\right) + x^3\left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{\theta} - \theta^2 + 2\theta\right)$$

y la derivada parcial de esta expresión respecto a x es:

$$\frac{\partial D^*}{\partial x} = \left(\frac{1}{\theta}-1\right)^2 + 2x\left(\theta^2 - 2\theta - \frac{2}{\theta^2} + \frac{4}{\theta} - 1\right) + 3x^2\left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{\theta} - \theta^2 + 2\theta\right)$$

Se tiene entonces que:

$$\left.\frac{\partial D^*}{\partial x}\right|_{x=0} = \left(\frac{1}{\theta}-1\right)^2 > 0$$

$$\left.\frac{\partial D^*}{\partial x}\right|_{x=1} = -(\theta-1)^2 < 0$$

Por otro lado la componente intrasectorial puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} D_\alpha = {} & x^3\left[\left(1+\frac{1}{\theta^2}\right)\left(D_1^+ + 2D_1\right) - (\theta-1)^2\left(D_2^+ + 2D_2\right)\right] + \\ & + x^2\left[-2\left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\right)\left(D_1^+ + 2D_1\right) + \left(\theta^2 - 4\theta + 3\right)\left(D_2^+ + 2D_2\right) - 2\left(1-\frac{1}{\theta}\right)D_1 + 2(\theta-1)D_2\right] + \\ & + x\left[\left(\frac{2}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\right)\left(D_1^+ + 2D_1\right) + (2\theta-3)\left(D_2^+ + 2D_2\right) - \frac{2}{\theta}D_1 - 2(\theta-2)D_2\right] + D_2^+ \end{aligned}$$

y la derivada parcial de esta expresión respecto a x es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_\alpha}{\partial x} = {} & 3x^2\left[\left(1+\frac{1}{\theta^2}\right)\left(D_1^+ + 2D_1\right) - (\theta-1)^2\left(D_2^+ + 2D_2\right)\right] + \\ & 2x\left[-2\left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\right)\left(D_1^+ + 2D_1\right) + \left(\theta^2 - 4\theta + 3\right)\left(D_2^+ + 2D_2\right) - 2\left(1-\frac{1}{\theta}\right)D_1 + (\theta-1)D_2\right] + \\ & + \left[\left(\frac{2}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\right)\left(D_1^+ + 2D_1\right) + (2\theta-3)\left(D_2^+ + 2D_2\right) - \frac{2}{\theta}D_1 - 2(\theta-2)D_2\right] \end{aligned}$$

Se tiene entonces que:

$$\left.\frac{\partial D_\alpha}{\partial x}\right|_{x=1} = \left(3-\frac{2}{\theta}\right)D_1^+ + 2\left(1-\frac{1}{\theta}\right)D_1 - \theta^2 D_2^+ + 2\theta(1-\theta)D_2$$

y puesto que la condición necesaria para el punto de retorno es:

$$\left.\frac{\partial D^+}{\partial x}\right|_{x=1} < 0$$

se obtiene:

$$\left.\frac{\partial D^*}{\partial x}\right|_{x=1} + \left.\frac{\partial D_\alpha}{\partial x}\right|_{x=1} < 0$$

es decir:

$$\left(3-\frac{2}{\theta}\right)D_1^+ + 2\left(1-\frac{1}{\theta}\right)D_1 - \theta^2 D_2^+ + 2\theta(1-\theta)D_2 < (\theta-1)^2$$

Existe un buen número de análisis empíricos que intentan estimar las relaciones entre desigualdad y crecimiento en distintos ámbitos, contrastando además el supuesto de U invertida. Si bien la variable considerada en el planteamiento inicial de Kuznets es la renta *per capita*, los estudios empíricos suelen centrarse en el PIB o, más recientemente, en indicadores sintéticos de desarrollo.

A pesar de que la teoría de Kuznets se postula para explicar la evolución temporal de la desigualdad y el crecimiento de un país, la mayor parte de las aplicaciones empíricas se han realizado con datos de corte transversal, puesto que para un número elevado de países no existe información suficiente en serie temporal. En este sentido, si bien durante los últimos años se ha experimentado un indudable avance en cuanto a disponibilidad de acceso a bases de datos internacionales[9] sigue estando vigente –al menos parcialmente- la afirmación de M.S. Ahluwalia (1976) según la cual: *"Idealmente, los procesos dinámicos deberían ser examinados en un contexto explícitamente histórico para cada país en particular. Desgraciadamente los datos de series temporales sobre la distribución de la renta a lo largo de un amplio período de tiempo, simplemente no están disponibles para la mayoría de los países en vías de desarrollo. Por el momento, por lo tanto, la investigación empírica en esta área debe recurrir forzosamente a la experiencia de datos de corte transversal de países"*.

[9] Cabe destacar en este sentido el importante volumen de información facilitado por organismos como el Banco Mundial (http://www.worldbank.org) o Naciones Unidas (http://www.un.org), así como la difusión en Internet de las bases de datos elaboradas por K. Deininger y L. Squire (1996), la Penn World Table de A. Heston, R. Summers y B. Aten (2002) (http://pwt.econ.upenn.edu) y la World Income Inequality Database (WIID) desarrollada a través del United Nations Develoment Programme (UNDP) http://www.undp.org/poverty/initiatives/wider/wiid.htm

En términos generales, los principales problemas que plantean los datos internacionales en los que se basan las aplicaciones existentes van referidos a los siguientes aspectos:

- Deficiencias de la información en países poco desarrollados.
- Heterogeneidad de las metodologías empleadas en los distintos países.
- No coincidencia de períodos disponibles para todos los países.
- Conversión de magnitudes según tipos de cambio.

La existencia de estos problemas puede afectar considerablemente a las conclusiones de los análisis empíricos, ya que determinadas observaciones podrían corresponderse no a patrones de comportamiento sino a situaciones excepcionales o a la presencia espúrea de factores no controlados. Con el objetivo de evitar este tipo de situaciones algunas bases de datos internacionales, como las elaboradas por K. Deininger y L. Squire (1996), facilitan información complementaria sobre la calidad de los datos y su actualización.

Dentro del conjunto de trabajos cuyo objetivo principal es contrastar las hipótesis de Kuznets existe una amplia variedad de planteamientos, incluyendo estudios cronológicos de uno o varios países, análisis exhaustivos de casos particulares, estudios comparados de países análogos en un determinado período temporal, e incluso análisis globales de desigualdad y crecimiento a nivel mundial. Sin ánimo de exhaustividad, en la Tabla 1 se describen algunas de estas investigaciones empíricas realizadas a lo largo de las últimas dos décadas, señalando el ámbito de estudio, la técnica de análisis y las conclusiones obtenidas[10].

[10] Las referencias completas de los trabajos resumidos en la Tabla 1 aparecen recogidas en la bibliografía. Se han excluido de esta recopilación las aportaciones que, aun siendo relevantes en el ámbito analizado, tienen como principal objetivo explicar el crecimiento en función de la desigualdad.

**Tabla 1:** Algunas investigaciones sobre el modelo de Kuznets

| Referencia | Ámbito de estudio | Técnica de análisis | Conclusión |
|---|---|---|---|
| M. Braulke (1983) | Muestra de 33 países con información estadística homogénea sobre rentas (datos en torno a 1970) | Estimación de modelo no lineal para el índice de Gini en función de ratios sectoriales de renta y población | Cuando se tiene en cuenta la convergencia entre rentas sectoriales la U invertida ve acortada su fase inicial |
| R. Ram (1989) | Muestra de 115 países, período 1960-80 | Estimación mínimo cuadrática de modelo cuadrático para el índice de Theil respecto al PIB *per capita* | Los resultados apoyan la hipótesis de la U invertida |
| S. Anand y S.M.R. Kanbur (1993) | Muestra de 60 países en desarrollo (datos de Ahluwalia (1976)) | Estimación de relaciones funcionales para seis medidas de desigualdad (índice de Theil, coeficiente L de Theil, varianza normalizada, índice de Atkinson, coeficiente de Gini y varianza de los logaritmos) en función del PIB *per capita* | Los resultados no apoyan la hipótesis de la U invertida |
| G. Fields y G.H. Jakubson (1994) | Muestra de 62 observaciones correspondientes a 20 países | Estimación con datos de panel (efectos fijos) del índice de Gini | Los resultados de la estimación mínimo cuadrática apoyan la hipótesis de la U invertida, La estimación con efectos fijos contradice el supuesto |
| Y. Hsing y D. Smyth (1994) | Economía USA. Período temporal 1948-1987 (Datos del Bureau of the Census) | Estimación de modelo SUR para la desigualdad (índice de Gini) considerando separadamente las razas blanca y negra | Los resultados apoyan la hipótesis de la U invertida para las dos razas y el punto de retorno coincide aproximadamente |
| M. Ravallion (1995) | Muestra de 16 países con observaciones en dos períodos | Estimación del modelo propuesto por Anand y Kanbur para el índice de Gini | Los resultados no apoyan la hipótesis de la U invertida de Kuznets |
| W.G. Park y D.A. Brat (1995) | Muestra de 91 países en el período temporal 1960-1988 (Datos de la Penn World Table) | Estimación de un modelo cuadrático mundial para el índice de Gini, incluyendo la renta per capita y variables de I+D | Los resultados parecen sugerir la existencia de una curva de Kuznets condicional cuando se utilizan variables de control de I+D |
| P.J. Dawson (1997) | Muestra de 36 países poco desarrollados recogidos en RAM (1995) | Estimación de modelos cuadrático y semi-log para el coeficiente de Gini respecto a la renta *per capita* (corrección de White para la estimación consistente de la matriz de varianzas-covarianzas) | Los resultados apoyan la hipótesis de la U invertida |

| Referencia | Ámbito de estudio | Técnica de análisis | Conclusión |
|---|---|---|---|
| K. Deininger y L. Squire (1998) | Muestra de 108 países (1960-1990) | Estimación con datos de panel del nivel de desigualdad en función de renta media y sistema político del país | Los datos temporales no apoyan las hipótesis de Kuznets |
| H. Li; L. Squire y H. Zou (1998) | Muestra de 49 países con al menos cuatro observaciones temporales (1947-1994) | Estimación con panel de 573 datos del índice de Gini utilizando variables de control para las variables a las que va referido (renta o gasto) y las unidades (hogares, individuos) | Los datos no apoyan las hipótesis de Kuznets |
| M. Higgins y J.S. Williamson (1999) | Muestra de 85 países seleccionados de la base de Deininger y Squire (1996) con información del período 1960-1990 | Estimación con panel de 600 datos para el índice de Gini y el ratio de renta del quintil superior de la distribución | Los datos apoyan las hipótesis de Kuznets |
| T. Ogwang (2000) | Muestra de 175 países con datos de Naciones Unidas referidos a 1994 | Estimación de la desigualdad entre países para PIB *per capita* y para varios índices de desarrollo humano | La desigualdad respecto a PIB es mayor que respecto a los indicadores de desarrollo humano |
| A. Savvides y T. Stengos (2000) | Muestra de 52 países con datos de alta calidad a partir de las bases de Deininger y Squire (1998) y la Penn World Table de Summers-Heston | Estimación de modelos de regresión con umbral (TR) para el índice de Gini a partir de 547 observaciones. | Los resultados no apoyan la hipótesis de Kuznets |
| J. Thornton (2001) | Muestra de 96 países (Datos de Deininger y Squire (1998)) | Estimación de modelos cuadráticos para la desigualdad en función del PIB *per capita* | Los resultados apoyan la hipótesis de la U invertida de Kuznets |
| M. Bengoa y B. Sánchez (2001) | Muestra de 11 países latinoamericanos para el período 1975-1995 (Datos de Deininger y Squire (1996)) | Estimación de modelos para la desigualdad (medida con el índice de Gini) y el PIB *per capita* | Los resultados apoyan una relación cuadrática entre ambas variables |
| D. Dollar y A. Kraay (2001) | Muestra de 137 con al menos una información anual (Datos de Deininger y Squire (1996) y Penn World Table) | Estimación de modelos para el primer quintil de renta a partir del PIB *per capita* (estimación global con 418 observaciones país-año y específica para 92 países pobres con 285 datos) | Los resultados no apoyan la hipótesis de Kuznets |
| M. Alvargonzález y A.J. López (2002) | Muestra de 110 países (Datos del informe 'World Development Indicators' del Banco Mundial) | Estimación de relaciones funcionales para tres medidas de desigualdad en función del PIB *per capita* | En general los resultados no apoyan la hipótesis de la U invertida. La única evidencia favorable sería la asociada a la medida doble cuadrática |

**Fuente:** elaboración propia

## 5.- APLICACIÓN: DESIGUALDAD Y CRECIMIENTO EN EL ÁMBITO LATINOAMERICANO

Los países del ámbito latinoamericano presentan algunos rasgos diferenciales que aconsejan un estudio detallado del comportamiento de la desigualdad. De hecho, en el análisis llevado a cabo por G.S. Fields (1995) este autor observa que, por razones históricas, políticas y culturales, los países latinoamericanos de su muestra presentan una mayor desigualdad que los restantes países en vías de desarrollo, conduciendo a la obtención de una U invertida para la estimación de corte transversal.

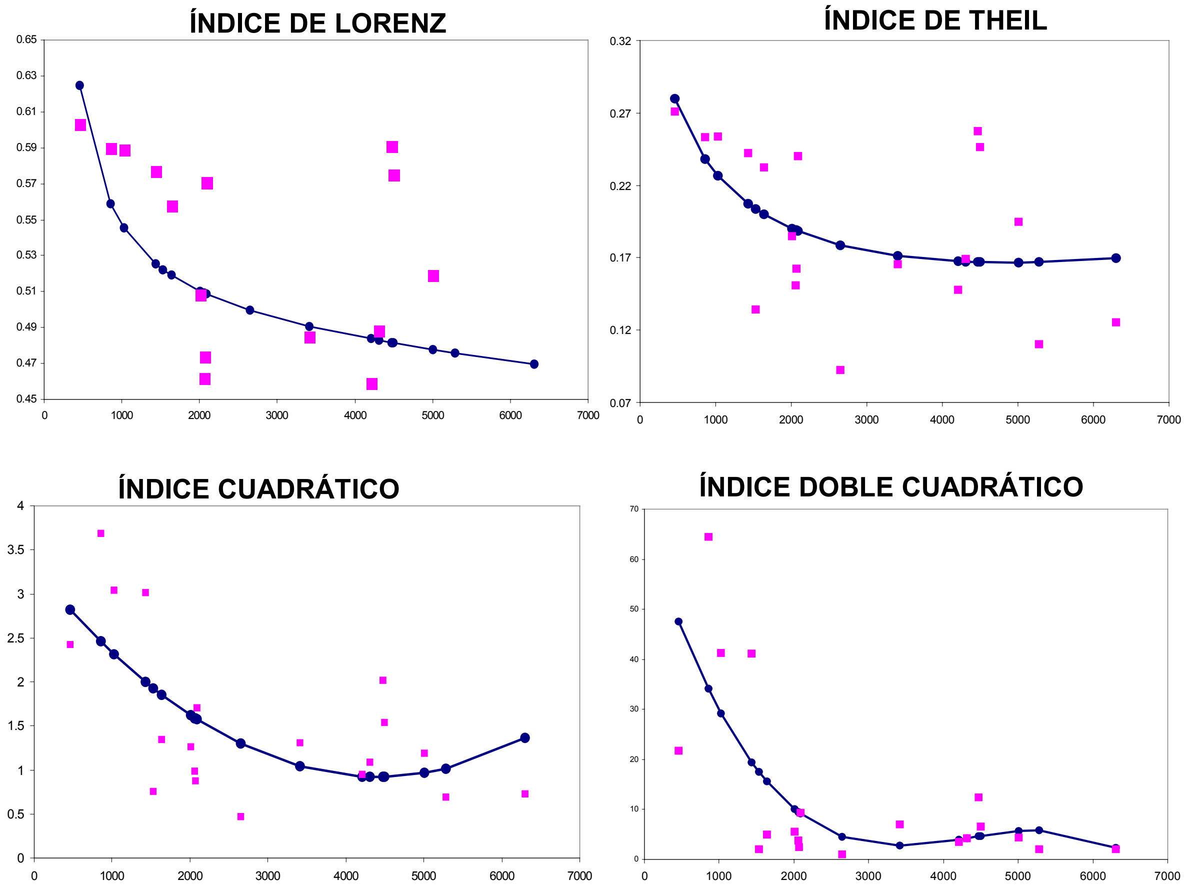
Con el objetivo de analizar las relaciones entre desigualdad y crecimiento en este ámbito, hemos considerado, en primer lugar, la información proporcionada por el informe "World Development Indicators" del Banco Mundial. La muestra abarca los 19 países que figuran en la Tabla 2.

**Tabla 2:** Muestra de países considerados

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Bolivia | Costa Rica | Honduras | Panamá | Trinidad y Tobago |
| Brasil | Ecuador | Jamaica | Paraguay | Uruguay |
| Chile | El Salvador | México | Perú | Venezuela |
| Colombia | Guatemala | Nicaragua | Rep. Dominicana | |

El análisis se basa en la información relativa al PIB *per capita* (expresado en dólares por persona), a partir del cual hemos calculado el índice de Lorenz, el índice de Theil, la desigualdad colectiva según la medida cuadrática y la doble cuadrática. Los resultados, representados en el Gráfico 1, muestran patrones similares para las diferentes medidas consideradas. En términos generales, las relaciones estimadas presentan forma de U, correspondiendo los mejores ajustes a la medida doble cuadrática.

**Gráfico 1:** Modelos desigualdad-crecimiento estimados para Latinoamérica




Teniendo en cuenta las limitaciones de las aplicaciones empíricas basadas en datos transversales, hemos completado este análisis mediante la incorporación de información temporal proporcionada por el Banco Mundial para el período 1960-1997, que permite aproximar la desigualdad entre países latinoamericanos.

De este modo, calculamos para cada uno de los períodos considerados el PIB *per capita* y la desigualdad entre los países latinoamericanos[11]. La estimación correspondiente aparece recogida en la Tabla 3.

[11] Dado que esta aplicación empírica requiere información para el conjunto del período 1960-1997, la muestra de países no coincide exactamente con la del análisis transversal. Más concretamente, se incluyen ahora Argentina y Belice, mientras se excluye Nicaragua.

**Tabla 3:** Modelos temporales estimados para el ámbito latinoamericano (1960-1997)

| Medida de desigualdad | Modelo estimado | $R^2$ |
|---|---|---|
| Indice de Theil | $\hat{T} = 0,62 \quad +0,000008\mu \quad -0,076\log\mu$ <br> $(0,28) \quad (0,00001) \quad (0,038)$ | 0,88 |
| Indice de Desigualdad Colectiva | $\hat{D} = 0,499 \; - 0,00016\mu \; + (1,86)10^{-8}\mu^2$ <br> $(0,074) \quad (0,000019) \quad (5,48)10^{-9}$ | 0,76 |
| Indice de Desigualdad doble cuadrática | $\hat{D}^+ = -0,96 + 0,001 1\mu - (3,44)10^{-7}\mu^2 + (3,46)10^{-11}\mu^3$ <br> $(0,46) \quad (0,0004) \quad (1,16)10^{-7} \quad (1,09)10^{11}$ | 0,35 |

Las regresiones estimadas en este caso indican que la desigualdad entre países decrece con el crecimiento económico según las medidas de Theil y desigualdad colectiva, mientras la medida doble cuadrática conduce a un modelo más flexible, en el que se suceden los patrones en forma de $\cap$ y de $\cup$ tal y como muestra el Gráfico 2.

En términos generales, los resultados obtenidos no apoyan la hipótesis de Kuznets, llegando así a conclusiones similares a las de otros estudios de corte temporal.

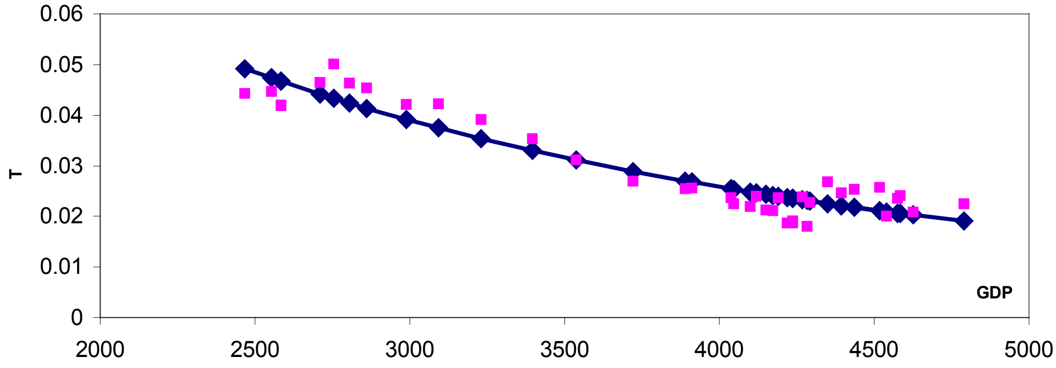
Finalmente, como complemento a las aplicaciones anteriores, presentamos un análisis a partir de datos de panel para el período 1950-2000. Las bases de datos en las que nos hemos basado para llevar a cabo esta última aplicación son las elaboradas por K. Deininger y L. Squire (1998) y por A. Heston, R. Summers y B. Aten (1991). La muestra está integrada por 18 países[12] cuya información sobre desigualdad es calificada por Deininger y Squire como de alta calidad, y en los que aproximamos el crecimiento económico mediante el PIB *per capita* medido en dólares constantes[13].

[12] La muestra de países no coincide con la considerada para el estudio de corte transversal, concretamente incluye Puerto Rico y excluye Paraguay y Uruguay

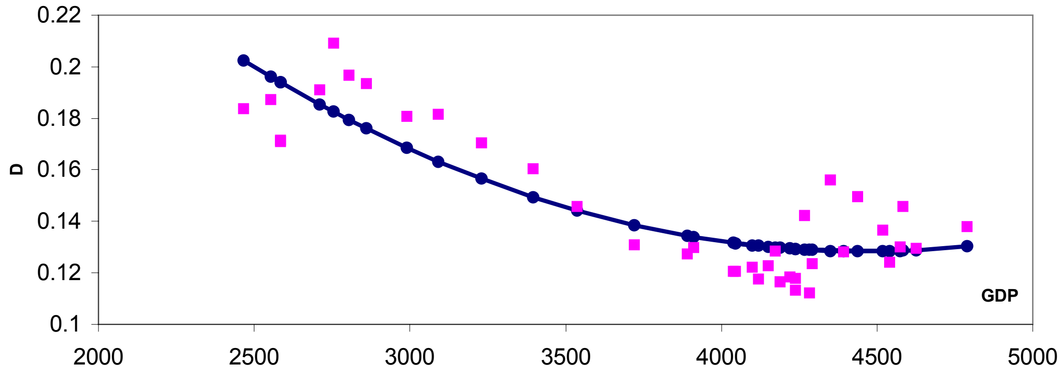
[13] Este PIB ha sido deflactado mediante índices de Precios de Laspeyres, y se corresponde con la variable denominada en la Penn World Table RGDPL (Real GDP *per capita*, Constant price: Laspeyres).

**Gráfico 2:** Modelos desigualdad-crecimiento estimados en Latinoamérica 1960-1997

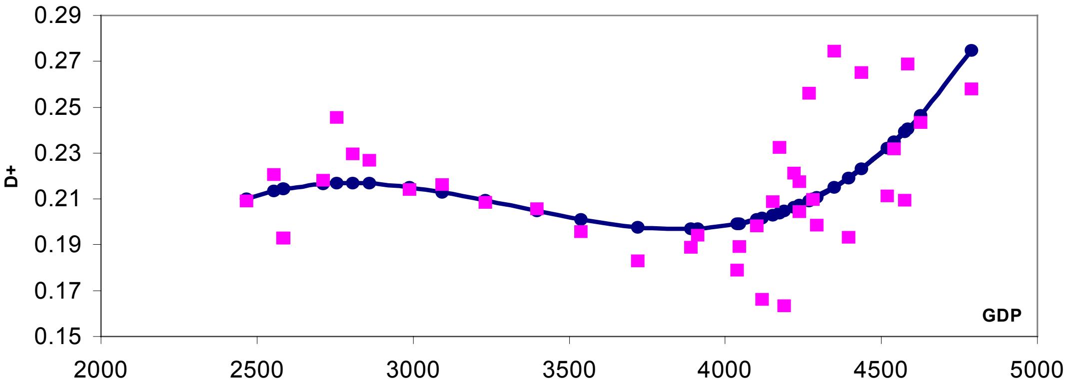
ÍNDICE DE THEIL




MEDIDA DE DESIGUALDAD COLECTIVA




MEDIDA DOBLE CUADRÁTICA



Partiendo de esta base hemos llevado a cabo estimaciones de las relaciones entre desigualdad y crecimiento para las medidas de Gini, Theil, desigualdad colectiva y desigualdad doble cuadrática, considerando en cada caso tanto efectos comunes (término independiente único) como efectos fijos (variables dummy por países), obteniéndose los resultados resumidos en la Tabla 4.

**Tabla 4:** Modelos estimados para la muestra de países latinoamericanos

| | **Parámetros estimados** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Indice de Gini** | | **Indice de Theil** | | **Desigualdad colectiva** | | **Desigualdad doble cuadrática** | |
| | **Ef. común** | **Ef. fijos** | **Ef. común** | **Ef. fijos** | **Ef. común** | **Ef. fijos** | **Ef. común** | **Ef. fijos** |
| **Y** | -4,25E-06 | 3,14E-07 | -0,0000393 | -3,41E-05 | 0,000265 | 0,000335 | -0,009292 | -0,002453 |
| **1/Y** | -26,847 | 112,7527 | | | | | | |
| **Log(Y)** | | | 0,1847 | 0,148489 | | | | |
| **$Y^2$** | | | | | -2,22E-08 | -2,96E-08 | 1,89E-06 | 7,26E-07 |
| **$Y^3$** | | | | | | | -1,15E-10 | -5,60E-11 |
| **Coef. común** | 0,5308 | | -0,98 | | 0,57825 | | 19,55702 | |
| **Coef. fijos** | | | | | | | | |
| **Bolivia** | | 0,373565 | | -0,818291 | | 0,023122 | | 4,111694 |
| **Brasil** | | 0,548873 | | -0,582327 | | 0,920536 | | 10,80979 |
| **Chile** | | 0,493424 | | -0,691196 | | 0,247513 | | 5,214265 |
| **Colombia** | | 0,484291 | | -0,705039 | | 0,270565 | | 5,770902 |
| **Costa Rica** | | 0,440602 | | -0,773165 | | 0,094415 | | 5,172577 |
| **Dominicana** | | 0,432627 | | -0,773853 | | 0,108897 | | 4,879632 |
| **Ecuador** | | 0,39971 | | -0,78437 | | -0,079366 | | 3,791388 |
| **El Salvador** | | 0,458873 | | -0,754847 | | -0,001359 | | 3,798866 |
| **Guatemala** | | 0,524697 | | -0,640538 | | 0,82918 | | 11,33306 |
| **Honduras** | | 0,516403 | | -0,579945 | | 1,525455 | | 18,92596 |
| **Jamaica** | | 0,398632 | | -0,840836 | | -0,142473 | | 3,782082 |
| **Mexico** | | 0,51492 | | -0,635243 | | 0,525462 | | 7,144518 |
| **Nicaragua** | | 0,443489 | | -0,694338 | | 0,509759 | | 5,8558 |
| **Panama** | | 0,498066 | | -0,67635 | | 0,835412 | | 13,17018 |
| **Peru** | | 0,430813 | | -0,777992 | | -0,140381 | | 3,171093 |
| **Puerto Rico** | | 0,495502 | | -0,676825 | | 1,133657 | | 17,08319 |
| **Trinidad** | | 0,441424 | | -0,742106 | | 0,799551 | | 13,00791 |
| **Venezuela** | | 0,4273 | | -0,77823 | | 0,076837 | | 4,950871 |
| $R^2$ | 0,0088 | 0,6917 | 0,0252 | 0,7136 | 0,0270 | 0,6147 | 0,0486 | 0,5320 |

En términos generales, los resultados de los modelos estimados confirman la trascendencia del método de estimación utilizado, ya que la consideración de efectos fijos lleva generalmente asociada no sólo una ganancia de capacidad explicativa sino también pérdidas de significación y cambios en los signos de los coeficientes de las variables explicativas. Estos aspectos han sido también señalados en trabajos como los de G.S. Fields (1995), K. Deininger y L. Squire (1998) y H.Li, L. Squire y H. Zou (1998).

Si bien la conclusión general del análisis realizado es que no existe una curva de Kuznets para el ámbito latinoamericano, se aprecian diferencias importantes en cuanto a los distintos indicadores de desigualdad considerados. Así, la única evidencia a favor de la existencia de una U invertida proviene de la estimación asociada al índice de desigualdad colectiva y el de Gini (si bien en este caso la conclusión cambia al contemplar la presencia de efectos fijos por países) mientras los modelos estimados para los índices de Theil y doble cuadrático presentan patrones de desigualdad monótonamente decrecientes.

Cabe por último señalar que el análisis particular de algunos países concretos muestra pautas diferenciadas ya que, mientras países como Brasil y México exhiben patrones de comportamiento que apoyan las hipótesis de Kuznets, en otros casos, como Costa Rica y Venezuela, se estima una relación en forma de U, que en el caso de la medida de desigualdad doble cuadrática se flexibiliza, prolongándose con una U invertida.

Nuestras conclusiones son coherentes con los análisis de G.S. Fields (1995), quien concluye que los países en desarrollo no apoyan la hipótesis de la U invertida, procediendo la única evidencia para este comportamiento de Brasil[14].

[14] Por su parte, J.L. Londoño (1990) estima un modelo de U invertida para Colombia y los trabajos de R. Weisskoff (1970) no detectan ningún patrón específico en el comportamiento de la desigualdad de Argentina y México.

## 6.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ACZÉL, J.; DARÓCZY Z. (1975): *On Measures of Information and their characterizations*. Academic Press. New York.

AHLUWALIA, M. S. (1976): "Income distribution and Development: Some Stylized Facts". *American Economic Review*, mayo, p. 128-135.

ALESINA, A.; RODRIK, D. (1994): "Distributive politics and economic growth". *The Quarterly Journal of Economics*, 109, p. 465-490.

ÁLVAREZ, S.; PRIETO, J.; SALAS, R. (2002): "The Evolution of Income Inequality in the European Union during the Period 1993-96". *Actas V Encuentro de Economía Aplicada*. Oviedo.

ALVARGONZÁLEZ, M.; LÓPEZ, A.J. (2002): "Desigualdad y crecimiento económico. Un estudio analítico y empírico del proceso de Kuznets". *Actas V Encuentro de Economía Aplicada*, Oviedo.

ALVARGONZÁLEZ, M.; MUÑOZ, N.; PÉREZ, R. (1990): "Información cuadrática en contrastes de hipótesis". *Actas XV Jornadas Luso-Espanholas de Matemática. Evora* (Portugal), IV, p. 331-336.

ALVARGONZÁLEZ, M.; PÉREZ, R. (1989): "Información cuadrática e independencia en información". *Actas XIV Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas*. Tenerife, II, p. 753-758.

ALVARGONZÁLEZ, M; MUÑOZ, N. (1992): "Medidas cuadráticas de información y dependencia estadística". *Actas VI Reunión ASEPELT-España*. Granada, III, p. 115-122.

ANAND, S.; KANBUR, S.M.R. (1993): "The Kuznets process and the inequality-development relationship". *Journal of Development Economics*, 40, p. 25-52.

ARASA, C.; ANDREU, J.M. (1999): *Desarrollo económico. Teoría y Política*. Dyckinson.

ARIMOTO, S. (1971): "Information-theoretical considerations on estimation problems". *Information and Control,* 19, p. 181-194.

ASH, R.B. (1965): *Information Theory*. Interscience J. Wiley.

ATKINSON A.B. (1970): "On the Measurement of Inequality". *Journal of Economic Theory*, 2, p. 244-263.

BELIS, M.; GUIASU S. (1968): "A quantitative-qualitative Measure of information in Cybernetic System". *I.E.E.E. Trans. Inf. Th*. 14, p. 593-594.

BENGOA, M.; SÁNCHEZ-ROBLES, B. (2001): "Crecimiento económico y desigualdad en los países latinoamericanos". *Información Comercial Española*, 790, p. 63-74.

BHARGAVA, T.N.; UPPULURI, V.R.R. (1975): "On an axiomatic derivation of Gini diversity with applications". *Metron* 33, IV, 1-2, p. 1-13.

BOURGUIGNON, F. (1979): “Decomposable income inequality measures”. *Econometrica*, 47 (4), p. 901-920.

BRAULKE, M. (1983): “A note on Kuznets´curve”. *The Review of Economics and Statistics*, 65, p.135-139.

BREZMES, T.; GIL, P. (1985): “Incertidumbre e información condicionada”. Homenaje al profesor Sixto Ríos. *Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa,* 36, 2, p. 39-55.

CASO, C. (1987): “The Quadratic Entropy. Estimation in the Stratified Sampling with replacement”. *17 th European Meeting of Statisticians*. Tesalónica (Grecia).

CASO, C. (1988): *Inferencias sobre medidas de información en el muestreo estratificado*. Tesis doctoral. Universidad de Oviedo.

CASO, C., GIL, M.A.; PÉREZ, R. (1986): “Estimación de la incertidumbre en el muestreo estratificado”. *Actas XVI Reunión Nacional de Estadística e Investigación Operativa.* Málaga.

CASO, C.; GIL, M.A. (1989a): “Estimating income inequality in the stratified sampling from complete data. Part I: The unbiased estimation and applications”. *Kybernetika*, 25 (4), p. 298-311.

CASO, C.; GIL, M.A. (1989b): “Estimating income inequality in the stratified sampling from complete data. Part II: The asymptotic behavoir and the choice of simple size”. *Kybernetika*, 25 (4), p. 312-319.

COWELL, F.A. (1977): *Measuring Inequality*. Phillip Alan. Oxford.

COWELL, F.A. (1980): “On the structure of additive inequality measures”. *Review of Economic Studies*, 47, p. 521-531.

COWELL, F.A.; KUGA, K. (1981): “Additivity and the entropy concept: an axiomatic approach to inequality measurement”. *Journal of Economic Theory*, 25, p. 131-143.

DAGUM, C. (1980): “Inequality measures between income distributions with applications”. *Econometrica*, 48, 7, p. 1791-1803.

DAGUM, C. (1991): “Renta y distribución de la riqueza, desigualdad y pobreza: teoría, modelos y aplicaciones”. *Seminario internacional de Estadística en Euskadi*. Instituto Vasco de Estadística. Cuaderno 22.

DAGUM, C. (2001): “Desigualdad del rédito y bienestar social, descomposición, distancia direccional y distancia métrica entre distribuciones”. *Estudios de Economía Aplicada* 17, p. 5-52.

DARÓCZY, Z. (1970): “Generalized information functions”. *Information and Control* 16, p. 36-51.

DAWSON, P.J. (1997): “On testing Kuznets´ economic growth hypothesis”. *Applied Economics Letters*, 4, p. 409-410.

DEININGER, K.; SQUIRE, L. (1996): "Measuring income inequality: a new data-base". *World Bank Economic Review*, 10 (3), p. 565-591.

DEININGER, K.; SQUIRE, L. (1998): "New ways of looking at old issues: inequality and growth". *Journal of Development Economics*, 37, p. 259-287.

DOLLAR, D.; KRAAY, A. (2001): "Growth is good for the Poor". *Development Research Group Working Paper*, World Bank.

EICHHORN, W.; GEHRIG, W. (1980): "Measurement of inequality in economics". *Discussion Paper, Nº 141.* Institut für Wirtschaftstheorie und Operations Research, Universität Karlsruhe.

FIELDS, G.S. (1995): "La curva de Kuznets: una buena idea, pero.... ". *Cuadernos Económicos de ICE*, 61, p. 59-77.

FIELDS, G.S.; JAKUBSON, G.H. (1994): *New evidence on the Kuznets Curve*. Cornell University.

GARCÍA, A.; MARTÍN, G. (1992): "Las relaciones entre crecimiento y distribución en S. Kuznets". *Actas VI Reunión ASEPELT-España*. Granada, I, p. 29-36.

GARCÍA-CARRASCO, M. P. (1986): "Una nota bibliográfica sobre las aplicaciones de la Teoría de la Información Estadística". *Trabajos de Estadística*, 1, 2, p. 111-118.

GIL, M. A. (1979): *Incertidumbre y utilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Oviedo.

GIL, M. A. (1981): "Estudio de una medida para la incertidumbre correspondiente a las utilidades". *Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa* 32, 3, p. 45-66.

GIL, M. A.; CASO, C.; FERNÁNDEZ, M.J. (1988): "Acotación del decrecimiento absoluto del error cuadrático medio del estimador insesgado de la diversidad: un criterio de elección del tamaño muestral". *Revista Real Academia de Ciencias*, LXXXII (1º), p. 129-139.

GIL, M. A.; CASO, C.; GIL P. (1989): "Estudio asintótico de una clase de índices de desigualdad muestrales". *Trabajos de Estadística* 4 (1), p. 95-109.

GIL, M. A.; PÉREZ, R.; GIL, P. (1987): "The mutual information. Estimation in the sampling without replacement". *Kybernetika*, 23, 5, p. 407-419.

GIL, M. A.; PÉREZ, R.; GIL, P. (1989): "A Family of Measures of Uncertainty Involving Utilities: Definition, Properties, Applications and Statistical Inferences". *Metrika* 36, p. 129-147.

GIL, M. A.; PÉREZ, R.; MARTÍNEZ, I. (1986): "The mutual information. Estimation in the sampling with replacement". *R.A.I.R.O. Recherche opérationelle/Operations Research*, 20, 3, p. 257-268.

GIL, P. (1974): *Medidas de incertidumbre e información en problemas de decisión estadística*. Tesis doctoral. Madrid.

GIL, P. (1981): *Teoría matemática de la información*. Ed. ICE.

GIL, P. (1996*):* "Las matemáticas de lo incierto". *Lección inaugural del curso académico 1996-1997*. Servicio de publicaciones. Universidad de Oviedo.

GINI, C. (1921): "Measurement of inequality of incomes". *The Economic Journal* 31, p. 124-126.

HALL, M.; TIDEMAN, N. (1967): "Measures of Concentration". *American Statistical Association Journal* 62, p. 162-168.

HANNAH, L.; KAY, J.A. (1977): *Concentration in modern Industry: Theory, Measurement an the U.K. Experience*. Ed. Macmillan. Londres.

HAVRDA, J.; CHARVÁT, F. (1967): "Quantification method of classification processes". *Kybernetika* 3, p. 30-35.

HESTON A.; SUMMERS R.; ATEN B. (2002): *Penn Word Table Version 6.1.* Center for International Comparisons at the University of Pennsylvania. http://pwt.econ.upenn.edu

HIGGINS, M.; WILLIAMSON, J.S. (1999): *Explaining inequality the World round: cohort size, Kuznets curves and openness*. Federal Reserve Bank of New York. http://www.worldbank.org/research/growth

HSING, Y.; SMYTH, D.J. (1994): "Kuznets's inverted-U hypothesis revisited" *Applied Economics Letters*, 1, p. 111-113.

KNIGHT, J.B. (1976): "Explaining Income Distribution in Less Developed Countries: A Framework and An Agenda". *Oxford Bulletin of Economic and Statistics*, 38, p. 161-177.

KUZNETS, S. (1955): "Economic growth and income inequality". *American Economic Review*, 45, p. 1-28.

KUZNETS, S. (1963): "Quantitative aspects of the Economic growth of Nations: VIII, Distribution of Income by Size". *Economic Development and Cultural Change*, enero, 2, p. 1-80.

LI, H., SQUIRE, L.; ZOU, H. (1998): "Explaining international and intertemporal variations in income inequality". *The Economic Journal*, 108, p. 26-43.

LONDOÑO, J.L. (1990): "Human Capital and Long Run Swings of Income Distribution: Colombia 1938-1988". *Mimeo*, Agosto.

LÓPEZ, A. J. (1991): *Desigualdad de renta y pobreza: una aproximación conceptual y cuantitativa*. Tesis doctoral. Universidad de Oviedo.

LÓPEZ, A. J.; MORENO. B. (1999): "Evaluación de predicciones basada en medidas de información. Nuevas alternativas". *Anales de Economía Aplicada, Actas XIII Reunión ASEPELT-España*, Burgos

LÓPEZ, A. J.; PÉREZ, R. (1991): "Indicadores de Desigualdad y Pobreza. Nuevas alternativas". *Documento de trabajo nº 37. Facultad de C.C. Económicas y Empresariales*. Universidad de Oviedo.

LÓPEZ, A. J.; PÉREZ, R. (1994a): "Evolución de la pobreza en Asturias". *Documento de trabajo Hispalink-Asturias, 2/94.*

LÓPEZ, A. J.; PÉREZ, R. (1994b): "Desigualdad y pobreza en las regiones de la Unión Europea". *Boletín Asturiano sobre la Unión Europea*, 54, p. 5-12.

LORENZ, M.O. (1905): "Methods of Measuring concentration and Wealth". *Journal of the American Statistical Association* 9, p. 209-219.

MARTÍNEZ, I.; PÉREZ, R.; GIL, M.A. (1985): "Simulación de Monte Carlo para la comparación de las estimaciones de las entropías cuadrática y de Shannon en el muestreo con reemplazamiento". *Actas XV Reunión Nacional de Estadística e Investigación Operativa* (Asturias), 2, p. 436-444.

MATHAI, A.M.; RATHIE, P.N. (1975): *Basic Concepts in Information Theory and Statistics*. Wiley Eastern Limited. New Delhi.

MECO (1988a): "Índice cuadrático de concentración industrial para variables continuas". *Actas XVII Reunión Nacional de la Sociedad de Estadística, Investigación Operativa e Informática* (S.E.I.O.). Benidorm.Vol. 8.

MECO (1988b): "Índice de orden –1 para distribuciones continuas de renta. Aplicación a la distribución de Pareto". *Actas XVII Reunión Nacional de la Sociedad de Estadística, Investigación Operativa e Informática (S.E.I.O.*). Benidorm. Vol. 8.

MECO (1990): "Medidas de desigualdad: un estudio analítico". *Documento de trabajo nº 13*. Facultad de C.C. Económicas y Empresariales. Universidad de Oviedo.

MILANOVIC, B. (2000): "Determinants of Cross-Country Income Inequality: An Augmented Kuznets Hypothesis". *Inequality Course, Development Research Group*, World Bank, http://www.worldbank.org/research/inequality/

MILANOVIC, B. (2002): "The Ricardian Vice: Why Sala-i-Martín´s calculations of world income inequality cannot be right". *Development Research Group Working Paper*, World Bank, Washington.

MUÑOZ, N.; ALVARGONZÁLEZ, M. (1991): "Aplicación de las medidas de información cuadrática al estudio de la dependencia estadística". *Actas V Reunión ASEPELT- España*. Gran Canaria.

MUÑOZ, N.; ALVARGONZÁLEZ, M. (1992): "La información cuadrática como medida de asociación múltiple entre caracteres". *Actas I Congreso Iberoamericano y XX Reunión de la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa*. Cáceres.

OGWANG, T. (2000): "Inter-country inequality in human development indicators". *Applied Economics Letters*, 7, p. 443-446.

PARDO, L. (1997): *Teoría de la información estadística*. Ed. Hespérides.

PARK, W.G.; BRAT, D.A. (1995): "A global Kuznets curve?" *Kyklos*, 48, p. 105-131.

PÉREZ, R. (1985): *Estimación de la incertidumbre. La incertidumbre útil y la inquietud en poblaciones finitas. Una aplicación a las medidas de desigualdad*. Tesis doctoral. Universidad de Oviedo.

PÉREZ, R. (1994): "Distribución de la renta en Asturias. Una aproximación espacial y sectorial", en *Economía y Empresa en Asturias, Homenaje a Ignacio Herrero Garralda, Marqués de Aledo*. Ed. Civitas, p. 239-264.

PÉREZ, R.; CASO, C.; GIL M.A. (1986): "Unbiased estimation of income inequality". *Statistiche Hefte*, 27, p. 227-237.

PÉREZ, R.; GIL M.A.; GIL, P. (1986): "Estimating the Uncertainty associated with a Variable in a finite population". *Kybernetes* 15, p. 251-256.

PÉREZ, R.; LÓPEZ, A.J. (1995): "La Asturias desigual". En *Historia de la Economía Asturiana*. Editorial Prensa Ibérica, n. 62, p. 977-992.

PÉREZ, R.; LÓPEZ, A.J. (1997): *Análisis de datos económicos II. Métodos inferenciales*. Ed. Pirámide.

PÉREZ, R.; LÓPEZ, A.J. (2001): "La distribución de la renta. Una visión panorámica 1981-2001", *Revista Asturiana de Economía*, extra, p. 267-286.

PÉREZ, R.; LÓPEZ, A.J.; CASO, C.; LANDAJO, M. (1996): "Desigualdad de renta. Una propuesta de cuantificación". *Anales de Economía Aplicada, Actas de la X Reunión ASEPELT-España*, Albacete.

PÉREZ, R.; LÓPEZ, A.J.; RÍO, M.J.; MUÑOZ, N.; CASO, C.; ALVARGONZÁLEZ, M.; GARCÍA, B. (1997): *Análisis de datos económicos I. Métodos descriptivos*. Ed. Pirámide.

QUAH, D. (1999): "6 x $10^9$: Some Dynamics of Global Inequality and Growth". *Working Paper*, http://econ.lse.ac.uk/staff/dquah/p/9912sbn.pdf

RAJSKI, C. (1961): *Entropy and Metric Spaces*. Inf. Th. Edited by Collon Cherry, p. 41-45.

RAJSKI, C. (1964): "On the Normed Information Rate of Discrete Random Variables". *Trasl. of the Third Praga Congress*, p. 583-585.

RAM, R. (1989): "Level of development and income inequality: an extension of Kuznets-hypothesis to the world economy". *Kyklos*, 42, p. 73-88.

RAMOS, C. (1993): *Relación entre la concentración industrial y el bienestar social*. Tesis doctoral. Universidad de Oviedo.

RAVALLION, M. (1995): "Growth and poverty: Evidence for developing countries in the 1980s". *Economics Letters* 48, p. 411-417.

RÉNYI, A. (1961): "On measures of entropy and information". *Proceedings of the fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1, p. 547-561.

RÍO, M. J.; PÉREZ, R. (1985): "Una caracterización de la inquietud de orden β y su interpretación para las medidas de desigualdad". *Actas de la XV Reunión de Nacional de Estadística e Investigación Operativa.* Asturias, p. 649-656.

RÍO, M. J.; PÉREZ, R. (1986): "Grado de concentración industrial. Una aproximación". *XVI Reunión de la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa*. Málaga.

RÍO, M. J.; PÉREZ, R. (1987): "El índice cuadrático como medida de la concentración industrial". *XII Jornadas Luso-Espanholas de Matemática*. Braga (Portugal).

RÍO, M. J.; PÉREZ, R. (1988): "Sobre la medición de la concentración industrial". *Investigaciones económicas (Segunda época).* Suplemento, p. 81-88.

ROBINSON, S. (1976): "A Note on the U Hypothesis relating Income Inequality and Economic Development". *American Economic Review*, 66, 3, p. 437-440.

RUNCIMAN, W.G. (1966): *Relative Deprivation and Social Justice*. Routledge and Kegan Paul, London.

SALA-I-MARTIN, X. (2002): "The world distribution of income estimated from individual country distributions". *Working Paper, Columbia University*, http://www.columbia.edu/~xs23/home.html

SAVVIDES, A.; STENGOS, T. (2000): "Income inequality and economic development: evidence from the threshold regression model". *Economics Letters*, 69, p. 207-212.

SEN, A. (1976): "Poverty: an ordinal approach to measurement". *Econometrica*, 44 (2), p. 219-231.

SEN, A. (1995): *Nuevo examen de la desigualdad*. Alianza Economía.

SHANNON, C.E. (1948): "A mathematical Theory of communication". *Bell. System. Tech*. J.7, p. 379-423.

SHORROCKS, A.F. (1980): "The class of additively decomposable inequality measures". *Econometrica* 48 (3), p. 613-625.

SUMMERS, R.; HESTON, A (1991): "The Penn World Table (Mark 5): An expanded set of international comparisons 1950-1988". *Quarterly Journal of Economics*, 106, 2, p. 327-368.

SYLWESTER, K. (2000): "Income inequality, education expenditures and growth". *Journal of Development Economics*, 63, p. 379-398.

TANEJA, I.J. (1989): "On generalized information measures and their applications". *Ad. Electronics and Electron Physics* 76, p. 327-413.

THEIL, H. (1966): *Applied Economic Forecasting*. North Holland Publishing, Amsterdam.

THEIL, H. (1967): *Economics and Information Theory*. North Holland Publishing, Amsterdam.

THORNTON, J. (2001): "The Kuznets inverted–U hypothesis: panel data evidence from 96 countries". *Applied Economics Letters*, 8, p. 15-16.

UNITED NATIONS (2001). *Human Development Report*. http://www.undp.org/hdro

UNITED NATIONS DEVELOPMENT PROGRAMME (1999): *World Income Inequality Database*, http://www.undp.org/poverty/initiatives/wider/wiid.htm

VICENTE, J.; BORGE, L. (2000): "Desarrollo y desigualdad con progreso técnico", *Investigaciones Económicas*, v. XXIV (3), p. 709-726.

WAN, G.H. (2002): "Income Inequality and Growth in Transition Economies". *World Institute for Development Economics Research. Discussion Paper,* 104.

WEISSKOFF, R. (1970): "Income Distribution and Economic Growth in Puerto Rico, Argentina and México". *Review of Income and Wealth*, December, p. 203-232.

WORLD BANK (2001): *World Development Indicators*. http://www.worldbank.org

YIZHAKI, S. (1979): "Relative deprivation and the Gini coefficient". *Quarterly Journal of Economics*, 32, p. 1-324.

ZAGIER, D. (1983): "On the decomposability of the Gini coefficient and other indices of inequality". *Discussion Paper Nº108.* Projektgruppe Theoretische Modelle. Universität Bonn.